

Mouvement brownien branchant à vitesse variable dans le cas sous-critique

Mémoire de Master 2

Michel PAIN

sous la direction de Zhan SHI

5 juin 2015

Résumé

Dans la première partie, nous rappelons les principaux résultats concernant la particule extrémale et le processus extrémal du mouvement brownien branchant standard. Les deux parties suivantes sont consacrées à la démonstration du développement asymptotique de la position de la particule extrémale et de la convergence du processus extrémal pour le mouvement brownien branchant à vitesse variable dans le cas sous-critique. La deuxième partie traite le cas particulier du mouvement brownien branchant à deux vitesses. On étudie ensuite le cas général dans la troisième partie en se ramenant par comparaison gaussienne au cas des deux vitesses.

Je tiens à remercier Zhan Shi de m'avoir proposé ce sujet, ainsi que pour sa disponibilité et ses conseils.

Table des matières

Introduction	3
1 Le mouvement brownien branchant standard	4
1.1 Arbres marqués et définition du mouvement brownien branchant . . .	4
1.2 Lemmes de regroupement	8
1.3 Représentation de McKean et étude de la particule extrémale	9
1.4 Convergence en loi de mesures aléatoires	12
1.5 Convergence du processus extrémal	14
1.5.1 Résultats d'Arguin, Bovier et Hartung	14
1.5.2 Résultats d'Aïdekon, Berestycki, Brunet et Shi	17
2 Le mouvement brownien branchant à deux vitesses dans le cas sous-critique	19
2.1 Présentation du modèle et des résultats	19
2.2 Localisation des trajectoires	23
2.3 Comportement asymptotique des solutions de l'équation F-KPP . . .	32
2.4 La martingale de McKean	37
2.5 Convergence de la particule extrémale	44
2.6 Convergence du processus extrémal	57
2.7 Le processus ponctuel auxiliaire	64
2.8 Description de la limite du processus extrémal	69
3 Le mouvement brownien branchant à vitesse variable dans le cas sous-critique	75
3.1 Énoncé des résultats	75
3.2 Localisation des trajectoires	78
3.3 Démonstration du théorème principal	79
3.4 Approximation par des mouvements browniens branchants à deux vitesses	80
3.5 Comparaison gaussienne	83
3.6 Démonstration des lemmes auxiliaires	89
Références	102

Introduction

L'origine des processus de branchement remonte à Bienaymé en 1845 puis à Galton et Watson en 1874, qui étudient un processus modélisant l'évolution du nombre de membres d'une famille au fil des générations. Le modèle est très simple : on part d'un individu à la génération 0, puis chaque individu de la génération n a un nombre aléatoire d'enfants selon une loi de fixée, indépendamment des autres, et l'ensemble de ces enfants forme la génération $n + 1$. Bienaymé, Galton et Watson s'intéressent à la probabilité de survie de cette population quand n tend vers l'infini, pour savoir si le nom d'une famille a tendance à s'éteindre ou non. Si Z_n est le nombre d'individus à la génération n , la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée processus de Galton-Watson et c'est une chaîne de Markov. On peut également considérer l'arbre qui découle naturellement de ce modèle, où les nœuds représentent les individus et la hauteur d'un nœud correspond à la génération de l'individu (un formalisme précis pour les arbres a été défini par Neveu [21] en 1986 et sera présenté dans la sous-partie 1.1). L'arbre aléatoire ainsi obtenu est appelé arbre de Galton-Watson. Il vérifie la propriété de branchement : sachant que l'arbre jusqu'à la génération n est égal à un certain arbre τ , l'arbre a même loi que l'arbre obtenu en faisant démarrer en chaque feuille de τ des arbres de Galton-Watson indépendants.

On peut également considérer le cas du temps continu, en supposant que les temps de vie des individus soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (au lieu d'être fixés à 1). Si Z_t est le nombre d'individus en vie à l'instant t , alors $(Z_t)_{t \geq 0}$ est appelée processus de Bellman-Harris. Pour que ce soit un processus de Markov, il faut que le temps de vie suive une loi exponentielle. Dans ce cas, l'arbre de Bellman-Harris (que l'on peut définir grâce au formalisme des arbres marqués présenté en 1.1) vérifie la propriété de branchement en temps continu.

Toujours dans le cadre de modèles liés à la biologie, il est naturel de s'intéresser également à la position des individus de cette population. L'introduction de cette dimension spatiale a conduit à l'étude de deux nouveaux types de processus de branchement : les marches aléatoires branchantes et le mouvement brownien branchant. Les marches aléatoires branchantes correspondent au cas des générations discrètes : on considère un arbre de Galton-Watson et on attribue à chaque individu une position aléatoire, obtenue en ajoutant à la position de son parent une variable aléatoire indépendante des autres et identiquement distribuée. Le mouvement brownien branchant correspond au cas du temps continu : une particule part de 0 à l'instant 0 et suit un mouvement brownien, son temps de vie suit une loi exponentielle et quand elle meurt elle donne naissance à un nombre d'enfants aléatoire, tiré selon la loi de reproduction ; ses enfants partent alors de la position où elle est morte et suivent des mouvements browniens indépendants pendant des temps de vie exponentiels indépendants et ont ensuite des nombres d'enfants indépendants et ainsi de suite. Ces deux processus vérifient encore la propriété de branchement et ont de nombreuses propriétés asymptotiques analogues.

Nous nous intéressons dans ce mémoire au cas du mouvement brownien branchant, qui apparaît dès 1968 comme un cas particulier de processus de branchement markovien dans un article de Ikeda, Nagasawa et Watanabe [16]. L'étude du mouve-

ment brownien branchant s'est développée suite à l'article de McKean [20] en 1975 qui relie cet objet probabiliste à l'équation aux dérivées partielles de Fisher [14] ou de Kolmogorov-Petrovsky-Piskunovi [17] étudiée en 1937 pour modéliser la propagation d'un allèle avantageux dans une population. Une attention toute particulière a été portée sur les propriétés asymptotiques de la position de la particule la plus haute, avec entre autres Bramson [8] en 1983 puis Lalley et Sellke [18] en 1987. Cependant l'étude de la convergence de l'ensemble du mouvement brownien branchant vu depuis la particule extrême n'a été résolue que très récemment par Arguin, Bovier et Kistler [4] et Aïdékon, Berestycki, Brunet et Shi [1] en 2013. L'exposé de Gouéré [15] contient une présentation détaillée de ces différents travaux. Tous ces résultats sont présentés dans la partie 1.

L'objectif de ce mémoire est la démonstration de ces résultats (comportement asymptotique de la particule la plus haute et convergence du processus extrême) pour un modèle légèrement différent : le mouvement brownien branchant à vitesse variable dans le cas sous-critique. Cette démonstration est issue des deux articles de Bovier et Hartung [6] et [7] datant de 2014. Le modèle étudié se définit pour un horizon fixé $t > 0$. Les particules ont les mêmes temps de vie et branchent comme précédemment, mais leur mouvement est un mouvement brownien reparamétré par une fonction $\Sigma_t^2 : [0; t] \rightarrow [0; t]$ croissante valant 0 en 0 et t en t . On peut remarquer que le processus ainsi obtenu est maintenant seulement markovien inhomogène en temps. Le cas sous-critique correspond au fait que la fonction Σ_t^2 reste strictement en dessous de l'identité sur $]0; t[$: les particules se déplacent moins vite que dans le cas standard au début du mouvement, et plus vite à la fin. L'étude se décompose en deux parties, qui correspondent à peu près au découpage des deux articles. Dans la partie 2, on considère le cas où Σ_t^2 est affine par morceaux avec un seul changement de pente : si ces pentes sont σ_1^2 puis σ_2^2 , le mouvement des particules est successivement un mouvement brownien de variance σ_1^2 puis de variance σ_2^2 . Dans la partie 3, on traite le cas général en encadrant, au voisinage de 0 et de t , la fonction Σ_t^2 par des fonctions affines par morceaux pour se ramener aux résultats de convergence montrés dans la partie 2.

1 Le mouvement brownien branchant standard

1.1 Arbres marqués et définition du mouvement brownien branchant

Pour construire le mouvement brownien branchant, nous avons besoin tout d'abord d'introduire un formalisme pour les espaces d'arbres, défini par Neveu dans [21] pour construire les arbres de Galton-Watson et présenté par Chauvin et Rouault dans [10] dans le cas du mouvement brownien branchant.

On définit $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n \geq 1} (\mathbb{N}^*)^n$ l'ensemble des suites finies d'entiers de \mathbb{N}^* , où \emptyset correspond à la suite de longueur nulle. Pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}$, on note $|u| := n$ la *longueur* de u . Si $n \geq 1$, on note $p(u) := (u_1, \dots, u_{n-1})$ le *parent* de u . Pour $v = (v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{U}$, on pose $uv := (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$ le *concaténé* de u et v . Enfin, on dit que v est un *ancêtre* de u s'il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $v = (u_1, \dots, u_k)$.

Les éléments de \mathcal{U} correspondent aux étiquettes des nœuds des arbres. Un arbre est enraciné en \emptyset et pour chacun de ses nœuds, il doit contenir tous ses ancêtres jusqu'à la racine. Si l'un de ses nœud a k fils, ils sont obtenus en concaténant les entiers de 1 à k à l'étiquette de ce nœud. Ainsi la longueur de l'étiquette correspond à la génération du nœud. Cette description correspond à la définition suivante :

Définition 1.1. Un *arbre* τ est un sous-ensemble de \mathcal{U} vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $\emptyset \in \tau$,
- (ii) $\forall u \in \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}, p(u) \in \tau$,
- (iii) $\forall u \in \tau, \exists \nu_u(\tau) \in \mathbb{N} : \forall j \in \mathbb{N}^*, (uj \in \tau) \Leftrightarrow (1 \leq j \leq \nu_u(\tau))$.

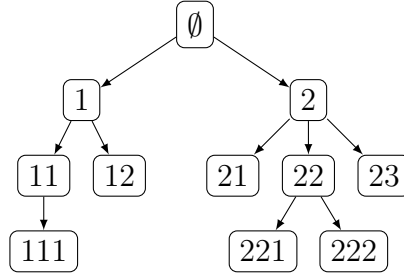


FIGURE 1 – Un exemple d'arbre

On note \mathbb{T} l'ensemble des arbres. Pour $u \in \mathcal{U}$, on pose $\mathbb{T}_u := \{\tau \in \mathbb{T} \mid u \in \tau\}$ l'ensemble des arbres contenant le nœud u . Alors ν_u forme une application de \mathbb{T}_u dans \mathbb{N} et on peut définir l'opérateur de *shift* par u :

$$\theta_u : \begin{array}{ccc} \mathbb{T}_u & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ \tau & \longmapsto & \{v \in \mathbb{T} \mid uv \in \tau\} \end{array}$$

c'est-à-dire comme l'application qui à un arbre contenant u associe le sous-arbre partant de u .

Enfin, on munit \mathbb{T} de la tribu $\mathcal{S} := \sigma(\mathbb{T}_u \mid u \in \mathcal{U})$. Alors, pour $u \in \mathcal{U}$, la tribu induite par \mathcal{S} sur \mathbb{T}_u rend les applications ν_u et θ_u mesurables.

Ces définitions permettent par exemple de définir les arbres de Galton-Watson. Cependant pour construire le mouvement brownien branchant, il faut associer un temps de vie et un mouvement à chaque nœud de l'arbre. On a donc besoin de la notion d'arbre marqué :

Définition 1.2. Un *arbre marqué* ω est un couple formé d'un arbre et d'une famille de marques associées aux nœuds de l'arbre :

$$\omega = (\tau, (\sigma_u, Y_u)_{u \in \tau})$$

avec $\tau \in \mathbb{T}$ et $\forall u \in \tau, (\sigma_u, Y_u) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour $u \in \tau$, σ_u est le *temps de vie* de u et Y_u est le *mouvement* de u .

On note Ω l'ensemble des arbres marqués et $\pi: \Omega \rightarrow \mathbb{T}$ la projection canonique sur l'espace des arbres. Pour $u \in \mathcal{U}$, on pose $\Omega_u := \pi^{-1}(\mathbb{T}_u)$ l'ensemble des arbres marqués contenant u . Alors (σ_u, Y_u) peut être considéré comme une application de Ω_u dans $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et ν_u induit par π une application de Ω_u dans \mathbb{N} . Enfin l'opérateur de shift par u devient :

$$\Theta_u : \begin{array}{ccc} \Omega_u & \longrightarrow & \Omega \\ (\tau, (\sigma_u, Y_u)_{u \in \tau}) & \longmapsto & (\theta_u(\tau), (\sigma_u v, Y_u v)_{v \in \theta_u(\tau)}) \end{array}$$

On munit Ω de la tribu $\mathcal{F} := \sigma(\nu_u, \sigma_u, Y_u(s) \mid u \in \mathcal{U}, s \in [0; \sigma_u])$. Pour $u \in \mathcal{U}$, la tribu induite par \mathcal{F} sur Ω_u rend l'application Θ_u mesurable.

On cherche maintenant à obtenir une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) . Pour cela, on va définir l'instant de naissance d'une particule et sa position à un instant t . Soit $\omega = (\tau, (\sigma_u, Y_u)_{u \in \tau})$ un arbre marqué et $u \in \tau$. L'instant de naissance de u est

$$b_u := \sum_{v < u} \sigma_v,$$

c'est-à-dire la somme du temps de vie de ses ancêtres. Alors la particule u est en vie aux instants $t \in [b_u; b_u + \sigma_u[$. Elle parcourt son mouvement Y_u à partir de son instant de naissance, en partant de la position atteinte par son parent à sa mort. On définit donc la position $X_u(t)$ de u à l'instant $t \in [b_u; b_u + \sigma_u[$ par

$$X_u(t) := X_{p(u)}(b_u) + Y_u(t - b_u),$$

en fixant $X_\emptyset(0) = 0$. b_u et X_u définissent ainsi des applications mesurables sur Ω_u . On note en outre $\mathcal{N}(t) := \{u \in \tau \mid b_u \leq t < b_u + \sigma_u\}$ l'ensemble des particules de ω vivantes à l'instant t .

On peut alors définir \mathcal{F}_t comme la tribu contenant toute l'information disponible jusqu'à l'instant t , c'est-à-dire les positions de toutes les particules en vie avant l'instant t ainsi que le nombre d'enfants et le temps de vie de toutes les particules mortes avant l'instant t :

$$\mathcal{F}_t := \sigma(\nu_u, \sigma_u, (Y_u(s))_{s \leq \sigma_u} \mid u \in \mathcal{U} \text{ tel que } b_u + \sigma_u \leq t) \\ \vee \sigma((Y_u(s))_{s \leq t - b_u} \mid u \in \mathcal{N}(t)).$$

On dispose maintenant du cadre nécessaire à la définition du mouvement brownien branchant comme une mesure de probabilité sur Ω , sous laquelle la projection sur l'espace des arbres suit la loi d'un arbre de Galton-Watson, les temps de vie des particules sont exponentiels et les trajectoires des particules sont des mouvements browniens indépendants. L'existence et l'unicité d'une telle distribution sont garantis par la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soient p une distribution sur \mathbb{N} et $\beta > 0$. Il existe une unique mesure de probabilité \mathbb{P} sur (Ω, \mathcal{F}) telle que :*

- (i) ν_\emptyset suit la loi p , σ_\emptyset suit la loi exponentielle de paramètre β , ν_\emptyset et σ_\emptyset sont indépendants et Y_\emptyset suit la loi d'un mouvement brownien standard,

- (ii) La propriété de branchement est valide : conditionnellement à \mathcal{F}_{σ_0} , les arbres $\Theta_1, \dots, \Theta_{\nu_0}$ sont i.i.d. de loi \mathbb{P} , c'est-à-dire, pour toute suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de fonctions positives mesurables de Ω dans \mathbb{R} ,

$$\mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{\nu_0} f_k \circ \Theta_k \mid \mathcal{F}_{\sigma_0} \right] = \prod_{k=1}^{\nu_0} \mathbb{E} [f_k].$$

L'existence est obtenue par la construction suivante : si on se donne τ un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}}$ une famille de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre β et $(Y_u)_{u \in \mathcal{U}}$ une famille de mouvements browniens standard indépendants, tels que τ , $(\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}}$ et $(Y_u)_{u \in \mathcal{U}}$ soient indépendants, alors l'arbre marqué aléatoire $(\tau, (\sigma_u, Y_u)_{u \in \mathcal{U}})$ a pour loi \mathbb{P} .

Définition 1.4. La mesure de probabilité \mathbb{P} est la loi du *mouvement brownien branchant* de loi de reproduction p et d'intensité β .

Remarque. On prendra dans la suite $\beta = 1$ et on supposera que la distribution p ne charge pas 0 et soit de moyenne 2 et de variance finie :

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k = 2 \text{ et } K := \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) p_k < \infty.$$

Sous ces hypothèses, la probabilité d'extinction de l'arbre de Galton-Watson sous-jacent est nulle.

On ne reviendra que rarement à la structure d'arbre marqué pour manipuler le mouvement brownien branchant, mais on utilisera plutôt les notations suivantes : on note $n(t) := \#\mathcal{N}(t)$ le nombre de particules en vie à l'instant t et $x_1(t), \dots, x_{n(t)}(t)$ les positions de ces particules. On dira alors que $((x_k(t))_{1 \leq k \leq n(t)})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien branchant, même si la structure d'arbre n'est plus explicite. Dans la suite de cette partie, on considère un mouvement brownien branchant $((x_k(t))_{1 \leq k \leq n(t)})_{t \geq 0}$.

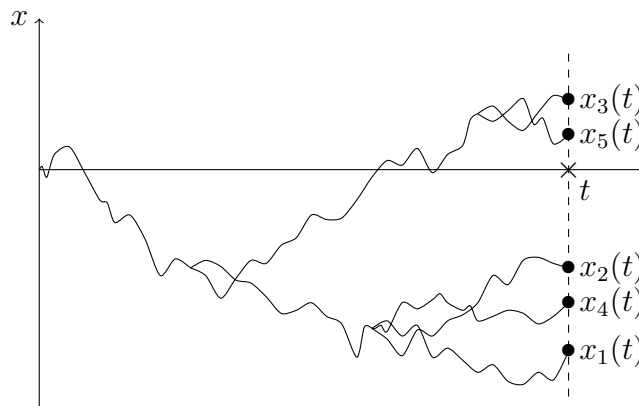


FIGURE 2 – Réalisation d'un mouvement brownien branchant

Pour $k \in \llbracket 1; n(t) \rrbracket$ et $s \leq t$, si u est la particule en $x_k(t)$ à l'instant t , on notera également $x_{k,t}(s)$ la position de l'ancêtre de u en vie à l'instant s . Enfin, pour

$i, j \in \llbracket 1; n(t) \rrbracket$, on note

$$d(x_i(t), x_j(t)) := \begin{cases} \inf \{s \leq t \mid x_{i,t}(s) \neq x_{j,t}(s)\} & \text{si } i \neq j \\ t & \text{sinon} \end{cases},$$

l'instant de séparation des trajectoires $x_{i,t}$ et $x_{j,t}$, c'est-à-dire l'instant de mort du plus proche ancêtre commun des particules en $x_i(t)$ et $x_j(t)$ à l'instant t .

1.2 Lemmes de regroupement

Un outil fondamental pour calculer certaines fonctionnelles du mouvement brownien branchant est le lemme suivant :

Lemme 1.5 (Lemme de regroupement). *Soient $t \geq 0$, $F: \mathcal{C}([0; t], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $(B_s)_{s \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Si F est positive ou si $F((B_s)_{s \in [0; t]})$ est intégrable, alors*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{n(t)} F \left((x_{k,t}(s))_{s \in [0; t]} \right) \right] = e^t \mathbb{E} \left[F \left((B_s)_{s \in [0; t]} \right) \right].$$

Ce résultat s'obtient par un calcul immédiat en conditionnant l'espérance de gauche par $(\tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}})$, c'est-à-dire toute l'information sur l'arbre sous-jacent et les durées de vie des particules (en particulier $n(t)$). Alors tous les termes ont même espérance car chaque branche du mouvement brownien branchant suit un mouvement brownien indépendant de $(\tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}})$. On conclut avec $\mathbb{E}[n(t)] = e^t$.

Remarque. Le lemme de regroupement permet en particulier de construire un certain nombre de martingales à partir du mouvement brownien branchant, appelées les *martingales additives*. En effet, si $h_t: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, on pose

$$H(t) := \sum_{k=1}^{n(t)} h_t(x_k(t)).$$

Alors $(H(t))_{t \geq 0}$ est une (\mathcal{F}_t) -martingale si et seulement si $(e^t h_t(B_t))_{t \geq 0}$ est une (\mathcal{F}_t^B) -martingale, où $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard. Par exemple les processus définis ci-dessous sont des martingales additives :

$$Y(t) := \sum_{k=1}^{n(t)} e^{cx_k(t) - (1 + \frac{c^2}{2})t}, \text{ pour } c \in \mathbb{R}$$

$$Z(t) := \sum_{k=1}^{n(t)} (\sqrt{2t} - x_k(t)) e^{\sqrt{2}x_k(t) - 2t}.$$

Nous utiliserons également la version suivante du lemme de regroupement, reformulée à partir d'un énoncé de Bramson [9, Lemma 10], qui permet de calculer le moment d'ordre 2 des fonctionnelles précédentes, avec en outre une fonctionnelle de l'instant de séparation des deux particules considérées :

Lemme 1.6 (Lemme de regroupement d'ordre 2). *Soient $t \geq 0$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et positive et $F: \mathcal{C}([0; t], \mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et positive. Alors*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n(t)} g(d(x_i(t), x_j(t))) F \left((x_{i,t}(s))_{s \in [0;t]}, (x_{j,t}(s))_{s \in [0;t]} \right) \right] \\ &= K e^t \int_0^t e^{t-s} g(s) \mathbb{E} \left[F \left((B_r^{(1,s)})_{r \in [0;t]}, (B_r^{(2,s)})_{r \in [0;t]} \right) \right] ds, \end{aligned}$$

où $K = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k$ et $B^{(1,s)}$ et $B^{(2,s)}$ sont des mouvements browniens coïncidant jusqu'à l'instant s et indépendants ensuite, c'est-à-dire $B^{(1,s)}$ est un mouvement brownien et $B^{(2,s)}$ est défini par

$$B_r^{(2,s)} = \begin{cases} B_r^{(1,s)} & \text{si } 0 \leq r < s \\ B_s^{(1,s)} + \tilde{B}_{r-s} & \text{si } s \leq r \leq t \end{cases},$$

avec \tilde{B} un mouvement brownien indépendant de $B^{(1,s)}$.

1.3 Représentation de McKean et étude de la particule extrémale

Le mouvement brownien branchant joue un rôle important dans la théorie des équations aux dérivées partielles par son lien avec la famille d'équations F-KPP mis en avant par McKean [20]. L'équation de Fisher [14] ou de Kolmogorov-Petrovsky-Piskunovi [17] (F-KPP) associée à la distribution $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est l'équation d'inconnue $u: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1-u) - \sum_{k=1}^{\infty} p_k (1-u)^k. \quad (1.1)$$

Le mouvement brownien branchant permet d'en construire des solutions :

Lemme 1.7 (Représentation de McKean, 1975). *Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ une fonction mesurable. La fonction u définie par*

$$u(t, x) = 1 - \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} (1 - f(x + x_k(t))) \right]$$

est solution de l'équation F-KPP (1.1) avec condition initiale $u(0, x) = f(x)$.

L'étude du mouvement brownien branchant s'appuie donc à la fois sur des raisonnements probabilistes et des raisonnements analytiques autour de l'équation F-KPP, comme dans le cas de l'étude de la particule extrémale que la représentation de McKean relie directement à l'équation F-KPP :

Remarque. En appliquant le lemme 1.7 à la condition initiale $f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$, on obtient

$$u(t, x) = 1 - \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} \mathbb{1}_{x+x_k(t) \geq 0} \right] = 1 - \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} \mathbb{1}_{x-x_k(t) \geq 0} \right],$$

par symétrie du mouvement brownien branchant, et donc

$$u(t, x) = 1 - \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n(t)} x_k(t) \leq x \right) = \mathbb{P}(M(t) > x),$$

où on note $M(t) := \max_{1 \leq k \leq n(t)} x_k(t)$. La fonction $1 - u(t, \cdot)$ est donc la fonction de répartition de $M(t)$ la position de la particule la plus haute du mouvement brownien branchant à l'instant t .

L'étude du comportement asymptotique de la particule extrême passe donc par l'étude de la convergence des solutions de l'équation F-KPP. Celui-ci a été décrit par Bramson dans les théorèmes A, B et 3 de son livre [8]. Nous citons ici seulement le théorème 3, qui traite le cas d'une condition initiale suffisamment petite en $+\infty$.

Théorème 1.8 (Bramson, 1983). *Soit u une solution de l'équation F-KPP (1.1) dont la condition initiale vérifie les conditions suivantes :*

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq u(0, x) \leq 1,$
- (b) $\int_0^\infty ye^{\sqrt{2}y}u(0, y) dy < \infty,$
- (c) $\exists \eta > 0, M > 0, N > 0 : \forall x \leq -M, \int_x^{x+N} u(0, y) dy > \eta.$

Pour $t \geq 0$, on pose

$$m(t) := \sqrt{2}t - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log(t).$$

Alors

$$u(t, x + m(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1 - w(x) \text{ uniformément en } x$$

où w est l'unique solution à translation près de l'équation

$$\frac{1}{2}w'' + \sqrt{2}w' + \sum_{k=1}^{\infty} p_k w^k - w = 0. \quad (1.2)$$

La condition (b) signifie que la condition initiale tend, en moyenne, vers 0 en $+\infty$ à une vitesse de l'ordre de $\frac{1}{x}e^{-\sqrt{2}x}$ ou plus rapide. La condition (c) signifie que la condition initiale n'est pas trop proche, en moyenne, de 0 en $-\infty$. En particulier, la condition initiale $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^*_-}$ vérifie les conditions (a), (b) et (c) et on en déduit donc le résultat suivant pour la particule extrême :

Corollaire 1.9. *On a la convergence suivante :*

$$M(t) - m(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{loi}} W$$

où W est une v.a. réelle de fonction de répartition w solution de (1.2).

Le théorème suivant, montré par Lalley et Sellke [18], décrit plus précisément le comportement asymptotique de la particule extrême.

Théorème 1.10 (Lalley et Sellke, 1987). *On pose pour $t \geq 0$,*

$$Z(t) := \sum_{k=1}^{n(t)} (\sqrt{2}t - x_k(t)) e^{\sqrt{2}x_k(t) - 2t}.$$

Alors $(Z(t))_{t \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers une limite Z qui est p.s. finie et strictement positive. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M(t+s) - m(t+s) \leq x \mid \mathcal{F}_s) = \exp(-CZ e^{-\sqrt{2}x}).$$

En particulier, la fonction w vérifie

$$w(x) = \mathbb{E} \left[\exp(-CZ e^{-\sqrt{2}x}) \right].$$

La v.a. W est donc un mélange de lois Gumbel translatées par $\frac{1}{\sqrt{2}} \log(CZ)$. La limite Z correspond au décalage aléatoire qui a lieu lors des branchements initiaux et la loi Gumbel correspond aux fluctuations, pour t grand, de la particule extrême autour de la position $m(t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \log(CZ)$.

Arguin, Bovier et Kistler ont obtenu dans [2] une description plus précise du parcours des particules qui se trouvent en position extrême à un instant t . Cette première proposition contrôle la trajectoire de ces particules extrêmes :

Proposition 1.11 (Arguin, Bovier et Kistler, 2011). *Soit $\alpha > 0$. Pour $t \geq 0$, on définit les fonctions $U_{t,\alpha}^+$ et $U_{t,\alpha}^-$, pour $s \in [0; t]$, par*

$$\begin{aligned} U_{t,\alpha}^+(s) &:= \frac{s}{t} m(t) + \min(s^\alpha, (t-s)^\alpha), \\ U_{t,\alpha}^-(s) &:= \frac{s}{t} m(t) - \min(s^\alpha, (t-s)^\alpha). \end{aligned}$$

Alors, pour $0 < \alpha < 1/2$,

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 3r} \mathbb{P} \left(\exists k \leq n(t), \exists s \in [r; t-r] : x_{k,t}(s) \geq U_{t,\alpha}^+(s) \right) = 0 \quad (1.3)$$

et, pour $A > 0$,

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 3r} \mathbb{P} \left(\exists k \leq n(t), \exists s \in [r; t-r] : |x_{k,t}(s) - m(s)| \leq A \right. \\ \left. \text{et } U_{t,\frac{1}{2}-\alpha}^-(s) \leq x_{k,t}(s) \leq U_{t,\frac{1}{2}+\alpha}^-(s) \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

La limite (1.3) concerne toutes les particules présentes à l'instant t et indique que leurs trajectoires ne peuvent pas passer beaucoup plus haut que la courbe $s \mapsto m(t)s/t$ sur le segment $[r; t-r]$. Il s'agit donc d'un contrôle uniforme en temps de la position de la particule la plus haute. En revanche, la limite (1.4) ne concerne que les particules proches de $m(t)$ à l'instant t et signifie que leur trajectoire est comprise dans l'enveloppe formée par $U_{t,\frac{1}{2}-\alpha}^-$ et $U_{t,\frac{1}{2}+\alpha}^-$ sur le segment $[r; t-r]$. En effet, on déduit de (1.3) que les particules proches de $m(t)$ à l'instant t ont suivi essentiellement une excursion brownienne en dessous de $s \mapsto m(t)s/t$.

Les trajectoires des particules extrémales à un instant t ne suivent donc pas la position du maximum du mouvement brownien $s \mapsto m(s)$: par exemple en $t/2$, elles se trouvent environ à $(t/2)^{1/2}$ en dessous du maximum $m(t/2)$. Ce retard de hauteur est compensé par le nombre de particules présentes : il est plus probable que l'une des nombreuses particules présentes vers $m(t/2) - (t/2)^{1/2}$ en $t/2$ arrive à remonter jusqu'à $m(t)$ en t plutôt que l'une des rares particules présentes vers $m(t/2)$ en $t/2$ arrive à monter jusqu'à $m(t)$ en t , même si l'effort à faire est plus fort dans le premier cas que dans le second.

À partir de cette localisation des trajectoires des particules extrémales, Arguin, Bovier et Kistler obtiennent un contrôle sur l'instant de séparation $d(x_i(t), x_j(t))$ des trajectoires de deux particules extrémales $x_i(t)$ et $x_j(t)$:

Proposition 1.12 (Arguin, Bovier et Kistler, 2011). *Pour $A > 0$,*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 3r} \mathbb{P} \left(\exists i, j \leq n(t) : x_i(t), x_j(t) \in [m(t) - A; m(t) + A] \right. \\ \left. \text{et } d(x_i(t), x_j(t)) \in [r; t - r] \right) = 0$$

Les trajectoires de deux particules extrémales à l'instant t se séparent donc à un instant proche soit de 0, soit de t . En effet, pour $s \in [r; t - r]$, si le nombre de particules présentes aux environs de $m(t)s/t - \min(s, t - s)^{1/2}$ à l'instant s compense la probabilité qu'une telle particule atteigne $m(t)$ à l'instant t , la probabilité qu'une particule se scindant à l'instant s admette un descendant extrémal en t dans au moins deux de ses sous-arbres fils est faible.

Ces deux résultats concernant les particules extrémales s'inscrivent dans une volonté de mieux comprendre l'ensemble du mouvement brownien branchant près de son maximum et plus précisément d'étudier la convergence du processus extrémal, c'est-à-dire le processus ponctuel de toutes les particules à l'instant t vues à partir de la position $m(t)$. Cette convergence a été établie simultanément par Arguin, Bovier et Kistler [4] et par Aïdékon, Berestycki, Brunet et Shi [1] en 2012. Avant de citer leur résultat, nous rappelons dans la sous-partie suivante quelques notions sur l'étude de la convergence de processus ponctuels.

1.4 Convergence en loi de mesures aléatoires

Dans cette partie, en suivant la présentation de Resnick [22], nous rappelons la définition de la topologie vague sur l'espace des mesures de Radon positives et les propriétés élémentaires pour la tension des suites de mesures aléatoires et la transformée de Laplace des mesures aléatoires, qui nous seront utiles pour la suite.

On considère (E, ρ) un espace polonais muni de \mathcal{E} sa tribu borélienne. On note $M_+(E)$ l'ensemble des mesures de Radon positives sur E , $\mathcal{C}_c(E)$ l'ensemble des fonctions continues sur E à support compact et $\mathcal{C}_c^+(E)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}_c(E)$ positives. Pour $\mu \in M_+(E)$ et $f \in \mathcal{C}_c(E)$, on note $\mu(f) := \int_E f d\mu$ (on identifie ici isométriquement $M_+(E)$ aux formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c(E)$). On munit l'ensemble $M_+(E)$ de la tribu $\mathcal{M}_+(E)$ définie comme la tribu engendrée par les applications $\mu \mapsto \mu(f)$ pour $f \in \mathcal{C}_c^+(E)$. Une *mesure aléatoire* sur E est une v.a. à valeurs dans $M_+(E)$.

Les lois fini-dimensionnelles d'une mesure aléatoire ξ sur E sont les lois des k -uplets $(\xi(A_1), \dots, \xi(A_k))$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$. Elles caractérisent la loi de ξ d'après la proposition suivante :

Proposition 1.13. *Soient ξ et ξ' des mesures aléatoires sur E . Soit \mathcal{C} un ensemble de parties relativement compactes de E , stable par intersections finies, vérifiant $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{E}$ et tel qu'il existe une suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Alors ξ et ξ' ont même loi si et seulement si pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $C_1, \dots, C_k \in \mathcal{C}$, $(\xi(C_1), \dots, \xi(C_k))$ et $(\xi'(C_1), \dots, \xi'(C_k))$ ont même loi sur \mathbb{R}_+^k .*

Pour définir une notion de convergence en loi pour les suites de mesures aléatoires, il faut munir $M_+(E)$ d'une topologie. On définit la *topologie vague* sur $M_+(E)$ comme la plus petite topologie rendant les applications $\mu \mapsto \mu(f)$ continues pour tout $f \in \mathcal{C}_c^+(E)$ (cela correspond à la topologie faible \star si l'on identifie $M_+(E)$ aux formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c(E)$). Alors $\mathcal{M}_+(E)$ est la tribu borélienne de $M_+(E)$ pour la topologie vague.

Une *mesure ponctuelle* sur E est une mesure de Radon sur E à valeurs dans \mathbb{N} . On note $M_p(E)$ l'ensemble des mesures ponctuelles sur E . Alors $M_p(E)$ est fermé dans $M_+(E)$ pour la topologie vague. Ainsi la limite d'une suite de mesures ponctuelles pour la topologie vague est toujours une mesure ponctuelle. On munit $M_p(E)$ de la tribu $\mathcal{M}_p(E)$ induite par $\mathcal{M}_+(E)$. Un *processus ponctuel* sur E est une v.a. à valeurs dans $M_p(E)$.

La topologie vague sur $M_+(E)$ est métrisable en un espace polonais. On se trouve donc dans le cadre de la théorie de Billingsley [5] et on peut appliquer le théorème de Prokhorov (caractérisation de la relative compacité par la tension) pour étudier la convergence en loi d'une suite de mesures aléatoires. La proposition suivante caractérise la tension des familles de mesures aléatoires :

Proposition 1.14. *Soit $(\xi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de mesures aléatoires sur E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $(\xi_\alpha)_{\alpha \in A}$ est tendue,
- (ii) pour tout $f \in \mathcal{C}_c^+(E)$, $(\xi_\alpha(f))_{\alpha \in A}$ est tendue,
- (iii) pour tout $K \subset E$ compact, $(\xi_\alpha(K))_{\alpha \in A}$ est tendue.

L'outil fondamental qui sera utilisé dans la suite pour étudier la convergence en loi des suites de mesures aléatoires (qui seront des processus ponctuels) est la transformée de Laplace.

Définition 1.15. Soit ξ une mesure aléatoire sur E . Sa *transformée de Laplace* est l'application Ψ_ξ définie sur $\mathcal{C}_c^+(E)$ par

$$\Psi_\xi(f) := \mathbb{E}[\exp(-\xi(f))].$$

La transformée de Laplace permet d'obtenir une caractérisation pour la convergence en loi des suites de mesures aléatoires :

Proposition 1.16. *Soit ξ, ξ_1, ξ_2, \dots des mesures aléatoires sur E . Alors $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers ξ si et seulement si pour tout $f \in \mathcal{C}_c^+(E)$, $\Psi_{\xi_n}(f) \rightarrow \Psi_\xi(f)$.*

Nous utiliserons donc la transformée de Laplace dans la suite pour montrer la convergence en loi de différentes suites de processus ponctuels. Cependant, si l'on montre que la suite des transformées de Laplace Ψ_{ξ_n} converge simplement vers $\Psi: \mathcal{C}_c^+(E) \rightarrow \mathbb{R}$, sans savoir si Ψ est la transformée de Laplace d'une mesure aléatoire, alors on ne peut pas utiliser directement la proposition 1.16, mais on peut tout de même en conclure que la suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a au plus une valeur d'adhérence (au sens de la métrique de Prokhorov). Si l'on montre en outre la tension de $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (par exemple à l'aide de la proposition 1.14), alors par le théorème de Prokhorov, il existe au moins une valeur d'adhérence. La suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc en loi et Ψ est la transformée de Laplace de sa limite.

1.5 Convergence du processus extrémal

Le *processus extrémal* est le processus ponctuel défini par

$$\mathcal{E}_t := \sum_{k=1}^{n(t)} \delta_{x_k(t) - m(t)},$$

c'est-à-dire le processus ponctuel des particules présentes à l'instant t vues depuis $m(t)$. La convergence en loi de ce processus vers une limite explicite a été obtenue en même temps par Arguin, Bovier et Kistler [4] et par Aïdékon, Berestycki, Brunet et Shi [1], mais avec deux descriptions différentes de la limite. Nous allons citer ici les deux résultats.

1.5.1 Résultats d'Arguin, Bovier et Hartung

Commençons par l'article d'Arguin, Bovier et Kistler [4], qui utilise surtout des raisonnements analytiques, très proches de ceux que nous utiliserons ensuite dans la partie 2. Nous avons tout d'abord besoin d'un résultat annexe de convergence du processus ponctuel des particules présentes à l'instant t vues depuis la plus haute $M(t)$, conditionné à l'existence de trajectoires exceptionnellement hautes :

Proposition 1.17 (Arguin, Bovier et Kistler, 2012). *On considère le processus ponctuel*

$$\mathcal{D}_t := \sum_{k=1}^{n(t)} \delta_{x_k(t) - M(t)}.$$

Conditionnellement à $\{M(t) \geq \sqrt{2}t\}$, le processus ponctuel \mathcal{D}_t converge en loi quand t tend vers l'infini. On note \mathcal{D} sa limite.

Par le corollaire 1.9, on sait que $\mathbb{P}(M(t) \geq \sqrt{2}t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini car $\sqrt{2}t - m(t) \rightarrow \infty$. On conditionne donc par un événement très rare : certaines particules sont exceptionnellement hautes. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de l'article [4].

Théorème 1.18 (Arguin, Bovier et Kistler, 2012). *Le processus extrémal \mathcal{E}_t converge en loi quand t tend vers $+\infty$ vers un processus ponctuel \mathcal{E} .*

Soit η un mélange de processus ponctuels de Poisson d'intensité $\sqrt{2}CZe^{-\sqrt{2}x} dx$ conditionnellement à Z (où C et Z sont définis dans le théorème 1.10). On note

$(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$, les atomes de η . Soit $(\Delta^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de processus ponctuels de même loi que \mathcal{D} . Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $(\Delta_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}}$, les atomes de $\Delta^{(i)}$. Alors on a l'identité

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \delta_{\eta_i + \Delta_j^{(i)}}. \quad (1.5)$$

Le mélange de processus ponctuels de Poisson η est égal à un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} dx$ indépendant de Z décalé ensuite de $\frac{1}{\sqrt{2}} \log(CZ)$. Ce terme de centrage correspond au décalage aléatoire qui a lieu lors des branchements initiaux comme on l'a vu dans le théorème 1.10.

L'apparition d'un processus ponctuels de Poisson décoré n'est pas une surprise : en effet, par propriété de branchement, le processus limite vérifie une propriété de superposabilité et Maillard [19] a montré que cette propriété est vérifiée seulement par les processus ponctuels de Poisson d'intensité $e^{-\sqrt{2}x} dx$ décorés.

Arguin, Bovier et Kistler démontrent le théorème 1.18 en quatre étapes. Tout d'abord ils montrent la convergence en loi de \mathcal{E}_t vers une limite \mathcal{E} inconnue. Pour cela, ils utilisent la tension de $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ (cf [2, Proposition 2.7]) et montrent la convergence simple des transformées de Laplace. L'étude de la transformée de Laplace de \mathcal{E}_t se ramène à l'étude des solutions de l'équation F-KPP car, pour $f \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$,

$$\Psi_{\mathcal{E}_t}(f) = \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} e^{-f(x_k(t) - m(t))} \right] = 1 - v(t, m(t)),$$

où v est la solution de l'équation F-KPP (1.1) avec condition initiale $v(0, x) = 1 - e^{-f(-x)}$, par le lemme 1.7. Cependant la convergence ne peut être assurée par le théorème 1.8 car la condition initiale $v(0, \cdot)$ ne vérifie pas la condition (c), on considère donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\exp(-\mathcal{E}_t(f)) \mathbb{1}_{\max \mathcal{E}_t \leq \delta}] &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{n(t)} \left(e^{-f(x_k(t) - m(t))} \mathbb{1}_{x_k(t) - m(t) \leq \delta} \right) \right] \\ &= 1 - v_\delta(t, m(t)), \end{aligned} \quad (1.6)$$

où v_δ est la solution de l'équation F-KPP (1.1) avec condition initiale $v_\delta(0, x) = 1 - e^{-f(-x)} \mathbb{1}_{-x \leq \delta}$. Alors $v_\delta(0, \cdot)$ vérifie les conditions (a), (b) et (c) donc, par le théorème 1.8, $v_\delta(t, m(t))$ converge quand t tend vers l'infini. On en déduit la convergence de $\Psi_{\mathcal{E}_t}(f)$.

La deuxième étape consiste à montrer la proposition 1.17. Pour cela, on étudie la convergence du processus ponctuel

$$\tilde{\mathcal{E}}_t := \sum_{k=1}^{n(t)} \delta_{x_k(t) - \sqrt{2}t},$$

conditionné par $\{M(t) \geq \sqrt{2}t\}$, on utilise la transformée de Laplace et, par un calcul similaire à (1.6), on est amené à étudier $v_\delta(t, \sqrt{2}t)$. Arguin, Bovier et Kistler utilisent alors un résultat d'encadrement pour les solutions de l'équation F-KPP translatées par $-\sqrt{2}t$, établi précédemment par Chauvin et Rouault [11] à partir d'un résultat de Bramson [8, Proposition 8.3] :

Proposition 1.19. *Soit u une solution de l'équation F-KPP (1.1) avec une condition initiale vérifiant les conditions (a), (b) et (c). Pour $t > r \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit*

$$\psi(r, t, x) := \frac{e^{2t - \sqrt{2}x}}{\sqrt{2\pi(t-r)}} \int_0^\infty u(r, y + \sqrt{2}r) e^{\sqrt{2}y} e^{-\frac{(y-x+\sqrt{2}t)^2}{2(t-r)}} \left(1 - e^{-2y \frac{x-m(t)}{t-r}}\right) dy.$$

Alors pour r assez grand, pour tous $t \geq 8r$ et $x \geq 8r - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t$,

$$\frac{1}{\gamma(r)} \psi(r, t, x + \sqrt{2}t) \leq u(t, x + \sqrt{2}t) \leq \gamma(r) \psi(r, t, x + \sqrt{2}t), \quad (1.7)$$

où $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction décroissante vérifiant $\gamma(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1$.

La fonction ψ permet de contrôler le comportement des solutions de l'équation F-KPP translatées par $-\sqrt{2}t$ pour t grand : une fois r grand fixé, la condition sur x pour que l'encadrement (1.7) soit vrai est de plus en plus faible quand t grandit. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut obtenir un équivalent de $u(t, x + \sqrt{2}t)$ quand t tend vers l'infini qui permet de montrer la convergence de $\tilde{\mathcal{E}}_t$ conditionnellement à $\{M(t) \geq \sqrt{2}t\}$ et on en déduit la proposition 1.17. La proposition 1.19 nous sera également très utile dans la partie 2 pour effectuer des raisonnements analogues à ceux d'Arguin, Bovier et Kistler.

La troisième étape est l'identification de la loi de \mathcal{E} avec la loi limite d'un processus ponctuel auxiliaire défini sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$, sur lequel on se munit d'un processus ponctuel de Poisson \mathcal{P} sur \mathbb{R}_- d'intensité

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} (-x) e^{-\sqrt{2}x} dx,$$

dont on note $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ les atomes et, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, de mouvements browniens branchants indépendants $((x_k^{(i)}(t))_{1 \leq k \leq n^{(i)}(t)})_{t \geq 0}$. Alors on définit le processus ponctuel auxiliaire par

$$\Pi_t := \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n^{(i)}(t)} \delta_{\frac{1}{\sqrt{2}} \log Z + p_i + x_k^{(i)}(t) - \sqrt{2}t}.$$

Il n'est pas évident que ce processus admet une limite en loi car, pour i et k fixés, $x_k^{(i)}(t) - \sqrt{2}t$ tend vers $-\infty$ quand t tend vers l'infini. Cependant, la densité de \mathcal{P} croît plus vite qu'une exponentielle quand x tend vers $-\infty$, donc il y a suffisamment de mouvements browniens branchants lancés pour que certains aient une particule extrême exceptionnellement haute. En passant par la transformée de Laplace, on montre que Π_t converge en loi quand t tend vers l'infini vers un processus ponctuel Π qui a même loi que \mathcal{E} .

Enfin, la dernière étape consiste à montrer l'identité (1.5) en passant par le processus auxiliaire. On montre pour cela que les particules de \mathcal{P} qui contribuent aux particules les plus hautes de Π_t sont avec forte probabilité celles de l'ordre de $-\sqrt{t}$. Il faut donc que les mouvements browniens branchants lancés à partir de ses

particules aient un maximum plus grand que $\sqrt{2t} + a\sqrt{t}$. On montre donc que, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, le processus ponctuel

$$\sum_{k=1}^{n(t)} \delta_{x_k(t) - \sqrt{2t} - a\sqrt{t} - b},$$

conditionné par $\{M(t) \geq \sqrt{2t} + a\sqrt{t} + b\}$, converge en loi, quand t tend vers $-\infty$, vers la même limite que $\tilde{\mathcal{E}}_t$. On en déduit l'identité (1.5).

La méthode utilisée dans la partie 2 pour montrer la convergence en loi du processus extrémal du mouvement brownien branchant à deux vitesses sera analogue à celle d'Arguin, Bovier et Kistler présentée ici.

1.5.2 Résultats d'Aïdekon, Berestycki, Brunet et Shi

Aïdekon, Berestycki, Brunet et Shi utilisent dans leur article [1] des raisonnements plus probabilistes. Ils se placent dans le cas d'un arbre binaire : chaque particule a deux enfants, c'est-à-dire $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} = \delta_2$. Ils considèrent le processus ponctuel :

$$\mathcal{E}_t^Z := \sum_{k=1}^{n(t)} \delta_{x_k(t) - m(t) - \frac{1}{\sqrt{2}} \log(CZ)},$$

qui correspond au processus extrémal auquel on soustrait le décalage aléatoire $\frac{1}{\sqrt{2}} \log(CZ)$ dû au branchement initiaux, et ils montrent la convergence en loi du couple $(\mathcal{E}_t^Z, Z(t))$. Le résultat de convergence est donc légèrement plus fort que celui d'Arguin, Bovier et Kistler (théorème 1.18) et Aïdekon, Berestycki, Brunet et Shi montrent également une description de la limite différente.

Avant de pouvoir citer les résultats d'Aïdekon, Berestycki, Brunet et Shi, introduisons quelques notations. Notons $s \mapsto M_t(s)$ la trajectoire de la particule qui est la plus haute à l'instant t . On définit, pour $s \in [0; t]$,

$$Y_t(s) := M_t(s) - M(t),$$

le renversement de cette trajectoire. Pour tout $\zeta \in [0; t]$, on définit

$$\mathcal{Q}(t, \zeta) := \sum_{\substack{k=1 \\ d(M(t), x_k(t)) > t - \zeta}}^{n(t)} \delta_{x_k(t) - M(t)},$$

où $d(M(t), x_k(t))$ est l'instant où les trajectoires de $M(t)$ et $x_k(t)$ se sont séparées. $\mathcal{Q}(t, \zeta)$ est donc le processus ponctuel des particules à l'instant t qui se sont séparées de $s \mapsto M_t(s)$ après l'instant $t - \zeta$, en incluant $M(t)$.

Aïdekon, Berestycki, Brunet et Shi montrent la convergence en loi du triplet $(Y_t, \mathcal{Q}(t, \zeta), M(t) - m(t))$ lorsque t puis ζ tendent vers $+\infty$. Pour décrire la limite, définissons les processus $(\Gamma_t^{(b)})_{t \geq 0}$ pour $b > 0$. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et $(R_t)_{t \geq 0}$ un processus de Bessel de dimension 3 indépendant. On note T_b le temps d'atteinte de b pour le mouvement brownien B . On définit le processus $\Gamma^{(b)}$ par

$$\Gamma_t^{(b)} := \begin{cases} B_t & \text{si } t \in [0; T_b] \\ b - R_{t - T_b} & \text{si } t > T_b \end{cases},$$

c'est donc un processus continu de maximum b et qui tend vers $-\infty$ à une vitesse de l'ordre de $-\sqrt{t}$ quand t tend vers l'infini (par propriété du Bessel). On peut alors définir la loi de Y : pour $b > 0$ et A un borélien de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on pose

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(Y \in A \text{ et } \sup_{t \geq 0} (Y(t) + \sqrt{2t}) \in db \right) \\ & := \frac{1}{c_1} \mathbb{E} \left[e^{-2 \int_0^\infty \mathbb{P}(M(s) \leq \Gamma_s^{(b)} - \sqrt{2s}) ds} \mathbb{1}_{(\Gamma_t^{(b)} - \sqrt{2t})_{t \geq 0} \in A} \right] db, \end{aligned}$$

où

$$c_1 := \int_0^\infty \mathbb{E} \left[e^{-2 \int_0^\infty \mathbb{P}(M(s) \leq \Gamma_s^{(b)} - \sqrt{2s}) ds} \right] db.$$

En particulier, $\sup_{t \geq 0} (Y(t) + \sqrt{2t})$ est une v.a. positive à densité. Il semble alors naturel que Y_t converge en loi vers Y . En effet, d'après la proposition 1.11, Y_t est proche de $s \mapsto -m(t)s/t - s^{1/2}$ sur $[r; t/2]$, c'est-à-dire proche de $s \mapsto -\sqrt{2}s - s^{1/2}$. Or, sachant que $\sup_{s \geq 0} (Y(s) + \sqrt{2s}) = b$, Y a la même loi que $(\Gamma_s^{(b)} - \sqrt{2s})_{s \geq 0}$ donc se trouve proche $s \mapsto -\sqrt{2}s - s^{1/2}$ de pour s suffisamment grand.

Définissons maintenant le processus ponctuel limite \mathcal{Q} . Pour cela, considérons un processus ponctuel π tel que, conditionnellement à Y , π suive la loi d'un processus ponctuel de Poisson sur \mathbb{R}_+ d'intensité $2\mathbb{P}(M(t) < -Y(t)) dt$. On se donne également pour tout $t \geq 0$, des mouvements browniens branchants indépendants $((x_k^{(t)}(s))_{1 \leq k \leq n^{(t)}(s)})_{s \geq 0}$ conditionnés par $\max_{1 \leq k \leq n^{(t)}(s)} x_k^{(t)}(s) < -Y(t)$. On définit alors

$$\mathcal{Q} := \delta_0 + \sum_{t \in \pi} \sum_{k=1}^{n^{(t)}(t)} \delta_{x_k^{(t)}(t) + Y(t)}.$$

Voici une description heuristique de \mathcal{Q} . Le processus Y correspond à la trajectoire de la particule la plus haute vue à l'envers : en l'instant 0, $Y(0) = 0$ est cette particule. En parcourant Y , on remonte l'histoire de cette particule et il y a des branchements aux instants chargés par π . En un instant t de branchement, naît un mouvement brownien branchant qui évolue alors dans le vrai sens du temps : il se retrouve donc à l'instant 0 au bout d'un temps t . Comme 0 est la particule la plus haute à l'instant 0, et que ce mouvement brownien branchant démarre à la position $Y(t)$, on conditionne son maximum à ne pas dépasser $-Y(t)$. Le processus ponctuel \mathcal{Q} regroupe toutes les particules obtenus à l'instant 0 à partir de ces mouvements browniens branchants, auxquelles on rajoute la particule $Y(0) = 0$.

Aïdekon, Berestycki, Brunet et Shi établissent le résultat suivant :

Théorème 1.20. *On a la convergence en loi*

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} (Y_t, \mathcal{Q}(t, \zeta), M(t) - m(t)) = (Y, \mathcal{Q}, W),$$

où (Y, \mathcal{Q}) et W sont indépendants.

On peut alors énoncer le théorème principal de l'article :

Théorème 1.21. *Le couple $(\mathcal{E}_t^Z, Z(t))$ converge en loi quand t tend vers $+\infty$ vers le couple (\mathcal{E}^Z, Z) où \mathcal{E}^Z est un processus ponctuel indépendant de Z .*

Soit $\tilde{\eta}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}x} dx$. On note $(\tilde{\eta}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, les atomes de $\tilde{\eta}$. Soit $(\tilde{\Delta}^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de processus ponctuels de même loi que \mathcal{Q} . Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $(\tilde{\Delta}_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}}$, les atomes de $\tilde{\Delta}^{(i)}$. Alors on a l'identité

$$\mathcal{E}^Z \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \delta_{\tilde{\eta}_i + \tilde{\Delta}_j^{(i)}}.$$

En particulier, on en déduit la convergence en loi du processus extrémal \mathcal{E}_t vers

$$\sum_{i,j \in \mathbb{N}} \delta_{\eta_i + \tilde{\Delta}_j^{(i)}},$$

où η est le mélange de processus ponctuels de Poisson défini dans le théorème 1.18. On obtient également l'égalité en loi des deux décorations :

$$\mathcal{D} \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{Q}.$$

2 Le mouvement brownien branchant à deux vitesses dans le cas sous-critique

Nous présentons dans cette partie les résultats obtenus par Bovier et Hartung [6] sur le mouvement brownien branchant à deux vitesses dans le cas sous-critique, dans un cadre légèrement plus large, où les deux variances peuvent dépendre de l'horizon t mais convergent quand t tend vers l'infini. Ce cadre est celui que nous utiliserons dans la partie 3 pour traiter le cas général du mouvement brownien branchant à vitesse variable dans le cas sous-critique.

2.1 Présentation du modèle et des résultats

Définissons tout d'abord le mouvement brownien branchant à vitesse variable d'une manière très générale, à l'aide du formalisme des arbres marqués. On fixe $t > 0$ un horizon fini. On considère une fonction $\Sigma_t^2: [0; t] \rightarrow [0; t]$ croissante, continue à droite et telle que $\Sigma_t^2(0) = 0$ et $\Sigma_t^2(t) = t$. On se donne τ un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $(\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}}$ une famille de v.a. indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1 et $(B^u)_{u \in \mathcal{U}}$ une famille de mouvements browniens standard indépendants, tels que τ , $(\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}}$ et $(B^u)_{u \in \mathcal{U}}$ soient indépendants. Pour $u \in \mathcal{U}$, on choisit alors pour le mouvement de u le processus défini par

$$Y_u(s) := \begin{cases} B_{\Sigma_t^2(b_u+s)}^u - B_{\Sigma_t^2(b_u)}^u & \text{si } b_u + s \leq t \\ B_t^u - B_{\Sigma_t^2(b_u)}^u & \text{si } b_u \leq t \text{ et } b_u + s > t \\ 0 & \text{si } b_u > t \end{cases},$$

pour $s \geq 0$, où b_u est l'instant de naissance de u . Y_u est défini de telle manière que les particules ne bougent plus à partir de l'instant t . On dit alors que l'arbre marqué aléatoire $(\tau, (\sigma_u, Y_u)_{u \in \mathcal{U}})$ est un *mouvement brownien branchant à horizon fini t et de fonction vitesse Σ_t^2* . On remarque que, contrairement au cas standard, les Y_u ne sont ici pas indépendants de τ et des σ_u . On remarque également que les trajectoires

des particules ne sont plus forcément continues, mais seulement càdlàg (continues à droite et admettent une limite à gauche en tout point). On notera dans la suite $\mathcal{D}([0; t], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions càdlàg sur $[0; t]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Comme dans le cas standard mais en rajoutant une dépendance en l'horizon t , on note, pour $0 \leq s \leq t$, $n^t(s)$ le nombre de particules en vie à l'instant s et $x_1^t(s), \dots, x_{n^t(s)}^t(s)$ les positions de ces particules. Pour $i, j \in \llbracket 1; n^t(s) \rrbracket$, on note $(x_{i,s}^t(r))_{0 \leq r \leq s}$ la trajectoire de la particule en $x_i^t(s)$ à l'instant s et $d(x_i^t(s), x_j^t(s))$ l'instant de séparation des trajectoires $x_{i,s}^t$ et $x_{j,s}^t$, c'est-à-dire l'instant de mort du plus proche ancêtre commun des particules en $x_i^t(s)$ et $x_j^t(s)$ à l'instant s . Alors la trajectoire $x_{i,s}^t$ a même loi que $(B_{\Sigma_t^2(r)})_{0 \leq r \leq s}$, où B est un mouvement brownien standard, et elle est indépendante de $(\tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}})$, bien que les Y_u ne le soient pas. On a également :

$$\mathbb{E} \left[x_i^t(s) x_j^t(s) \mid \tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}} \right] = \Sigma_t^2(d(x_i^t(s), x_j^t(s))).$$

Comme conséquence immédiate de cette construction, on a donc les deux lemmes de regroupement suivants, qui sont les analogues de ceux présentés dans le cas standard en sous-partie 1.2. Le premier s'applique aux sommes sur les particules d'une fonctionnelle des trajectoires :

Lemme 2.1 (Lemme de regroupement). *Soient $F: \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et $(B_s)_{s \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Si F est positive ou si $F((B_{\Sigma_t^2(s)})_{s \in [0; t]})$ est intégrable, alors*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{n^t(t)} F \left((x_{k,t}^t(s))_{s \in [0; t]} \right) \right] = e^t \mathbb{E} \left[F \left((B_{\Sigma_t^2(s)})_{s \in [0; t]} \right) \right].$$

Le second s'utilise pour les sommes sur deux particules, avec en outre une fonctionnelle de l'instant de séparation des trajectoires de ces deux particules :

Lemme 2.2 (Lemme de regroupement d'ordre 2). *Soit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et positive et $F: \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et positive. Alors*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} g \left(d(x_i^t(t), x_j^t(t)) \right) F \left((x_{i,t}^t(s))_{s \in [0; t]}, (x_{j,t}^t(s))_{s \in [0; t]} \right) \right] \\ &= K e^t \int_0^t e^{t-s} g(s) \mathbb{E} \left[F \left((B_{\Sigma_t^2(r)}^{(1,s)})_{r \in [0; t]}, (B_{\Sigma_t^2(r)}^{(2,s)})_{r \in [0; t]} \right) \right] ds, \end{aligned}$$

où $K = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)p_k$ et $B^{(1,s)}$ et $B^{(2,s)}$ sont des mouvements browniens coïncidant jusqu'à l'instant $\Sigma_t^2(s)$ et indépendants ensuite, c'est-à-dire $B^{(1,s)}$ est un mouvement brownien et $B^{(2,s)}$ est défini par

$$B_r^{(2,s)} = \begin{cases} B_r^{(1,s)} & \text{si } 0 \leq r < \Sigma_t^2(s) \\ B_s^{(1,s)} + \tilde{B}_{r-s} & \text{si } \Sigma_t^2(s) \leq r \leq t \end{cases},$$

avec \tilde{B} un mouvement brownien indépendant de $B^{(1,s)}$.

Nous utiliserons ces deux lemmes régulièrement dans la suite, ainsi que leurs versions dans le cas standard.

On s'intéresse au comportement du mouvement brownien branchant à vitesse variable pour certaines fonctions vitesse Σ_t^2 quand l'horizon t tend vers l'infini. Mais ici, on ne considère plus un seul processus stochastique $((x_k(s))_{1 \leq k \leq n(s)})_{s \geq 0}$, mais la famille des processus $((x_k^t(s))_{1 \leq k \leq n^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$ d'horizons finis pour tous les $t > 0$. On note

$$M(t) := \max_{1 \leq k \leq n^t(t)} x_k^t(t)$$

la position de la particule extrême à l'instant t du mouvement brownien branchant d'horizon fini t de fonction vitesse Σ_t^2 et

$$\mathcal{E}_t := \sum_{k=1}^{n^t(t)} \delta_{x_k^t(t) - \tilde{m}(t)}$$

son processus extrême à l'instant t , où la fonction $t \mapsto \tilde{m}(t)$ sera précisée plus tard. On cherche à obtenir des résultats analogues à ceux présentés en partie 1 : pour $\tilde{m}(t)$ bien choisie, on veut montrer les convergences en loi de $M(t) - \tilde{m}(t)$ et de \mathcal{E}_t quand t tend vers $+\infty$ et décrire leurs limites respectives.

Nous allons maintenant définir le cadre de cette partie, c'est-à-dire les fonctions vitesse Σ_t^2 que nous allons considérer. Le *mouvement brownien branchant à deux vitesses* correspond au cas où, pour tout $t > 0$,

$$\Sigma_t^2(s) := \begin{cases} \sigma_1^2 s & \text{si } 0 \leq s \leq bt \\ \sigma_1^2 bt + \sigma_2^2 (s - bt) & \text{si } bt \leq s \leq t \end{cases},$$

où $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$ et $0 < b < 1$ vérifient l'identité

$$\sigma_1^2 b + \sigma_2^2 (1 - b) = 1, \quad (2.1)$$

ce qui garantit que $\Sigma_t^2(t) = t$. La fonction Σ_t^2 est donc affine en deux morceaux de pentes σ_1^2 et σ_2^2 . Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, alors on retrouve le cas du mouvement brownien branchant standard. Sinon, d'après l'identité (2.1), on a soit $\sigma_1 < 1 < \sigma_2$, soit $\sigma_1 > 1 > \sigma_2$. Le cas *sous-critique* correspond au cas où la fonction vitesse reste strictement en-dessous de l'identité sur $]0; t[$, c'est-à-dire au cas

$$\sigma_1 < 1 < \sigma_2.$$

Ceci correspond au cas étudié par Bovier et Hartung dans [6], cependant pour la partie 3, nous allons avoir besoin de nous placer ici dans un cas plus général où les pentes de Σ_t^2 peuvent dépendre de t , mais convergent quand t tend vers $+\infty$. On considère donc, pour tout $t > 0$, $\sigma_{1,t} < 1 < \sigma_{2,t}$ et on définit b_t par

$$\sigma_{1,t}^2 b_t + \sigma_{2,t}^2 (1 - b_t) = 1. \quad (2.2)$$

On prend alors la fonction vitesse définie par l'identité

$$\Sigma_t^2(s) := \begin{cases} \sigma_{1,t}^2 s & \text{si } 0 \leq s \leq b_t t \\ \sigma_{1,t}^2 b_t t + \sigma_{2,t}^2 (s - b_t t) & \text{si } b_t t \leq s \leq t \end{cases}. \quad (2.3)$$

Pour décrire la limite du processus extrême, énonçons le résultat suivant qui sera montré dans la sous-partie 2.8 :

Proposition 2.3. *On considère le processus ponctuel*

$$\mathcal{L}_t := \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} \delta_{\bar{x}_k(t) - \bar{M}(t)},$$

où $((\bar{x}_k(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien branchant standard et $\bar{M}(t) := \max_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)} \bar{x}_k(t)$. Alors, conditionnellement à $\{\bar{M}(t) \geq \sqrt{2}\sigma_2 t\}$, le processus ponctuel \mathcal{L}_t converge en loi quand t tend vers $+\infty$. On note \mathcal{L} sa limite.

C'est l'analogie de la proposition 1.17, mais avec le conditionnement $\{\bar{M}(t) \geq \sqrt{2}\sigma_2 t\}$ au lieu de $\{\bar{M}(t) \geq \sqrt{2}t\}$, c'est-à-dire qu'on demande au mouvement brownien branchant d'effectuer des trajectoires encore plus exceptionnellement hautes.

Enfin, soit $((\bar{x}_k(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)})_{t \geq 0}$ un mouvement brownien branchant standard, on définit, pour $t \geq 0$,

$$Y(t) := \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-t(1+\sigma_1^2) + \sqrt{2}\sigma_1 \bar{x}_k(t)},$$

qui est une (\mathcal{F}_t) -martingale d'après la sous-partie 1.2. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie :

Théorème 2.4 (Bovier et Hartung, 2014). *Soient $\sigma_1 < 1 < \sigma_2$. On considère les mouvements browniens branchants de fonctions vitesse définies par (2.3) pour $t > 0$. Supposons que $\sigma_{1,t} \rightarrow \sigma_1$ et $\sigma_{2,t} \rightarrow \sigma_2$ quand $t \rightarrow +\infty$.*

(i) *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left[\exp \left(-\tilde{C} Y e^{-\sqrt{2}x} \right) \right], \quad (2.4)$$

où $\tilde{m}(t) = \sqrt{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t$, \tilde{C} est une constante ne dépendant que de σ_2 et Y est la limite p.s. de la martingale $(Y_t)_{t \geq 0}$.

(ii) *Le processus extrémal \mathcal{E}_t converge en loi quand t tend vers $+\infty$ vers un processus ponctuel \mathcal{E} . Soit η un mélange de processus ponctuels de Poisson d'intensité $\sqrt{2}\tilde{C}Y e^{-\sqrt{2}x} dx$ conditionnellement à Y . On note $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$, les atomes de η . Soit $(\Lambda^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de processus ponctuels de même loi que \mathcal{L} . Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $(\Lambda_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}}$, les atomes de $\Lambda^{(i)}$. Alors on a l'identité*

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \delta_{\eta_i + \sigma_2 \Lambda_j^{(i)}}. \quad (2.5)$$

On remarque que $\tilde{m}(t)$ a le même terme linéaire que $m(t)$ mais le facteur devant le deuxième terme en $\log t$ est différent et $\tilde{m}(t) - m(t) \rightarrow \infty$ quand t tend vers $+\infty$. Donc la particule extrémale du mouvement brownien branchant à deux vitesses dans le cas sous-critique est asymptotiquement plus haute que celle du mouvement brownien branchant standard.

D'autre part, la loi limite de $M(t) - \tilde{m}(t)$ a une description analogue à celle obtenue dans le cas standard par Lalley et Sellke (énoncée dans la proposition 1.10), sauf que C et Z sont remplacés par \tilde{C} et Y . C'est également un mélange de lois de

Gumbel. Tout comme Z , la limite Y contient l'information concernant le décalage aléatoire généré par les branchements initiaux, ce qui explique qu'elle ne dépend que de σ_1 . La loi limite du processus extrémal \mathcal{E}_t a également une forme analogue à celle obtenue dans la proposition 1.18 pour le cas standard par Arguin, Bovier et Kistler : \mathcal{E} est un processus ponctuel de Poisson décoré, où C et Z sont de nouveau remplacés par \tilde{C} et Y et où la loi des décorations est \mathcal{L} au lieu de \mathcal{D} .

Présentons les différentes étapes de la démonstration, qui sont très proches de celles de l'article [4] d'Arguin, Bovier et Kistler. Une différence majeure se trouve dans le comportement des trajectoires des particules extrémales : on montre dans la sous-partie 2.2 que les particules qui sont proches de $\tilde{m}(t)$ à l'instant t étaient avec forte probabilité entre $\sigma_{1,t}^2\sqrt{2}b_t t - A\sqrt{t}$ et $\sigma_{1,t}^2\sqrt{2}b_t t + A\sqrt{t}$ à l'instant $b_t t$, alors que les particules les plus hautes à cet instant se trouvent près de $\sigma_{1,t}\sqrt{2}b_t t$. L'écart entre ces deux positions est donc linéaire en t alors qu'il est de l'ordre de \sqrt{t} dans le cas standard. Les particules qui arrivent en position extrémale à l'instant t doivent donc rattraper un retard plus grand, ce qui nous conduit à étudier des mouvements browniens branchants conditionnés à avoir des particules exceptionnellement hautes comme dans la proposition 2.3. Ainsi, la sous-partie 2.3 est consacrée à l'étude des solutions de l'équation F-KPP dans ces échelles de temps. On a également besoin de connaître la distribution des particules après les premiers branchement, c'est-à-dire à un instant de l'ordre de \sqrt{t} et pour cela on utilise la martingale $(Y_s)_{s \geq 0}$ qui remplace la martingale dérivée utilisée dans le cas standard : dans la sous-partie 2.4, on montre la convergence L^1 de $(Y_s)_{s \geq 0}$. Le contrôle des particules entre cet instant de l'ordre de \sqrt{t} et l'instant de changement de vitesse $b(t)t$ est traité plus tôt, dans la sous-partie 2.2. En combinant les résultats des parties précédentes, on peut alors montrer la partie (i) du théorème 2.4 dans la sous-partie 2.5 et la convergence en loi du processus extrémal dans la sous-partie 2.6 en utilisant la transformée de Laplace. Pour décrire la limite, on introduit dans la sous-partie 2.7 un processus ponctuel auxiliaire qui admet la même limite en loi que le processus extrémal, puis on montre dans la sous-partie 2.8 que cette limite vérifie la description 2.5.

Dans la suite, on considère une famille $((x_k^t(s))_{1 \leq k \leq n^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$ de mouvements browniens branchants à deux vitesses vérifiant les hypothèses du théorème 1.21. Quand on travaillera sur un mouvement brownien branchant standard, il sera noté $((\bar{x}_k(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)})_{t \geq 0}$.

2.2 Localisation des trajectoires

Commençons par contrôler la position à l'instant du changement de vitesse $b_t t$ des particules qui se trouvent en position extrémale à l'instant t .

Proposition 2.5. *Pour tous $d \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que, pour tout t suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}\left(\exists j \leq n^t(t) : x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{j,t}^t(b_t t) - \sigma_{1,t}^2\sqrt{2}b_t t \notin [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]\right) \leq \epsilon.$$

On sait donc que pour t grand, avec forte probabilité, les particules extrémales à l'instant t étaient proche de $\sigma_{1,t}^2\sqrt{2}b_t t$ à l'instant $b_t t$, donc bien en-dessous des particules les plus hautes à cet instant. Ces particules doivent alors monter de

$\sigma_{2,t}^2\sqrt{2}(1-b_t)t$ entre les instants $b_t t$ et t , c'est-à-dire se déplacer à une vitesse $\sigma_{2,t}^2\sqrt{2}$, alors que la particule extrême d'un mouvement brownien branchant de variance $\sigma_{2,t}^2$ monte à la vitesse $\sigma_{2,t}\sqrt{2}$. Cela laisse présager l'apparition, dans la description de la loi de la décoration \mathcal{L} , d'un mouvement brownien branchant standard dont la particule extrême est conditionnée à avoir une vitesse supérieure à $\sigma_{2,t}\sqrt{2}$ (comme c'est le cas dans la proposition 2.3).

Démonstration. Soient $d \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Pour les $t \geq 0$ tels que $\sigma_{1,t} = 0$, le résultat est immédiat car $x_{j,t}^t(b_t t) = 0$ presque sûrement. On considère donc uniquement les t tels que $\sigma_{1,t} > 0$. Pour $A > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\exists j \leq n^t(t) : x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{j,t}^t(b_t t) - \sigma_{1,t}^2\sqrt{2}b_t t \notin [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}] \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{n^t(t)} \mathbb{1}_{x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d} \mathbb{1}_{x_{j,t}^t(b_t t) - \sigma_{1,t}^2\sqrt{2}b_t t \notin [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$= e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{B_t > \tilde{m}(t) - d} \mathbb{1}_{B_{\Sigma_t^2(b_t t)} - \sigma_{1,t}^2\sqrt{2}b_t t \notin [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]} \right], \quad (2.7)$$

où B est un mouvement brownien standard. Le passage de (2.6) à (2.7) est une conséquence du lemme de regroupement 2.1. Ici $\Sigma_t^2(b_t t)$ est égal à $\sigma_{1,t}^2 b_t t$. Donc, avec W_1 et W_2 indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, (2.7) est égal à

$$\begin{aligned} & e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t t}W_1 - \sigma_{1,t}^2\sqrt{2}b_t t \notin [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]} \mathbb{1}_{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t t}W_1 + \sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}W_2 > \tilde{m}(t) - d} \right] \\ & = e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{W_1 - \sigma_{1,t}\sqrt{2}\sqrt{b_t t} \notin \left[-\frac{A}{\sigma_{1,t}}; \frac{A}{\sigma_{1,t}}\right]} \mathbb{P} \left(W_2 > \frac{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t t}W_1}{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}} \mid W_1 \right) \right] \\ & = (R1) + (R2), \end{aligned}$$

en introduisant dans la dernière ligne la décomposition

$$1 = \mathbb{1}_{\sqrt{2t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1 < \log t} + \mathbb{1}_{\sqrt{2t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1 \geq \log t}, \quad (2.8)$$

qui permet d'introduire une borne supérieure pour W_1 dans (R2).

Pour (R1), on montre directement que $\lim_{t \rightarrow \infty} (R1) = 0$ en ne gardant que le facteur introduit par la décomposition (2.8) :

$$\begin{aligned} (R1) & \leq e^t \mathbb{P} \left(\sqrt{2t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1 < \log t \right) \\ & = e^t \mathbb{P} \left(W_1 > \frac{\sqrt{2t} - \log t}{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}} \right) \\ & \leq e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}}{\sqrt{2t} - \log t} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2t} - \log t}{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

pour t suffisamment grand tel que $\sqrt{2t} > \log t$, en utilisant l'estimation classique de la queue gaussienne : pour tout $u > 0$,

$$\int_u^\infty e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{u} e^{-u^2/2}. \quad (2.9)$$

On obtient alors

$$(R1) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2t} - \log t)} \exp\left(t\left(1 - \frac{1}{\sigma_{1,t}^2 b_t}\right) + \frac{\sqrt{2t} \log t}{\sigma_{1,t}^2 b_t} - \frac{\log^2 t}{2\sigma_{1,t}^2 b_t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

car $\sigma_{1,t}^2 b_t$ tend vers $\sigma_1^2 b < 1$ quand t tend vers $+\infty$. On a donc montré que $(R1) \leq \epsilon/2$ pour t suffisamment grand.

Contrôlons maintenant $(R2)$. Si $\sqrt{2t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1 \geq \log t$, alors

$$\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1 \geq \sqrt{t} \log t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t - d > 0$$

pour t suffisamment grand (ne dépendant pas de W_1) et on peut donc appliquer l'estimation de la queue gaussienne (2.9) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(W_2 > \frac{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1}{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}} \mid W_1\right) \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}}{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1}{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}}\right)^2\right) \\ & \leq \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)}}{\sqrt{2t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1}{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

pour t suffisamment grand (ne dépendant que de d), en utilisant la fait que $\sqrt{2t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}W_1 \geq \log t$. On pose alors $Z_t := W_1 - \sqrt{2}\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}$. En utilisant la relation (2.2) entre $\sigma_{1,t}$ et $\sigma_{2,t}$, on montre que (2.10) est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)\sqrt{t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}Z_t} \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\log t}{\sqrt{t}} - \frac{d}{\sqrt{t}} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}Z_t}{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

En développant l'intérieur de l'exponentielle et en utilisant que $\sigma_{2,t}$ et b_t tendent respectivement vers $\sigma_2 > 1$ et $0 < b < 1$ quand t tend vers $+\infty$, on majore (2.11) pour t suffisamment grand (ne dépendant pas de Z_t) par

$$\begin{aligned} & \frac{2\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)\sqrt{t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}Z_t} \times \exp\left(-\sigma_{2,t}^2(1-b_t)t - \frac{Z_t^2\sigma_{1,t}^2 b_t}{2\sigma_{2,t}^2(1-b_t)}\right) \\ & + 2Z_t\sigma_{1,t}\sqrt{b_t} + \frac{1}{2} \log t + \sqrt{2}d - \frac{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} \times \frac{Z_t}{\sqrt{t}} \times \left(\frac{\log t}{2\sqrt{2}} + d\right), \end{aligned}$$

en majorant par 2 les facteurs de l'exponentielle indépendants de Z_t qui tendent vers

1 quand t tend vers $+\infty$. Comme Z_t a pour loi $\mathcal{N}(-\sqrt{2}\sigma_1(t)\sqrt{b(t)t}, 1)$, on obtient

$$(R2) \leq e^t \int_{z \notin [-\frac{A}{\sigma_{1,t}}; \frac{A}{\sigma_{1,t}}]} \frac{e^{-\frac{1}{2}(z+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\sqrt{b_t t})^2}}{\sqrt{2\pi}} \times \mathbb{1}_{\sqrt{2t}-\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}(z+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\sqrt{b_t t}) \geq \log t} \\ \times \frac{2\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)\sqrt{t}-\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}z} \times \sqrt{t}e^{\sqrt{2}d} \times \exp\left(-\sigma_{2,t}^2(1-b_t)t - \frac{z^2\sigma_{1,t}^2b_t}{2\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} + 2z\sigma_{1,t}\sqrt{b_t t} - \frac{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} \times \frac{z}{\sqrt{t}} \times \left(\frac{\log t}{2\sqrt{2}} + d\right)\right) dz,$$

puis en regroupant les différentes exponentielles, on a la majoration

$$(R2) \leq \frac{e^{\sqrt{2}d}}{\sqrt{2\pi}} \int_{z \notin [-\frac{A}{\sigma_{1,t}}; \frac{A}{\sigma_{1,t}}]} \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)\sqrt{t}-\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}z} \times \mathbb{1}_{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)\sqrt{t}-\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}z \geq \log t} \\ \times \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} - \frac{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} \times \frac{z}{\sqrt{t}} \times \left(\frac{\log t}{2\sqrt{2}} + d\right)\right) dz \\ = I^- + I^+,$$

où I^- est l'intégrale sur $]-\infty; -A/\sigma_{1,t}[$ et I^+ celle sur $]A/\sigma_{1,t}; \infty[$. Pour I^- , on majore la fonction indicatrice par 1, on utilise le fait que $z < 0$ pour enlever le terme en z dans la fraction devant l'indicatrice, puis on effectue le changement de variable

$$y = \frac{z}{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} - \frac{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} \times \left(\frac{\log t}{2\sqrt{2t}} + \frac{d}{\sqrt{t}}\right),$$

et on obtient alors

$$I^- \leq \frac{e^{\sqrt{2}d}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{A}{\sigma_{1,t}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} - \frac{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} \times \left(\frac{\log t}{2\sqrt{2t}} + \frac{d}{\sqrt{t}}\right)} \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} \\ \times \exp\left(-\frac{y^2}{2} - \frac{\sigma_{1,t}^2b_t}{4\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} \times \left(\frac{\log t}{2\sqrt{2t}} + \frac{d}{\sqrt{t}}\right)^2\right) \times \sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t} dy.$$

Le deuxième terme dans l'exponentielle tend vers 0 indépendamment de z donc on majore ce facteur par 2 pour t suffisamment grand. Comme $\sigma_{1,t}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t} \leq 2\sigma_2$ pour t grand, on peut également majorer la deuxième borne de l'intégrale pour obtenir

$$I^- \leq \frac{e^{\sqrt{2}d}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{A}{2\sigma_2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (2.12)$$

Contrôlons maintenant I^+ . La difficulté réside ici dans le fait que la fraction présente devant l'indicatrice peut prendre des valeurs proches de $\sqrt{t}/\log t$ qu'il va falloir compenser. Cependant, comme z est positif, on peut majorer par 0 le deuxième terme dans l'exponentielle, puis, avec le changement de variable $x = z/\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}$, on obtient

$$I^+ \leq \frac{e^{\sqrt{2}d}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A}{\sigma_{1,t}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}}^{\frac{\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}}{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}} - \frac{\log t}{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}} \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}-\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}x} \times e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ = I_1^+ + I_2^+,$$

où l'on coupe l'intégrale en $(\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t})/(2\sigma_{1,t}\sqrt{b_t})$, qui est bien compris entre les deux bornes pour t grand. Pour la première partie la fraction peut être majorée par 2, ce qui nous donne

$$I_1^+ \leq \frac{e^{\sqrt{2}d}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A}{\sigma_{1,t}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}}^{\frac{\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}}{2\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}}} 2e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq e^{\sqrt{2}d} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{A}{2\sigma_2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (2.13)$$

et pour la seconde partie, on majore l'exponentielle par sa valeur au bord inférieur, on effectue le changement de variable $v = \sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}x$ et on obtient

$$\begin{aligned} I_2^+ &\leq \frac{e^{\sqrt{2}d}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\log t}{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}}^{\frac{\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}}{2\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}}} \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}}{v} \times e^{-\frac{\sigma_{2,t}^2(1-b_t)}{4\sigma_{1,t}^2 b_t} t} \frac{dv}{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}} \\ &\leq \frac{e^{\sqrt{2}d}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}}{\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}} \times e^{-\frac{\sigma_{2,t}^2(1-b_t)}{4\sigma_{1,t}^2 b_t} t} \times \log \left(\frac{\sqrt{2}\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}\sqrt{t}}{2\sigma_{1,t}\sqrt{b_t}} \right), \end{aligned} \quad (2.14)$$

qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. On fixe alors $A > 0$ (indépendamment de t) tel que (2.12) $\leq \epsilon/6$ et (2.13) $\leq \epsilon/6$. Alors pour t suffisamment grand tel que les majorations précédentes soient valides et que (2.14) $\leq \epsilon/6$, on obtient $(R2) \leq \epsilon/2$, ce qui conclut la démonstration. \square

Nous allons avoir besoin d'un contrôle plus précis de la trajectoire des particules extrémales entre les instants 0 et $b_t t$. Pour cela, nous allons avoir besoin d'un résultat de contrôle des trajectoires du pont brownien. Nous allons utiliser le résultat suivant, montré par Bramson [8, Lemme 2.2 (b)] :

Lemme 2.6. *Soient $t > 0$. Soit ξ un pont brownien issu de 0 se terminant en 0 et de longueur t . Alors, pour tous $q \in [0; t]$ et $x > 0$, on a*

$$\mathbb{P}(\exists s \in [0; q] : |\xi_s| \geq x) \leq \frac{4\sqrt{q}}{x} e^{-\frac{x^2}{2q}}.$$

Ce lemme fournit une majoration explicite, pour t , x et q fixés, de la probabilité qu'un pont brownien de longueur t prenne des valeurs plus grandes en valeur absolue que x sur $[0; q]$. On remarque en particulier que cette majoration ne dépend pas de t . Nous allons l'utiliser pour obtenir un contrôle pour t grand :

Lemme 2.7. *Soient $\frac{1}{2} < \gamma < 1$. Soit ξ un pont brownien issu de 0 se terminant en 0 et de longueur t . Alors, pour tous $q > 1$ et $t \geq 3q$, on a*

$$\mathbb{P}(\exists s \in [q; t-q] : |\xi_s| \geq (s \wedge (t-s))^\gamma) \leq 8 \sum_{k=\lfloor q \rfloor}^{\infty} \frac{(k+1)^{\frac{1}{2}}}{(k-1)^\gamma} \times e^{-\frac{(k-1)^{2\gamma}}{2(k+1)}}. \quad (2.15)$$

En outre, pour tout $\epsilon > 0$, on a pour r suffisamment grand,

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{P}(\exists s \in [0; t] : |\xi_s| \geq ((s \wedge (t-s)) \vee r)^\gamma) \leq \epsilon. \quad (2.16)$$

Nous utiliserons plus régulièrement (2.16), mais le contrôle explicite fourni par (2.15) nous sera utile dans la partie 3.

Démonstration. Commençons par montrer (2.16). Pour cela on recouvre le segment $[q; t - q]$ par des segments de longueur 1 à bornes entières :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists s \in [q; t - q] : |\xi_s| \geq (s \wedge (t - s))^\gamma) \\ & \leq \sum_{k=\lfloor q \rfloor + 1}^{\lfloor t - q \rfloor} \mathbb{P}(\exists s \in [k - 1; k] : |\xi_s| \geq (s \wedge (t - s))^\gamma) \\ & \leq 2 \sum_{k=\lfloor q \rfloor + 1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \mathbb{P}(\exists s \in [k - 1; k] : |\xi_s| \geq (s \wedge (t - s))^\gamma), \end{aligned} \quad (2.17)$$

en utilisant que $t \geq 3q$ et que ξ et $(\xi_{t-s})_{0 \leq s \leq t}$ ont même loi. Pour $s \in [k - 1; k]$, on a $s \wedge (t - s) \geq k - 2$ et donc 2.17 est majoré par

$$2 \sum_{k=\lfloor q \rfloor + 1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \mathbb{P}(\exists s \in [0; k] : |\xi_s| \geq (k - 2)^\gamma), \quad (2.18)$$

où $k - 2 > 0$, on peut donc appliquer le lemme 2.6 à chaque terme de (2.18) pour le majorer par

$$2 \sum_{k=\lfloor q \rfloor + 1}^{\lfloor t/2 \rfloor} \frac{4\sqrt{k}}{(k - 2)^\gamma} \exp\left(-\frac{(k - 2)^{2\gamma}}{2k}\right) \leq 8 \sum_{k=\lfloor q \rfloor}^{\infty} \frac{(k + 1)^{\frac{1}{2}}}{(k - 1)^\gamma} \exp\left(-\frac{(k - 1)^{2\gamma}}{2(k + 1)}\right),$$

ce qui est la majoration souhaitée.

Montrons maintenant (2.16) à partir de (2.15). Comme la série apparaissant dans (2.15) est convergente, il existe $q > 1$ tel que pour tout $t \geq 3q$,

$$\mathbb{P}(\exists s \in [q; t - q] : |\xi_s| \geq (s \wedge (t - s))^\gamma) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors, pour $r > 0$ et $t \geq 3q$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\exists s \in [0; t] : |\xi_s| \geq ((s \wedge (t - s)) \vee r)^\gamma) \\ & \leq \mathbb{P}(\exists s \in [0; q] : |\xi_s| \geq r^\gamma) + \frac{\epsilon}{2} + \mathbb{P}(\exists s \in [t - q; t] : |\xi_s| \geq r^\gamma) \\ & = 2\mathbb{P}(\exists s \in [0; q] : |\xi_s| \geq r^\gamma) + \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

en utilisant la symétrie temporelle du pont brownien. En utilisant de nouveau le lemme 2.6, on obtient

$$\mathbb{P}(\exists s \in [0; q] : |\xi_s| \geq r^\gamma) \leq \frac{4\sqrt{q}}{r^\gamma} e^{-\frac{r^{2\gamma}}{2q}} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0,$$

où la convergence est uniforme en t . Il existe donc $r_1 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_1$ et tout $t \geq 3q$,

$$\mathbb{P}(\exists s \in [0; t] : |\xi_s| \geq ((s \wedge (t - s)) \vee r)^\gamma) \leq \epsilon.$$

Il reste donc à traiter le cas où $0 \leq t \leq 3q$. Pour cela, il suffit de remarquer que dans ce cas on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists s \in [0; t] : |\xi_s| \geq ((s \wedge (t - s)) \vee r)^\gamma) & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0; t]} |\xi_s| \geq r^\gamma\right) \\ & \leq \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0; t]} |\zeta_s| \geq r^\gamma\right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

où ζ est un pont brownien entre 0 et 0 de longueur $3q$. Comme $\sup_{s \in [0; t]} |\zeta_s|$ est p.s. fini, il existe $r_2 > 0$ tel que pour tout $r \geq r_2$, (2.19) $\leq \epsilon$. Alors l'inégalité (2.16) est vraie pour tout $r \geq r_1 \vee r_2$, ce qui conclut la démonstration. \square

Nous allons maintenant appliquer ce contrôle sur les trajectoires du pont brownien aux trajectoires des particules extrémales. Définissons tout d'abord les deux boréliens de $\mathcal{D}([0; t], \mathbb{R})$ suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{s,r,\gamma}^t &:= \left\{ X \in \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R}) \mid \forall q \in [0; s], \left| X(q) - \frac{q}{s} X(s) \right| \leq ((q \wedge (s - q)) \vee r)^\gamma \right\} \\ \mathcal{G}_{s,A,\gamma}^t &:= \left\{ X \in \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R}) \mid X(s) - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 s \in [-As^\gamma; As^\gamma] \right\}. \end{aligned}$$

Le premier contrôle que la trajectoire se trouve bien dans un certain tube sur le segment $[0; s]$ et le deuxième contrôle la position en s . Avec ces notations, la proposition 2.5, qui contrôle la position en $b(t)t$, peut se réécrire : pour tous $d \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$, il existe $A' > 0$ tel que, pour tout t suffisamment grand,

$$\mathbb{P} \left(\exists j \leq n^t(t) : x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_j^t \notin \mathcal{G}_{b_t t, A', \frac{1}{2}}^t \right) \leq \epsilon,$$

en prenant $A' := 2A/\sqrt{b}$ où A est fourni par la proposition 2.5.

On définit également le borélien

$$\mathcal{S}_{r,\gamma}^s := \left\{ X \in \mathcal{D}([0; s], \mathbb{R}) \mid \forall q \in [0; s], |X(q)| \leq ((q \wedge (s - q)) \vee r)^\gamma \right\},$$

et on remarque que l'on a l'équivalence suivante pour $X \in \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R})$:

$$X \in \mathcal{T}_{s,r,\gamma}^t \Leftrightarrow \left(X(q) - \frac{q}{s} X(s) \right)_{0 \leq q \leq s} \in \mathcal{S}_{r,\gamma}^s.$$

Si X est un mouvement brownien, on voit alors apparaître un pont brownien et la probabilité que ce pont brownien n'appartienne pas à $\mathcal{S}_{r,\gamma}^s$ est contrôlée par l'inégalité (2.16) du lemme 2.7. C'est la méthode que nous allons appliquer pour montrer les deux propositions suivantes. La première rajoute un contrôle en un instant supplémentaire $\Delta(t)$, antérieur à $b_t t$, de la trajectoire des particules extrémales qui sont effectivement proche de $\sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t$ à l'instant $b_t t$:

Proposition 2.8. *Soit $\Delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\Delta(t) \rightarrow \infty$ et $\Delta(t) = o(t)$ quand $t \rightarrow \infty$. Pour tous $d \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $A > 0$, $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, il existe $B > 0$ tel que, pour tout t suffisamment grand,*

$$\mathbb{P} \left(\exists j \leq n^t(t) : x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{j,t}^t \in \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \text{ et } x_{j,t}^t \notin \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t \right) \leq \epsilon.$$

On remarque que les hypothèses sur la fonction Δ nous assurent que, pour t suffisamment grand, on a $\Delta(t) \leq b_t t$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que pour tout $r > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour t grand on ait l'inégalité

$$\mathbb{P} \left(\exists j \leq n^t(t) : x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{j,t}^t \in \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \text{ et } x_{j,t}^t \notin \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t \right) \quad (2.20)$$

$$\leq \mathbb{P} \left(\exists j \leq n^t(t) : x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{j,t}^t \in \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \text{ et } x_{j,t}^t \notin \mathcal{T}_{b_t t, r, \gamma}^t \right). \quad (2.21)$$

Pour cela considérons $X \in \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \cap \mathcal{T}_{b_t t, r, \gamma}^t$. Alors, en appliquant l'hypothèse $X \in \mathcal{T}_{b_t t, r, \gamma}^t$ en $\Delta(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| X(\Delta(t)) - \frac{\Delta(t)}{b_t t} X(b_t t) \right| &\leq ((\Delta(t) \wedge (b_t t - \Delta(t))) \vee r)^\gamma \\ &= \Delta(t)^\gamma, \end{aligned}$$

pour t suffisamment grand. On utilise cette inégalité ainsi que celle fournie par l'hypothèse $X \in \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t$ pour majorer

$$\begin{aligned} \left| X(\Delta(t)) - \sqrt{2} \sigma_{1,t}^2 \Delta(t) \right| &\leq \left| X(\Delta(t)) - \frac{\Delta(t)}{b_t t} X(b_t t) \right| + \frac{\Delta(t)}{b_t t} \left| X(b_t t) - \sqrt{2} \sigma_{1,t}^2 b_t t \right| \\ &\leq \Delta(t)^\gamma + \frac{\Delta(t)}{b_t t} A \sqrt{t} \\ &\leq \Delta(t)^\gamma + \Delta(t)^{1/2} \frac{A}{b_t} \left(\frac{\Delta(t)}{t} \right)^{1/2} \\ &\leq B \Delta(t)^\gamma, \end{aligned}$$

pour $B \geq A + 1$ et t suffisamment grand tel que $\Delta(t)/t \leq b_t^2$. On a donc montré que, pour B et t suffisamment grand, $\mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \cap \mathcal{T}_{b_t t, r, \gamma}^t$ est inclus dans $\mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \cap \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t$, ce qui implique que (2.20) \leq (2.21).

Il suffit maintenant de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que (2.21) $\leq \epsilon$. Comme dans la démonstration de la proposition 2.5, on utilise le lemme de regroupement 2.1 et on obtient alors que (2.21) est égal à

$$e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{B_t > \tilde{m}(t) - d} \cdot \mathbb{1}_{B_{\sigma_{1,t}^2 b_t t} - \sqrt{2} \sigma_{1,t}^2 b_t t \in [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]} \cdot \mathbb{1}_{\left(B_{\sigma_{1,t}^2 q - \frac{q}{b_t t} B_{\sigma_{1,t}^2 b_t t} \right)_{0 \leq q \leq b_t t} \notin \mathcal{S}_{r, \gamma}^{b_t t}} \right], \quad (2.22)$$

où B est un mouvement brownien standard. On considère W_1, W_2 de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et ξ un pont brownien entre 0 et 0 de longueur $b_t t$ tels que W_1, W_2 et ξ soient indépendants. On a alors l'identité en loi

$$\begin{aligned} &\left(B_t, B_{\sigma_{1,t}^2 b_t t}, \left(B_{\sigma_{1,t}^2 q} - \frac{q}{b_t t} B_{\sigma_{1,t}^2 b_t t} \right)_{0 \leq q \leq b_t t} \right) \\ &\stackrel{\text{loi}}{=} \left(\sigma_{1,t} \sqrt{b_t t} W_1 + \sigma_{2,t} \sqrt{(1-b_t)t} W_2, \sigma_{1,t} \sqrt{b_t t} W_1, \sigma_{1,t} \xi \right) \end{aligned}$$

et on en déduit que (2.22) est égal à

$$\begin{aligned} &e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{W_1 - \sigma_{1,t} \sqrt{2} \sqrt{b_t t} \in \left[-\frac{A}{\sigma_{1,t}}; \frac{A}{\sigma_{1,t}} \right]} \mathbb{P} \left(W_2 > \frac{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t} \sqrt{b_t t} W_1}{\sigma_{2,t} \sqrt{(1-b_t)t}} \mid W_1 \right) \right] \\ &\times \mathbb{P} \left(\sigma_{1,t} \xi \notin \mathcal{S}_{r, \gamma}^{b_t t} \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Le calcul de la première ligne de (2.23) est analogue au calcul effectué dans la démonstration de la proposition 2.5. On pose de nouveau $Z_t := W_1 - \sigma_{1,t} \sqrt{2} \sqrt{b_t t}$.

Ici $|Z_t|$ est borné par $A/\sigma_{1,t}$ donc il n'y a pas besoin d'introduire la décomposition (2.8) et on peut majorer directement

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P} \left(W_2 > \frac{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t t} W_1}{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}} \middle| W_1 \right) \\
& \leq \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}}{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)\sqrt{t} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}Z_t} \\
& \quad \times \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}\sigma_{2,t}^2(1-b_t)\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\log t}{\sqrt{t}} - \frac{d}{\sqrt{t}} - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t}Z_t}{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} \right)^2 \right) \\
& \leq \frac{1}{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}} \exp \left(-\sigma_{2,t}^2(1-b_t)t - \frac{Z_t^2\sigma_{1,t}^2 b_t}{2\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} + 2Z_t\sigma_{1,t}\sqrt{b_t t} + \frac{1}{2}\log t + \sqrt{2d} \right) \\
& = \frac{1}{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} \exp \left(-\sigma_{2,t}^2(1-b_t)t - \frac{Z_t^2\sigma_{1,t}^2 b_t}{2\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} + 2Z_t\sigma_{1,t}\sqrt{b_t t} + \sqrt{2d} \right),
\end{aligned}$$

pour t suffisamment grand. Alors, en utilisant que Z_t a pour loi $\mathcal{N}(-\sqrt{2}\sigma_1(t)\sqrt{b(t)t}, 1)$ et en regroupant les différentes exponentielles, on obtient la majoration :

$$\begin{aligned}
& e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{W_1 - \sigma_{1,t}\sqrt{2}\sqrt{b_t t} \in \left[-\frac{A}{\sigma_{1,t}}; \frac{A}{\sigma_{1,t}}\right]} \mathbb{P} \left(W_2 > \frac{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t}\sqrt{b_t t} W_1}{\sigma_{2,t}\sqrt{(1-b_t)t}} \middle| W_1 \right) \right] \\
& \leq \frac{e^{\sqrt{2}d}}{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} \int_{-\frac{A}{\sigma_{1,t}}}^{\frac{A}{\sigma_{1,t}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2\sigma_{2,t}^2(1-b_t)} \right) dz \\
& \leq e^{\sqrt{2}d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{y^2}{2} \right) dy \\
& = e^{\sqrt{2}d},
\end{aligned}$$

avec le changement de variable $z = y\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}$. On a donc montré que (2.23) est majoré par

$$e^{\sqrt{2}d} \times \mathbb{P} \left(\sigma_{1,t}\xi \notin \mathcal{S}_{r,\gamma}^{b_t t} \right). \quad (2.24)$$

Il suffit maintenant de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que (2.24) $\leq \epsilon$. Or par l'inégalité (2.16) du lemme 2.7, il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{P}(\xi \notin \mathcal{S}_{r,\gamma}^{b_t t}) \leq e^{-\sqrt{2}d}\epsilon$. Comme $\sigma_{1,t} \leq 1$, on en déduit que (2.24) $\leq \epsilon$, ce qui conclut la démonstration. \square

La seconde proposition rajoute encore un contrôle de la trajectoire entre les instants $\Delta(t)$ et $b_t t$ pour les particules extrémales dont les positions aux instants $\Delta(t)$ et $b_t t$ sont déjà contrôlées, c'est-à-dire qui appartiennent à la fois à $\mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t$ et à $\mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t$:

Proposition 2.9. *Soit $\Delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\Delta(t) \rightarrow \infty$ et $\Delta(t) = o(t)$ quand $t \rightarrow \infty$. Pour tous $d \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, $A, B > 0$, $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, il existe $r > 0$ tel que, pour*

tout t suffisamment grand,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\exists j \leq n^t(t) : x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{j,t}^t \in \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \cap \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t \right. \\ & \left. \text{ et } x_{j,t}^t(\Delta(t) + \cdot) - x_{j,t}^t(\Delta(t)) \notin \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{t - \Delta(t)}\right) \leq \epsilon. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Démonstration. On majore la probabilité dans (2.25) par

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\exists j \leq n^t(t) : x_j^t(t) > \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{j,t}^t \in \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \right. \\ & \left. \text{ et } x_{j,t}^t(\Delta(t) + \cdot) - x_{j,t}^t(\Delta(t)) \notin \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{t - \Delta(t)}\right) \\ & = e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{W_1 - \sigma_{1,t} \sqrt{2} \sqrt{b_t t} \in \left[-\frac{A}{\sigma_{1,t}}, \frac{A}{\sigma_{1,t}}\right]} \mathbb{P} \left(W_2 > \frac{\tilde{m}(t) - d - \sigma_{1,t} \sqrt{b_t t} W_1}{\sigma_{2,t} \sqrt{(1 - b_t)t}} \middle| W_1 \right) \right] \\ & \quad \times \mathbb{P} \left(\sigma_{1,t} \xi \notin \mathcal{S}_{r, \gamma}^{b_t t - \Delta(t)} \right), \end{aligned} \quad (2.26)$$

avec W_1, W_2 de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et ξ un pont brownien entre 0 et 0 de longueur $b_t t - \Delta(t)$ tels que W_1, W_2 et ξ soient indépendants, d'après le lemme de regroupement 2.1. D'après la démonstration de la proposition 2.8, (2.26) est majoré par

$$e^{\sqrt{2}d} \times \mathbb{P} \left(\sigma_{1,t} \xi \notin \mathcal{S}_{r, \gamma}^{b_t t - \Delta(t)} \right) \quad (2.27)$$

et, par l'inégalité (2.16) du lemme 2.7, il existe $r > 0$ tel que (2.27) $\leq \epsilon$, ce qui conclut la démonstration. \square

On a donc montré qu'avec forte probabilité, les particules extrémales à l'instant t étaient proches de $\sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t$ à l'instant $b_t t$ (à $At^{1/2}$ près), proches de $\sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 \Delta(t)$ à l'instant $\Delta(t)$ (à $B\Delta(t)^{\gamma/2}$ près) et que la trajectoire entre ces deux instants ne s'éloigne pas trop de la ligne droite entre les deux positions à ces instants.

2.3 Comportement asymptotique des solutions de l'équation F-KPP

On a vu dans la partie précédente que, pour étudier les particules extrémales, il va nous falloir travailler sur le mouvement brownien branchant standard conditionné à avoir une particule extrémale plus haute que $\sqrt{2}\sigma_{2,t}t$, où $\sigma_{2,t} > 1$. Dans cette partie, on considère u une solution de l'équation F-KPP avec une condition initiale vérifiant certaines hypothèses et on s'intéresse au comportement asymptotique de $u(t, (\sqrt{2} + a)t + o(t))$ pour $a > 0$. Par exemple avec la condition initiale $u(0, \cdot) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}$, si $((\bar{x}_k(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien branchant standard, alors on a

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)} \bar{x}_k(t) \geq (\sqrt{2} + a)t + y \right) = u \left(t, (\sqrt{2} + a)t + y \right),$$

d'après le lemme 1.7. Le résultat principal de cette partie est le suivant :

Proposition 2.10. *Soit u une solution de l'équation F-KPP (1.1) dont la condition initiale vérifie les conditions suivantes :*

- (a) $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq u(0, x) \leq 1,$
(b') $y_0 := \sup \{y \in \mathbb{R} \mid u(0, y) > 0\} < \infty,$
(c) $\exists \eta > 0, M > 0, N > 0 : \forall x \leq -M, \int_x^{x+N} u(0, y) dy > \eta.$

Alors, pour $x(t) = at + h(t)$, où $a > 0$ et $h(t) = o(t)$, on a la limite

$$\sqrt{t} \exp \left(\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t} \right) u \left(t, \sqrt{2}t + x(t) \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} C_u(a), \quad (2.28)$$

où la constante $C_u(a) \in]0; \infty[$ est définie par la limite suivante :

$$C_u(a) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u \left(r, y + \sqrt{2}r \right) e^{(\sqrt{2}+a)y} \left(1 - e^{-2ay} \right) dy. \quad (2.29)$$

Si \mathcal{H} est un ensemble de fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} tel que $h(t)/t$ tend uniformément vers 0 pour $h \in \mathcal{H}$, alors la convergence (2.28) est uniforme pour $h \in \mathcal{H}$.

Les conditions (a) et (c) sont identiques à celles définies dans le théorème 1.8, mais la condition (b') est plus forte que la condition (b). En effet, la condition (b) consiste en une condition d'intégrabilité de $u(0, \cdot)$ en l'infini, alors que la condition (b') signifie que $u(0, \cdot)$ est nulle en l'infini. Comme les conditions (a), (b) et (c) sont vérifiées, on va pouvoir utiliser la proposition 1.19 pour encadrer u à l'aide de la fonction ψ . Le lemme suivant montre la convergence (2.28) pour la fonction ψ à r fixé :

Lemme 2.11. *Soit u une solution de l'équation F-KPP (1.1) dont la condition initiale vérifie les conditions (a), (b') et (c). Soit $r \geq 0$. Alors, pour $x(t) = at + h(t)$, où $a > 0$ et $h(t) = o(t)$, on a la limite*

$$\sqrt{t} \exp \left(\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t} \right) \psi \left(r, t, \sqrt{2}t + x(t) \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} C_u(r, a), \quad (2.30)$$

où la constante $C_u(r, a) \in]0; \infty[$ est définie par :

$$C_u(r, a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u \left(r, y + \sqrt{2}r \right) e^{(\sqrt{2}+a)y} \left(1 - e^{-2ay} \right) dy. \quad (2.31)$$

Si \mathcal{H} est un ensemble de fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} tel que $h(t)/t$ tend uniformément vers 0 pour $h \in \mathcal{H}$, alors la convergence (2.30) est uniforme pour $h \in \mathcal{H}$.

Démonstration. Par définition de ψ , on a

$$\begin{aligned} & \sqrt{t} \exp \left(\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t} \right) \psi \left(r, t, \sqrt{2}t + x(t) \right) \\ &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi(t-r)}} e^{\frac{x(t)^2}{2t}} \int_0^\infty u \left(r, y + \sqrt{2}r \right) e^{\sqrt{2}y} e^{-\frac{(y-x(t))^2}{2(t-r)}} \left(1 - e^{-2y \frac{x(t) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t}{t-r}} \right) dy \\ &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi(t-r)}} e^{-\frac{rx(t)^2}{2t(t-r)}} \int_0^\infty f(t, y) dy, \end{aligned} \quad (2.32)$$

où la fonction f est définie par

$$f(t, y) := u\left(r, y + \sqrt{2}r\right) e^{\sqrt{2}y} e^{-\frac{y^2}{2(t-r)} + \frac{yx(t)}{t-r}} \left(1 - e^{-2y \frac{x(t) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t}{t-r}}\right).$$

Pour $y \in \mathbb{R}$, on a la convergence suivante, uniforme en $h \in \mathcal{H}$,

$$f(t, y) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} u\left(r, y + \sqrt{2}r\right) e^{\sqrt{2}y} e^{ay} \left(1 - e^{-2ay}\right) \quad (2.33)$$

et il suffit donc maintenant de dominer $f(t, \cdot)$ uniformément en $h \in \mathcal{H}$. On a

$$\begin{aligned} f(t, y) &\leq u\left(r, y + \sqrt{2}r\right) e^{\sqrt{2}y} e^{\frac{yx(t)}{t-r}} \\ &\leq u\left(r, y + \sqrt{2}r\right) e^{(\sqrt{2}+a+1)y}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

pour t suffisamment grand tel que $x(t)/(t-r) \leq a+1$ (indépendant de $h \in \mathcal{H}$). Pour majorer la fonction u , nous allons procéder comme Chauvin et Rouault [10]. D'après la formule de Feynman-Kac (présentée par Durrett dans [12]), on a

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[u(0, x + B_t) \exp \left(\int_0^t k(u(t-s, x + B_s)) ds \right) \right] \quad (2.35)$$

où B est un mouvement brownien standard et la fonction k est définie pour $u \in [0; 1]$ par

$$k(u) := \frac{h(u)}{u}, \text{ avec } h(u) := (1-u) - \sum_{i=1}^{\infty} p_i (1-u)^i.$$

Par un calcul immédiat, f est concave et $f'(0) = 1$, donc, pour tout $u \in [0; 1]$, $k(u) \leq 1$. En outre, par la condition (b'), on a $u(0, \cdot) \leq \mathbb{1}_{]-\infty; y_0]}$ et on peut donc majorer (2.35) par

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{x+B_t \leq y_0} e^t \right] = e^t \int_{\frac{x-y_0}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \leq e^t e^{-\frac{(x-y_0)^2}{2t}}, \quad (2.36)$$

dès que $x \geq y_0$, par l'estimation classique de la queue gaussienne suivante :

$$\forall u \geq 0, \int_u^{\infty} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \leq e^{-u^2/2}. \quad (2.37)$$

On utilise (2.36) pour majorer $u(r, y + \sqrt{2}r)$ pour $y \geq y_0$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} u\left(r, y + \sqrt{2}r\right) e^{(\sqrt{2}+a+1)y} dy \\ &\leq \int_0^{y_0} e^{(\sqrt{2}+a+1)y} dy + \int_{y_0}^{\infty} e^r e^{-\frac{(y+\sqrt{2}r-y_0)^2}{2r}} e^{(\sqrt{2}+a+1)y} dy \\ &= \frac{e^{(\sqrt{2}+a+1)y_0} - 1}{\sqrt{2} + a + 1} + e^{\sqrt{2}y_0} \int_{y_0}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2r}} e^{(a+1+\frac{y_0}{r})y} dy \\ &< \infty. \end{aligned}$$

La fonction de y définie par (2.34) est intégrable et domine les fonctions $f(t, \cdot)$ pour t suffisamment grand, donc, d'après la convergence (2.33), on a par théorème de convergence dominée

$$\int_0^\infty f(t, y) dy \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty u(r, y + \sqrt{2r}) e^{\sqrt{2}y} e^{ay} (1 - e^{-2ay}) dy.$$

D'autre part, on a également la convergence suivante, uniforme en $h \in \mathcal{H}$,

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi(t-r)}} e^{-\frac{rx(t)^2}{2t(t-r)}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{ra^2}{2}}.$$

On a donc montré que (2.32) converge uniformément en $h \in \mathcal{H}$ quand t tend vers l'infini vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u(r, y + \sqrt{2r}) e^{(\sqrt{2}+a)y} (1 - e^{-2ay}) dy,$$

ainsi que le fait que cette intégrale est finie. La constante $C_u(r, a)$ est donc bien définie et on a montré la limite (2.30). \square

Démonstration de la proposition 2.10. Comme les conditions (a), (b) et (c) sont vérifiées, on peut utiliser la proposition 1.19 : pour r assez grand, pour tous $t \geq 8r$ et $x \geq 8r - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t$,

$$\frac{1}{\gamma(r)} \psi(r, t, x + \sqrt{2t}) \leq u(t, x + \sqrt{2t}) \leq \gamma(r) \psi(r, t, x + \sqrt{2t}), \quad (2.38)$$

où $\gamma: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction décroissante qui tend vers 1 en l'infini. Si on fixe r grand tel que (2.38) soit vérifiée, alors, pour t suffisamment grand, on a $t \geq 8r$ et $x(t) \geq 8r - \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t$ et on peut appliquer (2.38) pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma(r)} \sqrt{t} e^{\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}} \psi(r, t, x(t) + \sqrt{2t}) &\leq \sqrt{t} e^{\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}} u(t, x(t) + \sqrt{2t}) \\ &\leq \gamma(r) \sqrt{t} e^{\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}} \psi(r, t, x(t) + \sqrt{2t}), \end{aligned}$$

et, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la limite, on en déduit la borne inférieure, uniforme en $h \in \mathcal{H}$,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}} u(t, x(t) + \sqrt{2t}) \geq \frac{1}{\gamma(r)} C_u(r, a) \quad (2.39)$$

et la borne supérieure, uniforme en $h \in \mathcal{H}$,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}} u(t, x(t) + \sqrt{2t}) \leq \gamma(r) C_u(r, a). \quad (2.40)$$

Comme (2.39) et (2.40) sont vraies pour tout r grand et que leurs parties de gauche ne dépendent pas de r , on obtient les bornes, toujours uniformes en $h \in \mathcal{H}$ car les parties de droite de (2.39) et (2.40) ne dépendent pas de h ,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}} u(t, x(t) + \sqrt{2t}) \geq \limsup_{r \rightarrow \infty} C_u(r, a)$$

et

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}} u\left(t, x(t) + \sqrt{2t}\right) \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} C_u(r, a),$$

en faisant tendre r vers l'infini et en utilisant que $\gamma(r)$ tend vers 1. On en déduit que les deux limites suivantes existent dans $[0; \infty]$ et vérifient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{t} e^{\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}} u\left(t, x(t) + \sqrt{2t}\right) = \lim_{r \rightarrow \infty} C_u(r, a),$$

la limite de gauche étant uniforme en $h \in \mathcal{H}$. Donc la constante $C_u(a)$ définie par (2.29) existe et la limite (2.28) est vérifiée. Il reste maintenant à montrer que $0 < C_u(a) < \infty$. Mais, en considérant les inégalités (2.39) et (2.40) à r fixé, on obtient

$$\frac{1}{\gamma(r)} C_u(r, a) \leq C_u(a) \leq \gamma(r) C_u(r, a)$$

et $0 < C_u(r, a) < \infty$ d'après le lemme 2.11 et $\gamma(r) < \infty$, donc on en conclut que $0 < C_u(a) < \infty$. \square

La proposition 2.10 est celle utilisée tout au long de l'article de Bovier et Hartung pour décrire le comportement des solutions de l'équation F-KPP. Cependant, nous nous sommes placés ici dans un cas légèrement plus général où les vitesses $\sigma_{1,t}$ et $\sigma_{2,t}$ dépendent de l'horizon t et nous allons donc avoir besoin dans la démonstration du théorème 2.17 d'une variante de la proposition 2.10, où la fonction u peut dépendre légèrement du temps :

Proposition 2.12. *Soit u et u^t pour $t \geq 0$ des solutions de l'équation F-KPP (1.1) dont les conditions initiales vérifient les conditions (a), (b') et (c). On note $y_0 := \sup\{y \in \mathbb{R} \mid u(0, y) > 0\}$ et pour $t \geq 0$, $y_0^t := \sup\{y \in \mathbb{R} \mid u^t(0, y) > 0\}$. Supposons que u^t converge simplement vers u et que y_0^t converge vers y_0 quand t tend vers l'infini. Alors, pour $x(t) = at + h(t)$, où $a > 0$ et $h(t) = o(t)$, on a la limite*

$$\sqrt{t} \exp\left(\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}\right) u^t\left(t, \sqrt{2t} + x(t)\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_u(a), \quad (2.41)$$

où la constante $C_u(a)$ est définie par (2.29) Si \mathcal{H} est un ensemble de fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} tel que $h(t)/t$ tend uniformément vers 0 pour $h \in \mathcal{H}$, alors la convergence (2.41) est uniforme pour $h \in \mathcal{H}$.

Démonstration. La démonstration de cette proposition est identique à celle de la proposition 2.10 à un point près. On considère les fonctions ψ^t associées aux fonctions u^t et on montre tout d'abord que

$$\sqrt{t} \exp\left(\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}\right) \psi^t\left(r, t, \sqrt{2t} + x(t)\right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_u(r, a), \quad (2.42)$$

uniformément en $h \in \mathcal{H}$. Pour cela on procède de la même manière que dans la démonstration du lemme 2.11 :

$$\sqrt{t} \exp\left(\sqrt{2}x(t) + \frac{x(t)^2}{2t}\right) \psi\left(r, t, \sqrt{2t} + x(t)\right) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi(t-r)}} e^{-\frac{rx(t)^2}{2t(t-r)}} \int_0^\infty f(t, y) dy,$$

où la fonction f est définie par

$$f(t, y) := u^t(r, y + \sqrt{2}r) e^{\sqrt{2}y} e^{-\frac{y^2}{2(t-r)} + \frac{yx(t)}{t-r}} \left(1 - e^{-2y \frac{x(t) + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t}{t-r}} \right).$$

Par convergence simple de u_t vers u , on a, pour $y \in \mathbb{R}$, la convergence suivante, uniforme en $h \in \mathcal{H}$,

$$f(t, y) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} u(r, y + \sqrt{2}r) e^{\sqrt{2}y} e^{\alpha y} (1 - e^{-2\alpha y}). \quad (2.43)$$

Pour dominer f , on a besoin ici d'une majoration de $u^t(s, x)$ uniforme en t . C'est ici que l'on a besoin de l'hypothèse de convergence de y_0^t . En effet, on a donc $y_0^t \leq y_0 + 1$ pour t suffisamment grand, et par (2.36), on a, pour tout $s \geq 0$ et $x \geq y_0 + 1$,

$$u^t(s, x) \leq e^s e^{-\frac{(x-y_0^t)^2}{2s}} \leq e^s e^{-\frac{(x-y_0-1)^2}{2s}}$$

et on obtient ainsi une domination pour f en procédant comme dans la démonstration du lemme 2.11. On en déduit la convergence (2.42) et ensuite la convergence (2.41) par un raisonnement d'encadrement, identique à celui de la démonstration de la proposition 2.10. \square

2.4 La martingale de McKean

Dans cette sous-partie, nous allons étudier la martingale $(Y(t))_{t \geq 0}$ qui est définie par

$$Y(t) := \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-t(1+\sigma_1^2) + \sqrt{2}\sigma_1 \bar{x}_k(t)}$$

pour $t \geq 0$, où $((\bar{x}_k(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien branchant standard. Rappelons que le fait que $(Y(t))_{t \geq 0}$ soit une martingale, est une conséquence du lemme de regroupement 1.5. Comme elle est en outre positive, elle converge presque sûrement vers une limite Y .

Bovier et Hartung appellent $(Y(t))_{t \geq 0}$ *martingale de McKean* parce qu'elle fut introduite pour la première fois par McKean [20], qui prétendait que Y avait une limite strictement positive p.s. dès que $\sigma_1 \leq 1$. Cependant sa démonstration reposait sur un résultat faux de son article [20] et Lalley et Sellke [18] ont montré que dans le cas $\sigma_1 = 1$ la limite est nulle presque sûrement. Nous travaillons ici dans le cas $\sigma_1 < 1$ et nous allons montrer que $(Y(t))_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable et que la limite est strictement positive p.s., c'est-à-dire que le résultat de McKean est en fait vrai pour $\sigma_1 < 1$.

Théorème 2.13. $(Y(t))_{t \geq 0}$ est une martingale uniformément intégrable et

$$Y(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} Y \text{ p.s. et dans } L^1.$$

En outre, Y est strictement positive presque sûrement.

Démonstration. On a vu que $(Y(t))_{t \geq 0}$ est une martingale qui converge p.s. vers Y . Supposons l'uniforme intégrabilité. Alors la convergence L^1 découle du théorème de convergence L^1 pour les martingales. Montrons maintenant que Y est strictement positive presque sûrement. On fixe un instant $t > 0$. Alors, pour $s \geq 0$, par propriété de branchement en l'instant t , on a

$$\begin{aligned} Y(t+s) &= \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} \sum_{i=1}^{\bar{n}^{(k)}(s)} e^{-(t+s)(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1(\bar{x}_k(t)+\bar{x}_i^{(k)}(s))} \\ &= \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-t(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_k(t)} \sum_{i=1}^{\bar{n}^{(k)}(s)} e^{-s(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_i^{(k)}(s)}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

où les $(\bar{x}_i^{(k)}(s))_{1 \leq i \leq \bar{n}^{(k)}(s), s \geq 0}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont des mouvements browniens branchants standard indépendants. En faisant tendre s vers l'infini dans (2.44), on obtient

$$Y = \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-t(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_k(t)} Y^{(k)},$$

où les $Y^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ sont i.i.d. de même loi que Y . On en déduit que

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(\forall k \in \llbracket 1; \bar{n}(t) \rrbracket, Y^{(k)} = 0) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(Y = 0)^{\bar{n}(t)}]$$

et donc que $\mathbb{P}(Y = 0) \in \{0, 1\}$ car $\bar{n}(t) \geq 1$ p.s. et $\bar{n}(t) \rightarrow \infty$ p.s. quant t tend vers l'infini. Or on a $\mathbb{E}[Y] = 1$ par la convergence L^1 , donc $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$.

Il nous reste donc à montrer l'uniforme intégrabilité. Soit $\epsilon > 0$, on veut montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[Y(t)\mathbb{1}_{Y(t) > a}] \leq \epsilon$. Pour $t \geq 0$, $A > 0$, $r > 0$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, on définit la variable aléatoire

$$Y_{A,r}(t) := \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-t(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_k(t)} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(t)-\sqrt{2}\sigma_1 t \in [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}] \text{ et } \bar{x}_{k,t} \in \mathcal{T}_{t,r,\gamma}^t},$$

qui est une troncature de la somme qui définit $Y(t)$, où l'on ne garde que les particules proches de $\sqrt{2}\sigma_1 t$ à l'instant t et dont la trajectoire jusqu'à l'instant t est dans le tube défini par $\mathcal{T}_{t,r,\gamma}^t$. Ces particules sont celles qui contribuent le plus à $Y(t)$: nous allons montrer que pour A et r grand, $Y_{A,r}(t)$ approche bien $Y(t)$. Tout d'abord, on a $Y_{A,r}(t) \leq Y(t)$. En utilisant le lemme de regroupement 1.5, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(t) - Y_{A,r}(t)] &= e^t \mathbb{E} \left[e^{-t(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1 B_t} \mathbb{1}_{B_t - \sqrt{2}\sigma_1 t \notin [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}] \text{ ou } (B_s - \frac{s}{t} B_t)_{0 \leq s \leq t} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{t,r,\gamma}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-t\sigma_1^2 + \sqrt{2}\sigma_1 B_t} \mathbb{1}_{B_t - \sqrt{2}\sigma_1 t \notin [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]} \right] \\ &\quad + \mathbb{E} \left[e^{-t\sigma_1^2 + \sqrt{2}\sigma_1 B_t} \right] \mathbb{P}(\xi \notin \mathcal{S}_{r,\gamma}^t), \end{aligned} \quad (2.45)$$

où B est un mouvement brownien standard et ξ un pont brownien entre 0 et 0 de longueur t . D'après le lemme 2.7, pour r suffisamment grand, pour tout $t \geq 0$,

$\mathbb{P}(\xi \notin \mathcal{S}_{r,\gamma}^t) \leq \epsilon/6$ et (2.45) est donc majoré par

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} e^{-t\sigma_1^2 + \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}x} \mathbb{1}_{x - \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t} \notin [-A;A]} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx + 1 \times \frac{\epsilon}{6} \\
&= \int_{y \notin [-A;A]} e^{-t\sigma_1^2 + \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}(y + \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t})} \frac{e^{-(y + \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy + \frac{\epsilon}{6} \\
&= \int_{y \notin [-A;A]} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy + \frac{\epsilon}{6}, \tag{2.46}
\end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $y = x - \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}$, puis regroupé les deux exponentielles. Pour A suffisamment grand, on a (2.46) $\leq \epsilon/6$. On a donc montré que pour r et A grand, pour tout $t \geq 0$, on a l'encadrement $0 \leq \mathbb{E}[Y(t) - Y_{A,r}(t)] \leq \epsilon/3$.

Maintenant que l'on a montré que $Y(t)$ et $Y_{A,r}(t)$ sont proches dans L^1 uniformément en t , on fixe A et r et on veut montrer que $(Y_{A,r}(t))_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable et pour cela, on va montrer que $(Y_{A,r}(t))_{t \geq 0}$ est bornée dans L^2 . Pour $t \geq 0$, on calcule donc le moment d'ordre 2 de $Y_{A,r}(t)$:

$$\mathbb{E}[(Y_{A,r}(t))^2] = (T1) + (T2),$$

où l'on a séparé les carrés et les produits mixtes en posant

$$\begin{aligned}
(T1) &:= \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-2t(1+\sigma_1^2) + 2\sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_k(t)} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(t) - \sqrt{2}\sigma_1 t \notin [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]} \text{ et } x_{k,t} \in \mathcal{T}_{t,r,\gamma}^t \right] \\
(T2) &:= \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\bar{n}(t)} e^{-2t(1+\sigma_1^2) + \sqrt{2}\sigma_1(\bar{x}_i(t) + \bar{x}_j(t))} \mathbb{1}_{\bar{x}_i(t), \bar{x}_j(t) \in \sqrt{2}\sigma_1 t + [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]} \text{ et } \bar{x}_{i,t}, \bar{x}_{j,t} \in \mathcal{T}_{t,r,\gamma}^t \right].
\end{aligned}$$

Commençons par majorer (T1), en utilisant le lemme de regroupement 1.5 comme précédemment et en majorant l'indicatrice d'appartenance à $\mathcal{T}_{t,r,\gamma}^t$ par 1 :

$$\begin{aligned}
(T1) &\leq e^t \int_{\mathbb{R}} e^{-2t(1+\sigma_1^2) + 2\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}x} \mathbb{1}_{x - \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t} \in [-A;A]} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= e^{-(1-\sigma_1^2)t} \int_{-A}^A e^{\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}y} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&\leq e^{-(1-\sigma_1^2)t} \int_{-A}^A e^{\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}y} dy \\
&= e^{-(1-\sigma_1^2)t} \times \frac{e^{\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}A} - e^{-\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}A}}{\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{t}}. \tag{2.47}
\end{aligned}$$

Comme (2.47) est une fonction continue de $t \in \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en l'infini, elle admet un maximum que l'on note $D_1(\sigma_1, A)$. On a donc montré que pour tout $t \geq 0$, $(T1) \leq D_1(\sigma_1, A)$. Majorons à présent (T2). On utilise le lemme 1.6 de regroupement d'ordre 2

$$\begin{aligned}
(T2) &= K e^t \int_0^t e^{t-s} \mathbb{E} \left[e^{-2t(1+\sigma_1^2) + \sqrt{2}\sigma_1(B_t^{(1,s)} + B_t^{(2,s)})} \mathbb{1}_{B_t^{(1,s)}, B_t^{(2,s)} \in \sqrt{2}\sigma_1 t + [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]} \right. \\
&\quad \left. \times \mathbb{1}_{(B_r^{(1,s)})_{r \in [0;t]}, (B_r^{(2,s)})_{r \in [0;t]} \in \mathcal{T}_{t,r,\gamma}^t} \right] ds \tag{2.48}
\end{aligned}$$

où $B^{(1,s)}$ et $B^{(2,s)}$ sont définis dans le lemme 1.6, c'est-à-dire ce sont deux mouvements browniens égaux jusqu'à l'instant s et indépendants ensuite. Du contrôle fourni par $\mathcal{T}_{t,r,\gamma}^t$ on ne garde que le contrôle à l'instant s et, comme on a $B_s^{(1,s)} = B_s^{(2,s)}$ ainsi que l'identité en loi

$$(B_s^{(1,s)}, B_t^{(1,s)}, B_t^{(2,s)}) \stackrel{\text{loi}}{=} (\sqrt{s}W_1, \sqrt{s}W_1 + \sqrt{t-s}W_2, \sqrt{s}W_1 + \sqrt{t-s}W_3),$$

avec W_1, W_2 et W_3 indépendants de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, on peut majorer (2.48) par

$$\begin{aligned} & K \int_0^t e^{-s-2t\sigma_1^2} \mathbb{E} \left[e^{\sqrt{2}\sigma_1(2\sqrt{s}W_1 + \sqrt{t-s}(W_2+W_3))} \mathbb{1}_{W_2, W_3 \in \frac{\sqrt{2}\sigma_1 t - W_1 \sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} + [-\frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}; \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}]} \right. \\ & \times \mathbb{1}_{|\sqrt{s}W_1 - \frac{s}{t}(\sqrt{s}W_1 + \sqrt{t-s}W_2)| \leq ((s \wedge (t-s)) \vee r)^\gamma \text{ et } |\sqrt{s}W_1 - \frac{s}{t}(\sqrt{s}W_1 + \sqrt{t-s}W_3)| \leq ((s \wedge (t-s)) \vee r)^\gamma} \Big] ds \\ & \leq K \int_0^t e^{-s-2t\sigma_1^2} \mathbb{E} \left[e^{\sqrt{2}\sigma_1(2\sqrt{s}W_1 + \sqrt{t-s}(W_2+W_3))} \mathbb{1}_{W_2, W_3 \in \frac{\sqrt{2}\sigma_1 t - W_1 \sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} + [-\frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}; \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}]} \right. \\ & \left. \times \mathbb{1}_{|W_1 - \sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s}| \leq I(s,t)} \right] ds, \end{aligned} \quad (2.49)$$

en utilisant le contrôle fourni par la première indicatrice et l'inégalité triangulaire pour majorer la deuxième et en posant $I(s, t) := ((s \wedge (t-s)) \vee r)^\gamma / \sqrt{s} + A\sqrt{s}/\sqrt{t}$. Comme W_1, W_2 et W_3 sont indépendants, (2.49) est égal à

$$\begin{aligned} & K \int_0^t e^{-s-2t\sigma_1^2} \int_{\sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s} - I(s,t)}^{\sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s} + I(s,t)} e^{2\sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s}x} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\ & \times \left(\int_{\frac{\sqrt{2}\sigma_1 t - x\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} - \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}}^{\frac{\sqrt{2}\sigma_1 t - x\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} + \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}} e^{\sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{t-s}y} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \right)^2 dx ds \\ & = K \int_0^t e^{-s-2t\sigma_1^2} \int_{-I(s,t)}^{I(s,t)} e^{4\sigma_1^2 s + 2\sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s}z} \frac{e^{-(z + \sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\ & \times \left(\int_{\frac{\sqrt{2}\sigma_1(t-s) - z\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} - \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}}^{\frac{\sqrt{2}\sigma_1(t-s) - z\sqrt{s}}{\sqrt{t-s}} + \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}} e^{\sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{t-s}y} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \right)^2 dz ds \\ & = K \int_0^t e^{-s-2t\sigma_1^2 + 4\sigma_1^2 s} \int_{-I(s,t)}^{I(s,t)} \frac{e^{-(z - \sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\frac{-z\sqrt{s} - A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}}^{\frac{-z\sqrt{s} + A\sqrt{t}}{\sqrt{t-s}}} e^{\sigma_1^2(t-s)} \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dw \right)^2 dz ds \\ & \leq K \int_0^t e^{-(1-2\sigma_1^2)s} \int_{-I(s,t)}^{I(s,t)} \frac{e^{-(z - \sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz ds, \end{aligned} \quad (2.50)$$

où l'on a successivement effectué les changements de variables $z = x - \sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{s}$ et $w = y - \sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{t-s}$, puis majoré l'intégrale sur w par $\exp(\sigma_1^2(t-s))$. Pour $t \geq 2r$, on découpe l'intégrale sur s en trois morceaux : (2.50) = $R_1 + R_2 + R_3$, en coupant en r et $t-r$. Pour R_1 , on majore l'intégrale sur z par 1 et on obtient

$$R_1 \leq K \int_0^r e^{-(1-2\sigma_1^2)s} ds =: D_{2,1}(\sigma_1, r).$$

Pour R_2 , on effectue le changement de variable $v = z - \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{s}$, on majore la borne supérieure de l'intégrale par $+\infty$ et on obtient

$$R_2 \leq K \int_r^{t-r} e^{-(1-2\sigma_1^2)s} \int_{\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{s}-I(s,t)}^{\infty} \frac{e^{-v^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dv ds.$$

Pour $s \in [r; t-r]$, on a $I(s,t) = (s \wedge (t-s))^\gamma / \sqrt{s} + A\sqrt{s}/\sqrt{t} \leq s^{\gamma-1/2} + A$ et, comme $1/2 < \gamma < 1$, il existe $s_0(A) > 0$ tel que pour tout $s \geq s_0(A)$,

$$s^{\gamma-1/2} + A \leq \min\left(\frac{1-\sigma_1^2}{\sqrt{2}\sigma_1}, \sqrt{2}\sigma_1\right) \sqrt{s}. \quad (2.51)$$

Quitte à modifier le choix de r effectué, on suppose $r \geq s_0(A)$. Alors on a $\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{s} - I(s,t) \geq 0$, donc par l'estimation de la queue gaussienne (2.37) on en déduit :

$$\begin{aligned} R_2 &\leq K \int_r^{t-r} e^{-(1-2\sigma_1^2)s} e^{-(\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{s}-I(s,t))^2/2} ds \\ &\leq K \int_r^{t-r} e^{-(1-\sigma_1^2)s + \sqrt{2}\sigma_1\sqrt{s}I(s,t)} ds \\ &\leq K \int_r^{t-r} e^{-\frac{1}{2}(1-\sigma_1^2)s} ds, \end{aligned}$$

en utilisant de nouveau l'inégalité (2.51). On en conclut donc

$$R_2 \leq \frac{2K}{1-\sigma_1^2} e^{-\frac{1}{2}(1-\sigma_1^2)r} =: D_{2,2}(\sigma_1, r).$$

Pour R_3 , on a $s \in [t-r; t]$ et donc $I(s,t) = r^\gamma / \sqrt{s} + A\sqrt{s}/\sqrt{t} \leq r^{\gamma-1/2} + A$. Comme $r \geq s_0(A)$, on peut utiliser l'inégalité (2.51) pour majorer $I(s,t)$ et on obtient, de la même manière que pour R_2 ,

$$R_3 \leq K \int_{t-r}^t e^{-\frac{1}{2}(1-\sigma_1^2)s} ds \leq K \int_r^\infty e^{-\frac{1}{2}(1-\sigma_1^2)s} ds = D_{2,2}(\sigma_1, r),$$

en utilisant que $t \geq 2r$. On a donc montré que (2.50) $\leq D_{2,1}(\sigma_1, r) + 2D_{2,2}(\sigma_1, r)$ pour $t \geq 2r$. Mais pour $t \leq 2r$, on a (2.50) $\leq K2re^{-(1-\sigma_1^2)2r}$, en majorant l'intégrale sur z par 1. On en conclut donc que

$$(T2) \leq \max\left(D_{2,1}(\sigma_1, r) + 2D_{2,2}(\sigma_1, r), K2re^{-(1-\sigma_1^2)2r}\right) =: D_2(\sigma_1, r)$$

et que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[(Y_{A,r}(t))^2] \leq D_1(\sigma_1, A) + D_2(\sigma_1, r)$, c'est-à-dire $(Y_{A,r}(t))_{t \geq 0}$ est bornée dans L^2 .

Nous allons pouvoir montrer maintenant qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[Y(t)\mathbb{1}_{Y(t) > a}] \leq \epsilon$. On fait apparaître $Y_{A,r}(t)$ pour majorer cette espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y(t)\mathbb{1}_{Y(t) > a}] &= \mathbb{E}[Y_{A,r}(t)\mathbb{1}_{Y(t) > a}] + \mathbb{E}[(Y(t) - Y_{A,r}(t))\mathbb{1}_{Y(t) > a}] \\ &\leq \mathbb{E}[Y_{A,r}(t)\mathbb{1}_{Y_{A,r}(t) > \frac{a}{2}}] + \mathbb{E}[Y_{A,r}(t)(\mathbb{1}_{Y(t) > a} - \mathbb{1}_{Y_{A,r}(t) > \frac{a}{2}})] \\ &\quad + \mathbb{E}[Y(t) - Y_{A,r}(t)]. \end{aligned}$$

On utilise le fait que $(Y_{A,r}(t))_{t \geq 0}$ soit bornée dans L^2 pour majorer le premier terme :

$$\mathbb{E} \left[Y_{A,r}(t) \mathbb{1}_{Y_{A,r}(t) > \frac{a}{2}} \right] \leq \frac{2}{a} \mathbb{E} \left[(Y_{A,r}(t))^2 \right] \leq \frac{2}{a} (D_1(\sigma_1, A) + D_2(\sigma_1, r)) \leq \frac{\epsilon}{3},$$

pour $a \geq 6(D_1(\sigma_1, A) + D_2(\sigma_1, r))/\epsilon$. Pour le deuxième terme, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[Y_{A,r}(t) (\mathbb{1}_{Y(t) > a} - \mathbb{1}_{Y_{A,r}(t) > \frac{a}{2}}) \right] &\leq \mathbb{E} \left[Y_{A,r}(t) \mathbb{1}_{Y(t) > a} \mathbb{1}_{Y_{A,r}(t) \leq \frac{a}{2}} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[Y_{A,r}(t) \mathbb{1}_{Y(t) - Y_{A,r}(t) \geq Y_{A,r}(t)} \right] \\ &\leq \mathbb{E} [Y(t) - Y_{A,r}(t)]. \end{aligned}$$

Or on a choisi A et r tels que $\mathbb{E} [Y(t) - Y_{A,r}(t)] \leq \epsilon/3$ donc on a $\mathbb{E} [Y(t) \mathbb{1}_{Y(t) > a}] \leq \epsilon$ pour tout $t \geq 0$, ce qui conclut la démonstration. \square

Remarque. On remarque que pour A et r fixés, les constantes $D_1(\sigma_1, A)$, $D_{2,1}(\sigma_1, r)$, $D_{2,2}(\sigma_1, r)$ et $D_2(\sigma_1, r)$, explicitées dans la démonstration, sont des fonctions continues de σ_1 . On pourra donc utiliser qu'il existe une constante $D(A, r) > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, $D_1(\sigma_{1,t}, A) + D_2(\sigma_{1,t}, r) \leq D(A, r)$.

Nous allons également avoir besoin dans la suite d'un contrôle sur les variables aléatoires

$$\tilde{Y}_{A,\gamma}(t) := \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-t(1+\sigma_1^2) + \sqrt{2}\sigma_1 \bar{x}_k(t)} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(t) - \sqrt{2}\sigma_1 t \in [-At^\gamma; At^\gamma]},$$

pour $t \geq 0$, $A > 0$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$.

Lemme 2.14. *La famille de variables aléatoires $(\tilde{Y}_{A,\gamma}(t))_{t \geq 0, A > 0, \frac{1}{2} < \gamma < 1}$ est uniformément intégrable. En outre, pour tous $A > 0$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, on a la convergence*

$$\tilde{Y}_{A,\gamma}(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L^1} Y. \quad (2.52)$$

Démonstration. On remarque que pour tous $t \geq 0$, $A > 0$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, on a $\tilde{Y}_{A,\gamma}(t) \leq Y(t)$, donc pour $a \in \mathbb{R}$, on en déduit

$$\mathbb{E} \left[\tilde{Y}_{A,\gamma}(t) \mathbb{1}_{\tilde{Y}_{A,\gamma}(t) > a} \right] \leq \mathbb{E} \left[Y(t) \mathbb{1}_{Y(t) > a} \right].$$

L'uniforme intégrabilité de $(\tilde{Y}_{A,\gamma}(t))_{t \geq 0, A > 0, \frac{1}{2} < \gamma < 1}$ est donc une conséquence de l'uniforme intégrabilité de $(Y(t))_{t \geq 0}$ montrée dans le théorème précédent.

Montrons à présent la convergence (2.52). Soient $t \geq 0$, $A > 0$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, on a de la même manière que dans la démonstration du théorème 2.13, en utilisant le lemme de regroupement 1.5,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [Y(t) - \tilde{Y}_{A,\gamma}(t)] &= e^t \int_{\mathbb{R}} e^{-t(1+\sigma_1^2) + \sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{tx}} \mathbb{1}_{\sqrt{tx} - \sqrt{2}\sigma_1 t \notin [-At^\gamma; At^\gamma]} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \int_{y \notin [-At^{\gamma-\frac{1}{2}}; At^{\gamma-\frac{1}{2}}]} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

avec le changement de variable $y = x - \sqrt{2}\sigma_1 \sqrt{t}$. Comme $Y(t) - \tilde{Y}_{A,\gamma}(t) \geq 0$, on a donc montré que $Y(t) - \tilde{Y}_{A,\gamma}(t)$ tend vers 0 dans L^1 quand t tend vers l'infini. Or $Y(t)$ tend vers Y dans L^1 d'après le théorème 2.13, donc $\tilde{Y}_{A,\gamma}(t)$ tend vers Y dans L^1 quand t tend vers l'infini. \square

Cependant, nous travaillons ici dans le cas de vitesses dépendantes du temps, nous allons donc avoir besoin d'un résultat supplémentaire par rapport à l'article [6] de Bovier et Hartung, concernant la convergence des variables aléatoires obtenues à partir de $\tilde{Y}_{A,\gamma}(s)$ en remplaçant σ_1 par $\sigma_{1,t}$: on pose

$$\tilde{Y}_{A,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(s) := \sum_{k=1}^{\bar{n}(s)} e^{-s(1+\sigma_{1,t}^2)+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_k(s)} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(s)-\sqrt{2}\sigma_{1,t}s \in [-As^\gamma; As^\gamma]},$$

pour $t, s \geq 0$, $A > 0$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$. Le lemme suivant est un résultat de convergence pour ces variables aléatoires quand t tend vers l'infini, avec s dépendant convenablement de t :

Lemme 2.15. *Pour $t \geq 0$, on pose $\epsilon(t) := \sigma_{1,t} - \sigma_1$ et $\Delta(t) := \sqrt{t} \wedge \frac{1}{\epsilon(t)}$. Alors, pour tous $A > 0$ et $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, on a la convergence*

$$\tilde{Y}_{A,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(\Delta(t)) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L^1} Y. \quad (2.53)$$

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\tilde{Y}_{A,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(\Delta(t))$ est proche de $\tilde{Y}_{A,\gamma}(\Delta(t))$ dans L^1 . Pour alléger les notations, on note $I := \sqrt{2}\sigma_1\Delta(t) + [-A\Delta(t)^\gamma; A\Delta(t)^\gamma]$ et $I_t := \sqrt{2}\sigma_{1,t}\Delta(t) + [-A\Delta(t)^\gamma; A\Delta(t)^\gamma]$. On majore alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left| \tilde{Y}_{A,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(\Delta(t)) - \tilde{Y}_{A,\gamma}(\Delta(t)) \right| \right] \\ & \leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\bar{n}(\Delta(t))} \left| e^{-\Delta(t)(1+\sigma_{1,t}^2)+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_k(\Delta(t))} - e^{-\Delta(t)(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_k(\Delta(t))} \right| \mathbb{1}_{\bar{x}_k(\Delta(t)) \in I \cap I_t} \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\bar{n}(\Delta(t))} e^{-\Delta(t)(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_k(\Delta(t))} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(\Delta(t)) \in I \cap (I_t)^c} \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\bar{n}(\Delta(t))} e^{-\Delta(t)(1+\sigma_{1,t}^2)+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_k(\Delta(t))} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(\Delta(t)) \in I_t \cap I^c} \right] \\ & =: Q_1 + Q_2 + Q_3. \end{aligned}$$

Pour majorer Q_2 , on procède comme dans la démonstration du lemme 2.14 avec le lemme de regroupement 1.5,

$$\begin{aligned} Q_2 & = e^{\Delta(t)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\Delta(t)(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1\sqrt{\Delta(t)}x} \mathbb{1}_{\sqrt{\Delta(t)}x \in I \cap (I_t)^c} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ & \leq \int_{y \notin \sqrt{2}\epsilon(t)\Delta(t)^{\frac{1}{2}} + [-A\Delta(t)^{\gamma-\frac{1}{2}}; A\Delta(t)^{\gamma-\frac{1}{2}}]} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \end{aligned}$$

avec le changement de variable $y = x - \sqrt{2}\sigma_1\Delta(t)^{1/2}$. Or, quand t tend vers l'infini, $\epsilon(t)\Delta(t)^{1/2} \leq \epsilon(t)^{1/2}$ tend vers 0 et $A\Delta(t)^{\gamma-1/2}$ tend vers l'infini, donc Q_2 tend vers 0. De même Q_3 tend vers 0. Il reste à contrôler Q_1 . On a

$$Q_1 \leq \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\bar{n}(\Delta(t))} e^{-\Delta(t)(1+\sigma_1^2)+\sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_k(\Delta(t))} \left| e^{-\Delta(t)(\sigma_{1,t}^2-\sigma_1^2)+\sqrt{2}\epsilon(t)\bar{x}_k(\Delta(t))} - 1 \right| \mathbb{1}_{\bar{x}_k(\Delta(t)) \in I} \right].$$

Or, sur $\{\bar{x}_k(\Delta(t)) \in I\}$, on a

$$\begin{aligned} \left| e^{-\Delta(t)(\sigma_{1,t}^2 - \sigma_1^2) + \sqrt{2}\epsilon(t)\bar{x}_k(\Delta(t))} - 1 \right| &= \left| e^{-\Delta(t)(\sigma_{1,t}^2 - \sigma_1^2 - 2\epsilon(t)\sigma_1) + \sqrt{2}\epsilon(t)(\bar{x}_k(\Delta(t)) - \sqrt{2}\sigma_1\Delta(t))} - 1 \right| \\ &\leq e^{\Delta(t)\epsilon(t)^2 + \sqrt{2}|\epsilon(t)|A\Delta(t)^\gamma} - 1, \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $|e^x - 1| \leq e^{|x|} - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} Q_1 &\leq \left(e^{\Delta(t)\epsilon(t)^2 + \sqrt{2}|\epsilon(t)|A\Delta(t)^\gamma} - 1 \right) \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{\bar{n}(\Delta(t))} e^{-\Delta(t)(1 + \sigma_1^2) + \sqrt{2}\sigma_1\bar{x}_k(\Delta(t))} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(\Delta(t)) \in I} \right] \\ &\leq \left(e^{\epsilon(t) + \sqrt{2}A|\epsilon(t)|^{1-\gamma}} - 1 \right) \mathbb{E}[Y(\Delta(t))] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

car $\epsilon(t)$ tend vers 0 et $\mathbb{E}[Y(\Delta(t))] = 1$. On a donc montré que

$$\mathbb{E} \left[\left| \tilde{Y}_{A,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(\Delta(t)) - \tilde{Y}_{A,\gamma}(\Delta(t)) \right| \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

or par le lemme 2.14, on sait que $\tilde{Y}_{A,\gamma}(\Delta(t))$ converge vers Y dans L^1 , donc $\tilde{Y}_{A,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(\Delta(t))$ converge également vers Y dans L^1 quand t tend vers l'infini. \square

2.5 Convergence de la particule extrême

Dans cette sous-partie, nous allons montrer la partie (i) du théorème 2.4, c'est-à-dire la convergence en loi de $M(t) - \tilde{m}(t)$ quand t tend vers l'infini, où $M(t)$ est la particule extrême à l'instant t du mouvement brownien branchant à deux vitesses d'horizon t et

$$\tilde{m}(t) = \sqrt{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t,$$

ainsi que la description de la limite (2.4). Commençons par montrer dans le lemme suivant que $M(t) - \tilde{m}(t)$ ne peut pas être trop petit pour t grand :

Lemme 2.16. *Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que, pour t suffisamment grand,*

$$\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq -d) \leq \epsilon.$$

Ce lemme montre qu'avec forte probabilité il existe des particules au-dessus de $\tilde{m}(t) - d$, c'est-à-dire des particules extrêmes dont on a décrit la trajectoire dans la sous-partie 2.2. Il n'est pas démontré par Bovier et Hartung [6] qui font référence à l'article [13] de Fang et Zeitouni dans lequel ils montrent un lemme analogue pour la marche aléatoire branchante à deux vitesses, dont s'inspire en partie la démonstration qui va suivre.

Nous allons d'abord introduire une nouvelle notation. Pour $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, $r > 0$ et $t \geq 0$, on définit le borélien $\hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t$ de $\mathcal{D}([0; t], \mathbb{R})$ comme l'ensemble

$$\left\{ X \in \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R}) \mid \forall s \in [0; t], \left| X(s) - \frac{\Sigma_t^2(s)}{t} X(t) \right| \leq \left((\Sigma_t^2(s) \wedge (t - \Sigma_t^2(s))) \vee r \right)^\gamma \right\}.$$

Cette définition ressemble à celle de $\mathcal{T}_{s,r,\gamma}^t$ introduite dans la sous-partie 2.2 mais cet ensemble permet de contrôler la trajectoire des particules sur $[0; t]$ tout entier. En

effet, l'ensemble $\mathcal{T}_{s,r,\gamma}^t$ n'est utile que pour $s \leq b_t$ car c'est uniquement dans ce cas que l'on peut se ramener au lemme 2.7 sur les trajectoires du pont brownien : si $s > b_t$, la trajectoire sur $[0; s]$ d'une particule du mouvement brownien branchant à deux vitesses n'est plus celle d'un simple mouvement brownien de variance $\sigma_{1,t}$. En revanche, ce changement de comportement en b_t est pris en compte dans la définition de $\hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t$ et, si X est la trajectoire sur $[0; t]$ d'une particule du mouvement brownien branchant à deux vitesses, c'est-à-dire $X = (B_{\Sigma_t^2(s)})_{0 \leq s \leq t}$ avec B un mouvement brownien, alors on a l'équivalence

$$X \in \hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t \Leftrightarrow \xi \in \mathcal{S}_{r,\gamma}^t, \quad (2.54)$$

où $\xi = (B_s - (s/t)B_t)_{0 \leq s \leq t}$ est un pont brownien entre 0 et 0 de longueur t , et $\xi \in \mathcal{S}_{r,\gamma}^t$ a lieu avec forte probabilité pour r grand d'après le lemme 2.7.

Démonstration. Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour t suffisamment grand, $\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) > 0) \geq c$. On fixe $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ et pour $r > 0$ et $t \geq 0$, on pose

$$N_r(t) := \sum_{k=1}^{n^t(t)} \mathbb{1}_{x_k^t(t) > \tilde{m}(t)} \mathbb{1}_{x_{k,t}^t \in \hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t}$$

le nombre de particules présentes strictement au-dessus de $\tilde{m}(t)$ dont les trajectoires appartiennent à $\hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t$. On a alors les minoration

$$\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) > 0) \geq \mathbb{P}(N_r(t) > 0) \geq \frac{\mathbb{E}[N_r(t)]^2}{\mathbb{E}[N_r(t)^2]},$$

la dernière étant une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous allons donc chercher à minorer le moment d'ordre 1 de $N_r(t)$ et à majorer son moment d'ordre 2. Le fait de considérer $N_r(t)$ au lieu du nombre de particules présentes strictement au-dessus de $\tilde{m}(t)$ (pour lequel on aurait une égalité entre les deux premiers membres de l'inégalité ci-dessus) n'est pas un désavantage pour minorer le moment d'ordre 1, car les particules extrémales ont avec grande probabilité une trajectoire dans $\hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t$, et le contrôle sur les trajectoires de ces particules est très utile pour majorer le moment d'ordre 2.

Commençons par majorer le moment d'ordre 1. On utilise le lemme de regroupement 2.1 et on obtient, à l'aide de l'équivalence (2.54),

$$\mathbb{E}[N_r(t)] = e^t \mathbb{P}(\sqrt{t}W > \tilde{m}(t)) \mathbb{P}(\xi \in \tilde{\mathcal{T}}_{t,r,\gamma}), \quad (2.55)$$

avec W de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et ξ un pont brownien entre 0 et 0 de longueur t . On utilise alors la minoration de la queue gaussienne

$$\forall u \geq 2, \int_u^\infty \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \geq \frac{1}{2} \times \frac{e^{-u^2/2}}{u}$$

et on obtient ainsi la minoration

$$e^t \mathbb{P}(\sqrt{t}W > \tilde{m}(t)) \geq e^t \frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{2\pi}\tilde{m}(t)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{m}(t)}{\sqrt{t}}\right)^2} \geq e^t \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} e^{-t + \frac{\log t}{2} - \frac{(\log t)^2}{8t}} \geq \frac{1}{4\pi},$$

pour t suffisamment grand. On utilise alors le lemme 2.7 pour fixer r suffisamment grand tel que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(\xi \notin \tilde{\mathcal{T}}_{t,r,\gamma}) \leq 1/2$. On en conclut que pour t grand, $\mathbb{E}[N_{A,r}(t)] \geq 1/8\pi$

Maintenant, majorons le moment d'ordre 2. On a $\mathbb{E}[N_r(t)^2] = \mathbb{E}[N_r(t)] + S$ où

$$S := \mathbb{E} \left[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \mathbb{1}_{x_i^t(t), x_j^t(t) > \tilde{m}(t)} \mathbb{1}_{x_i^t(t), x_j^t(t) \in \hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t} \right]$$

est la somme des produits mixtes, car $\mathbb{E}[N_r(t)]$ est égal à la somme des carrés. Pour majorer $\mathbb{E}[N_r(t)]$, on part de (2.55), on majore la deuxième probabilité par 1 et on utilise cette fois la majoration de la queue gaussienne (2.9) pour obtenir

$$\mathbb{E}[N_r(t)] \leq e^t \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi\tilde{m}(t)}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{m}(t)}{\sqrt{t}}\right)^2} = e^t \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{t}} e^{-t+\frac{1}{2}\log t}(1+o(1)) \leq 1$$

pour t suffisamment grand. Pour majorer S , on utilise tout d'abord le lemme 2.2 de regroupement d'ordre 2 qui nous donne

$$S = K e^t \int_0^t e^{t-s} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{B_t^{(1,s)}, B_t^{(2,s)} > \tilde{m}(t)} \mathbb{1}_{(B_{\Sigma_t^2(r)}^{(1,s)})_{r \in [0;t]}, (B_{\Sigma_t^2(r)}^{(2,s)})_{r \in [0;t]} \in \hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t} \right] ds, \quad (2.56)$$

où $B^{(1,s)}$ et $B^{(2,s)}$ sont définis dans le lemme 2.2 : ce sont deux mouvements browniens égaux jusqu'à l'instant $\Sigma_t^2(s)$ et indépendants ensuite. On pose pour $s \in [0;t]$, $f_{r,\gamma}^t(s) := ((\Sigma_t^2(s) \wedge (t - \Sigma_t^2(s))) \vee r)^\gamma$. Si $X \in \hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t$ vérifie $X(t) > \tilde{m}(t)$, alors pour tout $s \in [0;t]$,

$$X(t) - X(s) \geq \frac{t - \Sigma_t^2(s)}{t} X(t) - \left| X(s) - \frac{\Sigma_t^2(s)}{t} X(t) \right| \geq \frac{t - \Sigma_t^2(s)}{t} \tilde{m}(t) - f_{r,\gamma}^t(s).$$

On en déduit donc que l'espérance dans (2.56) est majorée par

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(B_t^{(1,s)} > \tilde{m}(t) \text{ et } B_{\Sigma_t^2(\cdot)}^{(1,s)} \in \hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t \text{ et } B_t^{(2,s)} - B_{\Sigma_t^2(s)}^{(2,s)} \geq \frac{t - \Sigma_t^2(s)}{t} \tilde{m}(t) - f_{r,\gamma}^t(s) \right) \\ &= \mathbb{P} \left(B_t^{(1,s)} > \tilde{m}(t) \text{ et } B_{\Sigma_t^2(\cdot)}^{(1,s)} \in \hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t \right) \mathbb{P} \left(B_t^{(2,s)} - B_{\Sigma_t^2(s)}^{(2,s)} \geq \frac{t - \Sigma_t^2(s)}{t} \tilde{m}(t) - f_{r,\gamma}^t(s) \right) \\ &= e^{-t} \mathbb{E}[N_{A,r}(t)] \mathbb{P} \left(\sqrt{t - \Sigma_t^2(s)} W \geq \frac{t - \Sigma_t^2(s)}{t} \tilde{m}(t) - f_{r,\gamma}^t(s) \right), \end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance entre $B_t^{(2,s)} - B_{\Sigma_t^2(s)}^{(2,s)}$ et $(B_{\Sigma_t^2(r)}^{(1,s)})_{r \in [0;t]}$ puis le lemme de regroupement 2.1 et en considérant W de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Or on a déjà montré que $\mathbb{E}[N_r(t)] \leq 1$ pour t suffisamment grand, donc (2.56) est majoré par

$$K \int_0^t e^{t-s} \mathbb{P} \left(W \geq \frac{\sqrt{t - \Sigma_t^2(s)}}{t} \tilde{m}(t) - \frac{f_{r,\gamma}^t(s)}{\sqrt{t - \Sigma_t^2(s)}} \right) ds = S_1 + S_2 + S_3 + S_4,$$

où S_1 est l'intégrale de 0 à $(b_t t) \wedge (r/\sigma_{1,t}^2)$, S_2 celle de $(b_t t) \wedge (r/\sigma_{1,t}^2)$ à $b_t t$, S_3 celle de $b_t t$ à $t - r/\sigma_{2,t}^2$ et S_4 celle de $t - r/\sigma_{2,t}^2$ à t , en considérant t suffisamment grand tel

que l'on ait $b_it \leq t - r/\sigma_{2,t}^2$. On remarque que si $\sigma_1 = 0$, alors on n'a pas forcément $r/\sigma_{1,t}^2 \leq b_it$ pour t grand, ce qui explique que l'on considère $(b_it) \wedge (r/\sigma_{1,t}^2)$ au lieu de simplement $r/\sigma_{1,t}^2$.

Commençons par majorer S_1 . Comme $0 \leq s \leq (b_it) \wedge (r/\sigma_{1,t}^2)$, on a $\Sigma_t^2(s) = \sigma_{1,t}^2 s$ et $f_{r,\gamma}^t(s) = r^\gamma$ et donc on a

$$\begin{aligned} S_1 &= K \int_0^{(b_it) \wedge (r/\sigma_{1,t}^2)} e^{t-s} \mathbb{P} \left(W \geq \frac{\sqrt{t - \sigma_{1,t}^2 s}}{t} \tilde{m}(t) - \frac{r^\gamma}{\sqrt{t - \sigma_{1,t}^2 s}} \right) ds \\ &= K \mathbb{P} \left(W \geq \frac{\sqrt{t-r}}{t} \tilde{m}(t) - \frac{r^\gamma}{\sqrt{t-r}} \right) e^t \int_0^{(b_it) \wedge (r/\sigma_{1,t}^2)} e^{-s} ds \\ &\leq K \frac{e^{-u^2/2}}{u} \times e^t, \end{aligned}$$

où l'on utilise l'estimation gaussienne (2.9) avec $u := \tilde{m}(t) \sqrt{t-r}/t - r^\gamma/\sqrt{t-r}$ qui est bien strictement positif pour t grand. On majore alors

$$e^{-u^2/2} = \exp \left(-\frac{\tilde{m}(t)^2}{2t^2} (t-r) + \frac{\tilde{m}(t)}{t} r^\gamma - \frac{r^{2\gamma}}{2(t-r)} \right) \leq e^{-t + \frac{1}{2} \log t + r + \sqrt{2} r^\gamma}$$

et, pour t suffisamment grand, on a $u \geq \sqrt{t}$ donc on obtient

$$S_1 \leq K e^{r + \sqrt{2} r^\gamma} =: c_1(r).$$

Majorons à présent S_2 . Si $r/\sigma_{1,t}^2 \geq b_it$, alors $S_2 = 0$. On suppose donc pour la suite que $r/\sigma_{1,t}^2 < b_it$. On a alors $r/\sigma_{1,t}^2 \leq s \leq b_it$ et donc $\Sigma_t^2(s) = \sigma_{1,t}^2 s$ et $f_{r,\gamma}^t(s) = (\sigma_{1,t}^2 s \wedge (t - \sigma_{1,t}^2 s))^\gamma \leq \sigma_{1,t}^{2\gamma} s^\gamma$. On obtient donc

$$\begin{aligned} S_2 &\leq K \int_{r/\sigma_{1,t}^2}^{b_it} e^{t-s} \mathbb{P} \left(W \geq \frac{\sqrt{t - \sigma_{1,t}^2 s}}{t} \tilde{m}(t) - \frac{\sigma_{1,t}^{2\gamma} s^\gamma}{\sqrt{t - \sigma_{1,t}^2 s}} \right) ds \\ &\leq K \int_{r/\sigma_{1,t}^2}^{b_it} e^{t-s} \frac{e^{-u_s^2/2}}{u_s} ds \end{aligned}$$

où l'on utilise de nouveau l'estimation gaussienne (2.9) avec

$$u_s := \frac{\sqrt{t - \sigma_{1,t}^2 s}}{t} \tilde{m}(t) - \frac{\sigma_{1,t}^{2\gamma} s^\gamma}{\sqrt{t - \sigma_{1,t}^2 s}} \geq \frac{\sqrt{t - \sigma_{1,t}^2 b_it}}{t} \tilde{m}(t) - \frac{\sigma_{1,t}^{2\gamma} (b_it)^\gamma}{\sqrt{t - \sigma_{1,t}^2 b_it}} > 0$$

pour t suffisamment grand indépendant de s . Par cette minoration, on voit aussi que $u_s \geq \sqrt{t} \sigma_{2,t} \sqrt{1 - b_it}$ pour t grand indépendant de s . D'autre part, on majore

$$\begin{aligned} e^{-u_s^2/2} &= \exp \left(-\frac{\tilde{m}(t)^2}{2t^2} (t - \sigma_{1,t}^2 s) + \frac{\tilde{m}(t)}{t} \sigma_{1,t}^{2\gamma} s^\gamma - \frac{\sigma_{1,t}^{4\gamma} s^{2\gamma}}{2(t - \sigma_{1,t}^2 s)} \right) \\ &\leq \exp \left(-t + \sigma_{1,t}^2 s + \frac{\log t}{2} + \sqrt{2} \sigma_{1,t}^{2\gamma} s^\gamma \right). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$S_2 \leq K \int_{r/\sigma_{1,t}^2}^{b_t t} \frac{e^{-(1-\sigma_{1,t}^2)s + \sqrt{2}\sigma_{1,t}^{2\gamma}s^\gamma}}{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} ds \leq \frac{K}{\sigma_{2,t}\sqrt{1-b_t}} \int_{r/\sigma_{1,t}^2}^{b_t t} e^{-\frac{1-\sigma_{1,t}^2}{2}s} ds,$$

en supposant, quitte à modifier le choix de r , que, pour tout $s \geq r$, on ait $\sqrt{2}\sigma_{1,t}^{2\gamma}s^\gamma \leq (1-\sigma_{1,t}^2)s/2$. On en conclut que, pour t suffisamment grand,

$$S_2 \leq \frac{K}{\sqrt{1-b}} \int_r^\infty e^{-\frac{1-\sigma_1^2}{4}s} ds = \frac{4Ke^{-\frac{1-\sigma_1^2}{4}r}}{(1-\sigma_1^2)\sqrt{1-b}} =: c_2(r).$$

Majorons maintenant S_3 . Pour $b_t t \leq s \leq t - r/\sigma_{2,t}^2$, on a $\Sigma_t^2(s) = t - \sigma_{2,t}^2(t-s)$ et $f_{r,\gamma}^t(s) = ((t - \sigma_{2,t}^2(t-s)) \wedge \sigma_{2,t}^2(t-s))^\gamma \leq \sigma_{2,t}^{2\gamma}(t-s)^\gamma$. On a donc la majoration

$$\begin{aligned} S_3 &\leq K \int_{b_t t}^{t-r/\sigma_{2,t}^2} e^{t-s} \mathbb{P} \left(W_0 \geq \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{t-s}}{t} \tilde{m}(t) - \frac{\sigma_{2,t}^{2\gamma}(t-s)^\gamma}{\sigma_{2,t}\sqrt{t-s}} \right) ds \\ &\leq K \int_{b_t t}^{t-r/\sigma_{2,t}^2} e^{t-s} e^{-u_s^2/2} ds \end{aligned}$$

en utilisant cette fois l'estimation gaussienne (2.37) avec

$$u_s := \frac{\sigma_{2,t}\sqrt{t-s}}{t} \tilde{m}(t) - \sigma_{2,t}^{2\gamma-1}(t-s)^{\gamma-\frac{1}{2}} \geq \frac{\sqrt{r}}{t} \tilde{m}(t) - r^{\gamma-\frac{1}{2}} > 0,$$

pour t suffisamment grand, quitte à choisir un r plus grand. On majore ensuite

$$\begin{aligned} e^{-u_s^2/2} &= \exp \left(-\frac{\tilde{m}(t)^2}{2t^2} (t-s)\sigma_{2,t}^2 + \frac{\tilde{m}(t)}{t} \sigma_{2,t}^{2\gamma} (t-s)^\gamma - \sigma_{2,t}^{4\gamma-2} (t-s)^{2\gamma-1} \right) \\ &\leq \exp \left(-(t-s)\sigma_{2,t}^2 + \frac{\log t}{2t} (t-s)\sigma_{2,t}^2 + \sqrt{2}\sigma_{2,t}^{2\gamma} (t-s)^\gamma \right). \end{aligned}$$

On effectue alors le changement de variable $q = t - s$ et on obtient

$$S_3 \leq K \int_{r/\sigma_{2,t}^2}^{(1-b_t)t} e^{-(\sigma_{2,t}^2-1)q + \frac{\log t}{2t} q \sigma_{2,t}^2 + \sqrt{2}\sigma_{2,t}^{2\gamma} q^\gamma} dq.$$

Quitte à prendre de nouveau r plus grand, on peut supposer que, pour tout $q \geq r/(2\sigma_2^2)$, on ait $\sqrt{2}\sigma_{2,t}^{2\gamma}q^\gamma \leq (\sigma_{2,t}^2 - 1)q/4$. En outre, pour t suffisamment grand on a $\sigma_{2,t}^2 \log t/(2t) \leq (\sigma_{2,t}^2 - 1)q/4$ et donc on obtient

$$S_3 \leq K \int_{r/(2\sigma_2^2)}^\infty e^{-\frac{\sigma_{2,t}^2-1}{2}q} dq \leq K \int_{r/(2\sigma_2^2)}^\infty e^{-\frac{\sigma_2^2-1}{4}q} dq = \frac{4Ke^{-\frac{(\sigma_2^2-1)r}{8\sigma_2^2}}}{\sigma_2^2 - 1} =: c_3(r).$$

Enfin, il nous reste la majoration de S_4 . On majore simplement la probabilité sous l'intégrale par 1 et avec le changement de variable $q = t - s$, on obtient

$$S_4 \leq K \int_0^{r/\sigma_{2,t}^2} e^q dq \leq K \int_0^{2r/\sigma_2^2} e^q dq \leq \frac{2Kre^{\frac{2r}{\sigma_2^2}}}{\sigma_2^2} =: c_4(r),$$

pour t suffisamment grand.

On a donc montré que, pour t suffisamment grand,

$$\frac{\mathbb{E} [N_r(t)]^2}{\mathbb{E} [N_r(t)^2]} \geq \frac{1/(8\pi)^2}{1 + c_1(r) + c_2(r) + c_3(r) + c_4(r)} =: c,$$

et donc il existe $t_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq t_0$, $\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) > 0) \geq c$ avec $c > 0$. Nous allons utiliser ce résultat pour montrer le lemme à l'aide de la propriété de branchement. Soit $\epsilon > 0$, on fixe un instant $\delta > 0$ et on s'intéresse aux horizons $t + \delta$ tels que $\delta < b_{t+\delta}(t + \delta)$. Les particules présentes à l'instant δ sont $x_1^{t+\delta}(\delta), \dots, x_{n^{t+\delta}(\delta)}^{t+\delta}(\delta)$. Elles donnent naissance à des mouvements browniens branchants à deux vitesses d'horizon t indépendants $((\tilde{x}_k^{i,t}(s))_{1 \leq k \leq \tilde{n}^{i,t}(s)})_{0 \leq s \leq t}$ pour $1 \leq i \leq n^{t+\delta}(\delta)$, mais avec des vitesses différentes $\tilde{\sigma}_{1,t}^2 := \sigma_{1,t+\delta}^2$ et $\tilde{\sigma}_{2,t}^2 := \sigma_{2,t+\delta}^2$. Alors, par la propriété de branchement, pour $d \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(M(t + \delta) - \tilde{m}(t + \delta) \leq -d) \\ &= \mathbb{P}(\forall k \in \llbracket 1; n^{t+\delta}(t + \delta) \rrbracket, x_k^{t+\delta}(t + \delta) - \tilde{m}(t + \delta) \leq -d) \\ &= \mathbb{P}(\forall i \in \llbracket 1; n^{t+\delta}(\delta) \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1; \tilde{n}^{i,t}(t) \rrbracket, x_i^{t+\delta}(\delta) + \tilde{x}_k^{i,t}(t) - \tilde{m}(t + \delta) \leq -d). \end{aligned} \tag{2.57}$$

L'idée est alors que chaque mouvement brownien branchant lancé à l'instant δ a une probabilité supérieure à c d'avoir une particule plus haute que $\tilde{m}(t)$ et, en fixant δ suffisamment grand, on peut lancer ainsi suffisamment de mouvement browniens branchants indépendants pour qu'avec probabilité supérieure à $1 - \epsilon$ on ait une particule assez haute. On prend $d = 2\sqrt{2}\delta$, alors (2.57) est égal à

$$\mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{n^{t+\delta}(\delta)} \varphi_t(-2\sqrt{2}\delta + \tilde{m}(t + \delta) - \tilde{m}(t) - x_i^{t+\delta}(\delta)) \right] \tag{2.58}$$

où on pose $\varphi_t(y) := \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq \tilde{n}^t(t)} \tilde{x}_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq y)$, avec $((\tilde{x}_k^t(s))_{1 \leq k \leq \tilde{n}^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$ un mouvement brownien branchant d'horizon t à deux vitesses $\tilde{\sigma}_{1,t}^2 := \sigma_{1,t+\delta}^2$ et $\tilde{\sigma}_{2,t}^2 := \sigma_{2,t+\delta}^2$. La fonction φ_t est croissante et, si $x_i^{t+\delta}(\delta) \geq -\sqrt{2}\delta$, alors on a $-2\sqrt{2}\delta + \tilde{m}(t + \delta) - \tilde{m}(t) - x_i^{t+\delta}(\delta) \geq 0$ donc (2.58) est majoré par

$$\mathbb{E} \left[\varphi_t(0)^{Z^{t+\delta}(\delta)} \right], \tag{2.59}$$

où $Z^{t+\delta}(\delta) := \#\{1 \leq i \leq n^{t+\delta}(\delta) \mid x_i^{t+\delta}(\delta) \geq -\sqrt{2}\delta\}$. Or on a $\tilde{\sigma}_{1,t} \rightarrow \sigma_1$ et $\tilde{\sigma}_{2,t} \rightarrow \sigma_2$ quand t tend vers ∞ , donc on peut appliquer le résultat montré au début de cette démonstration au mouvement brownien branchant à deux vitesses $((\tilde{x}_k^t(s))_{1 \leq k \leq \tilde{n}^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$: il existe $\tilde{t}_0 \geq 0$ tel que pour tout $t \geq \tilde{t}_0$,

$$\varphi_t(0) = 1 - \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq \tilde{n}^t(t)} \tilde{x}_k^t(t) - \tilde{m}(t) > 0 \right) \leq 1 - c.$$

On fixe $j \in \mathbb{N}$ tel que $(1 - c)^j \leq \epsilon/3$ et alors (2.59) est majoré pour $t \geq \tilde{t}_0$ par

$$\frac{\epsilon}{3} + \mathbb{P}(Z^{t+\delta}(\delta) < j). \tag{2.60}$$

On cherche donc à montrer que $\mathbb{P}\left(Z^{t+\delta}(\delta) \geq j\right)$ peut-être arbitrairement proche de 1 pour δ grand. On remarque que

$$\mathbb{P}\left(Z^{t+\delta}(\delta) \geq j\right) \geq \mathbb{P}\left(n^{t+\delta}(\delta) \geq j \text{ et } Z^{t+\delta}(\delta) = n^{t+\delta}(\delta)\right)$$

Comme la loi de reproduction $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie $p_0 = 0$ et $p_1 < 1$, on sait que la probabilité $\mathbb{P}(n^{t+\delta}(\delta) < j)$ tend vers 0 quand δ tend vers ∞ . En effet, on peut minorer $(n^{t+\delta}(\delta))_{\delta \geq 0}$ par un processus de Yule d'intensité $1 - p_1$ (quand il y a au moins 2 enfants, on minore le nombre d'enfants par 2) et par les propriétés classiques des processus de Yule, on obtient la majoration $\mathbb{P}(n^{t+\delta}(\delta) < j) \leq 1 - (1 - e^{-(1-p_1)\delta})^{k-1}$. On peut donc choisir δ suffisamment grand tel que $\mathbb{P}(n^{t+\delta}(\delta) < j) \leq \epsilon/3$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(Z^{t+\delta}(\delta) = n^{t+\delta}(\delta)\right) &= \mathbb{P}\left(\min_{1 \leq i \leq n^{t+\delta}(\delta)} x_i^{t+\delta}(\delta) \geq -\sqrt{2}\delta\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \bar{n}(\delta)} \sigma_{1,t+\delta} \bar{x}_i(\delta) \leq \sqrt{2}\delta\right), \end{aligned}$$

où $((\bar{x}_k(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien branchant standard, car on a pris t suffisamment grand tel que $\delta \leq b_t t$. Or $\sigma_{1,t+\delta} \leq 1$ et $\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq \bar{n}(\delta)} \bar{x}_i(\delta) \leq \sqrt{2}\delta)$ tend vers 1 quand δ tend vers ∞ (par le corollaire 1.9), donc on peut donc choisir δ suffisamment grand tel que $\mathbb{P}(Z^{t+\delta}(\delta) = n^{t+\delta}(\delta)) \geq 1 - \epsilon/3$. Alors on en déduit que (2.60) est majoré par

$$\frac{\epsilon}{3} + \mathbb{P}\left(n^{t+\delta}(\delta) < j\right) + \mathbb{P}\left(Z^{t+\delta}(\delta) \neq n^{t+\delta}(\delta)\right) \leq \epsilon.$$

On a donc montré qu'il existe $\delta > 0$ et $d \in \mathbb{R}$ tel que pour t suffisamment grand $\mathbb{P}(M(t + \delta) - \tilde{m}(t + \delta) \leq -d) \leq \epsilon$, ce qui prouve le lemme. \square

Nous allons maintenant pouvoir montrer le résultat principal de cette sous-partie, qui correspond au point (i) du théorème 2.4 mais où l'on précise en outre la valeur de la constante \tilde{C} :

Théorème 2.17. *On a la convergence, pour $y \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq y) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}\left[e^{-\sigma_2 C_{\tilde{u}}(a) Y e^{-\sqrt{2}y}}\right],$$

où \tilde{u} est la solution de l'équation *F-KPP* (1.1) avec la condition initiale $\tilde{u}(0, \cdot) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$, $a = \sqrt{2}(\sigma_2 - 1)$ et $C_{\tilde{u}}(a)$ est définie par (2.29).

La constante \tilde{C} du théorème 2.4 vaut donc $\sigma_2 C_{\tilde{u}}(a)$. Dans la suite, les notations \tilde{u} et a seront uniquement utilisées pour désigner la fonction et la constante définies dans ce théorème.

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme 2.16 qui permet de se ramener à des particules extrémales vérifiant les propriétés établies dans la sous-partie 2.2 : on a ainsi un contrôle en $\Delta(t)$, en $b_t t$ et entre ces deux instants (le choix de $\Delta(t)$ est explicité au début de la démonstration). Les résultats de la sous-partie 2.4 permettent de contrôler la population à l'instant $\Delta(t)$ tandis que ceux de la sous-partie 2.3 sont utiles pour le comportement des particules entre les instants $b_t t$ et t .

Démonstration. On fixe $\epsilon > 0$. Par le lemme 2.16, il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que, pour t suffisamment grand, $\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) < -d) \leq \epsilon/2$. D'autre part, on considère la fonction $\Delta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie dans le lemme 2.15 : $\Delta(t) := \sqrt{t} \wedge \frac{1}{\sigma_{1,t} - \sigma_1}$. Elle vérifie $\Delta(t) \rightarrow \infty$ et $\Delta(t) = o(t)$ quand $t \rightarrow \infty$, donc d'après les propositions 2.5, 2.8 et 2.9, il existe $A, B, r > 0$ tel que pour tout t suffisamment grand,

$$\mathbb{P}\left(\exists k \leq n^t(t) : x_k^t(t) \geq \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{k,t}^t \notin \mathcal{J}\right) \leq \frac{\epsilon}{2},$$

où, pour simplifier les notations, on a posé

$$\mathcal{J} := \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^t \cap \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t \cap \left\{ X \in \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R}) \mid X(\Delta(t) + \cdot) - X(\Delta(t)) \in \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{t - \Delta(t)} \right\}.$$

On a de manière immédiate la majoration

$$\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq y) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n^t(t) \text{ tel que } x_{k,t}^t \in \mathcal{J}} \{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq y\}\right). \quad (2.61)$$

D'autre part, par le choix des constantes d, A, B et r , on a la minoration

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq y) \\ & \geq \mathbb{P}(-d \leq M(t) - \tilde{m}(t) \leq y) \\ & = \mathbb{P}\left(\{M(t) - \tilde{m}(t) \geq -d\} \cap \bigcap_{1 \leq k \leq n^t(t) \text{ tel que } x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \geq -d} \{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq y\}\right) \\ & \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n^t(t) \text{ tel que } x_k^t(t) \geq \tilde{m}(t) - d} \{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq y\}\right) - \frac{\epsilon}{2} \\ & \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n^t(t) \text{ tel que } x_k^t(t) \geq \tilde{m}(t) - d \text{ et } x_{k,t}^t \in \mathcal{J}} \{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq y\}\right) - \epsilon \\ & \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq n^t(t) \text{ tel que } x_{k,t}^t \in \mathcal{J}} \{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq y\}\right) - \epsilon. \end{aligned}$$

On a montré que $(2.61) - \epsilon \leq \mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq y) \leq (2.61)$, il suffit donc d'étudier la convergence de (2.61) quand t tend vers l'infini.

On considère $((\bar{x}_k(s))_{1 \leq k \leq \bar{n}(s)})_{s \geq 0}$ et $((\bar{x}_k^i(s))_{1 \leq k \leq \bar{n}^i(s)})_{s \geq 0}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ des mouvements browniens branchants standard indépendants. Or, le mouvement brownien branchant d'horizon t à deux vitesses peut se décrire comme un mouvement brownien branchant de variance $\sigma_{1,t}$ entre les instants 0 et $b_t t$, dont les particules présentes à l'instant $b_t t$ donnent naissance à des mouvements browniens branchants indépendants de variance $\sigma_{2,t}$ et de longueur $(1 - b_t)t$. Comme en outre \mathcal{J} ne contrôle la trajectoire que sur le segment $[0; b_t t]$, (2.61) est égal à

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}(b_t t) \\ \text{tel que } \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) \in \mathcal{J}'}} \bigcap_{1 \leq k \leq \bar{n}^i((1-b_t)t)} \{\sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) + \sigma_{2,t} \bar{x}_k^i((1-b_t)t) - \tilde{m}(t) \leq y\}\right)$$

où \mathcal{J}' est l'ensemble des fonctions de \mathcal{J} restreintes à $[0; b_t t]$. Donc (2.61) est égal à

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}(b_t t) \\ \text{tel que } \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) \in \mathcal{J}'}} \mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq \bar{n}^i((1-b_t)t)} \bar{x}_k^i((1-b_t)t) \leq \frac{y + \tilde{m}(t) - \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t)}{\sigma_{2,t}} \mid \mathcal{F}_{b_t t} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{1 \leq i \leq \bar{n}(b_t t) \text{ tel que } \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) \in \mathcal{J}'} \left(1 - \tilde{u} \left((1-b_t)t, \frac{y + \tilde{m}(t) - \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t)}{\sigma_{2,t}} \right) \right) \right] \end{aligned}$$

car la fonction \tilde{u} définie dans l'énoncé du théorème vérifie, pour tous $s \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{u}(s, x) = \mathbb{P}(\bar{M}(s) > x)$ où $\bar{M}(s)$ est la position de la particule la plus haute à l'instant s d'un mouvement brownien branchant standard. Nous allons utiliser les résultats de la sous-partie 2.3 pour connaître le comportement asymptotique de \tilde{u} . Vérifions que nous sommes bien dans le cadre de la proposition 2.10. On a

$$\begin{aligned} \frac{y + \tilde{m}(t) - \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t)}{\sigma_{2,t}} &= \frac{\sqrt{2}t - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t}{\sigma_{2,t}} + \frac{y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t - (\sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t)}{\sigma_{2,t}} \\ &= \sqrt{2}\sigma_{2,t}(1-b_t)t + \frac{y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t - (\sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t)}{\sigma_{2,t}} \\ &= \sqrt{2}\sigma_2(1-b_t)t + h_i((1-b_t)t) \end{aligned}$$

et la fonction h_i vérifie, pour i tel que $\sigma_{1,t} x_{i,b_t t} \in \mathcal{J}' \subset \mathcal{G}_{b_t t, A, \frac{1}{2}}^{b_t t}$,

$$\left| \frac{h_i((1-b_t)t)}{(1-b_t)t} \right| \leq \left| \sqrt{2}\sigma_{2,t} - \sqrt{2}\sigma_2 \right| + \frac{|y| + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t + A\sqrt{t}}{\sigma_{2,t}(1-b_t)t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

où la convergence est uniforme en i . En outre, la fonction \tilde{u} vérifie les conditions (a), (b') et (c) et on a $\sqrt{2}\sigma_2(1-b_t)t = \sqrt{2}(1-b_t)t + a(1-b_t)t$ avec $a > 0$ défini dans l'énoncé du théorème. Donc, d'après la proposition 2.10, on a, avec $z_i(s) := as + h_i(s)$,

$$\sqrt{(1-b_t)t} e^{\sqrt{2}z_i((1-b_t)t) + \frac{z_i((1-b_t)t)^2}{2(1-b_t)t}} \tilde{u} \left((1-b_t)t, \sqrt{2}(1-b_t)t + z_i((1-b_t)t) \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_{\tilde{u}}(a)$$

uniformément en i . Donc (2.61) est égal à

$$\mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}(b_t t) \\ \text{tel que } \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) \in \mathcal{J}'}} \left(1 - \frac{C_{\tilde{u}}(a)}{\sqrt{(1-b_t)t}} e^{-\sqrt{2}z_i((1-b_t)t) - \frac{z_i((1-b_t)t)^2}{2(1-b_t)t}} (1 + o(1)) \right) \right], \quad (2.62)$$

où le $o(1)$ est uniforme en i . En utilisant le fait que $z_i((1-b_t)t) = -\sqrt{2}(1-b_t)t + (y + \tilde{m}(t) - \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t))/\sigma_{2,t}$, l'exponentielle dans (2.62) est égale à :

$$\begin{aligned} & \exp \left((1-b_t)t - \frac{(y + \tilde{m}(t) - \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t))^2}{2(1-b_t)t\sigma_{2,t}^2} \right) \\ &= \exp \left((1-b_t)t - \frac{\left(\sqrt{2}\sigma_{2,t}(1-b_t)t + y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t - (\sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t) \right)^2}{2(1-b_t)t\sigma_{2,t}^2} \right) \\ &\leq \exp \left((1-b_t)t - \sigma_{2,t}^2(1-b_t)t - \sqrt{2}y + \frac{1}{2} \log t + \sqrt{2}A\sqrt{t} \right), \quad (2.63) \end{aligned}$$

pour t suffisamment grand indépendant de i . On remarque que (2.63) tend vers 0 indépendamment de i quand t tend vers l'infini, donc les facteurs de (2.62) tendent vers 1 uniformément en i et on en déduit que (2.62) est égal à

$$\mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}(b_t t) \\ \text{tel que } \sigma_{1,t} \bar{x}_i, b_t t \in \mathcal{J}'}} \exp \left(- \frac{C_{\bar{u}}(a)}{\sqrt{(1-b_t)t}} e^{(1-b_t)t - \frac{(y + \bar{m}(t) - \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t))^2}{2(1-b_t)t \sigma_{2,t}^2}} (1 + o(1)) \right) \right] \quad (2.64)$$

où le $o(1)$ est toujours uniforme en i .

Nous allons maintenant utiliser les contrôles fournis par $\mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t$ et $\mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{t - \Delta(t)}$ sur les trajectoires des particules entre les instants 0 et $b_t t$. On applique la propriété de branchement en l'instant $\Delta(t)$ au mouvement brownien branchant $((\bar{x}_k(s))_{1 \leq k \leq \bar{n}(s)})_{s \geq 0}$ et on obtient que (2.64) est égal à

$$\mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq j \leq \bar{n}(\Delta(t)) \\ \sigma_{1,t} \bar{x}_j, \Delta(t) \in \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t}} \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}^j(b_t t - \Delta(t)) \\ |\sigma_{1,t} [\bar{x}_j(\Delta(t)) + \bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t))] - \sqrt{2} \sigma_{1,t} b_t t| \leq A \sqrt{t} \\ \text{et } \sigma_{1,t} \bar{x}_{i, b_t t - \Delta(t)}^j \in \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{b_t t - \Delta(t)}} \exp \left(- \frac{C_{\bar{u}}(a)}{\sqrt{(1-b_t)t}} e^{(1-b_t)t} \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp \left(- \frac{(\tilde{m}(t) + y - \sigma_{1,t} [\bar{x}_j(\Delta(t)) + \bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t))])^2}{2(1-b_t)t \sigma_{2,t}^2} \right) (1 + o(1)) \right) \middle| \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right] \right] \quad (2.65)$$

où les $((\bar{x}_k^j(s))_{1 \leq k \leq \bar{n}^j(s)})_{s \geq 0}$ pour $j \in \mathbb{N}^*$ des mouvements browniens branchants standard indépendants. Comme $w_{i,j} := \sigma_{1,t} [\bar{x}_j(\Delta(t)) + \bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t))] - \sqrt{2} \sigma_{1,t} b_t t \in [-A\sqrt{t}; A\sqrt{t}]$, on a

$$\begin{aligned} & e^{(1-b_t)t} \exp \left(- \frac{(\tilde{m}(t) + y - \sigma_{1,t} [\bar{x}_j(\Delta(t)) + \bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t))])^2}{2(1-b_t)t \sigma_{2,t}^2} \right) \\ &= e^{(1-b_t)t} \exp \left(- \frac{(\sqrt{2} \sigma_{2,t}^2 (1-b_t)t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t + y - w_{i,j})^2}{2(1-b_t)t \sigma_{2,t}^2} \right) \\ &= e^{(1-b_t)t} \exp \left(-\sigma_{2,t}^2 (1-b_t)t - \sqrt{2}y + \frac{1}{2} \log t + \sqrt{2}w_{i,j} - \frac{w_{i,j}^2}{2(1-b_t)t \sigma_{2,t}^2} + o(1) \right) \\ &= \sqrt{t} \exp \left(-(1 - \sigma_{1,t}^2) b_t t - \sqrt{2}y + \sqrt{2}w_{i,j} - \frac{w_{i,j}^2}{2(1-b_t)t \sigma_{2,t}^2} \right) (1 + o(1)), \end{aligned}$$

où le $o(1)$ est uniforme en i . Donc (2.65) est égal à

$$\mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq j \leq \bar{n}(\Delta(t)) \\ \sigma_{1,t} \bar{x}_j, \Delta(t) \in \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t}} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}^j(b_t t - \Delta(t)) \\ |w_{i,j}| \leq A \sqrt{t} \text{ et} \\ \sigma_{1,t} \bar{x}_{i, b_t t - \Delta(t)}^j \in \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{b_t t - \Delta(t)}} (1 + o(1)) E_{i,j} \right) \middle| \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right] \right] \quad (2.66)$$

où l'on a posé

$$E_{i,j} = \frac{C_{\bar{u}}(a) e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)b_t t - \sqrt{2}y} \sqrt{2\sigma_{1,t}[\bar{x}_j(\Delta(t)) + \bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t))] - \frac{(\sigma_{1,t}[\bar{x}_j(\Delta(t)) + \bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t))] - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t)^2}{2(1-b_t)t\sigma_{2,t}^2}}}{\sqrt{1-b_t}} e.$$

Pour encadrer (2.66) on utilise les inégalités $1-x \leq e^{-x} \leq 1-x-x^2/2$ pour $x \geq 0$ que l'on applique à

$$x_j := \sum_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}^j(b_t t - \Delta(t)) \\ |w_{i,j}| \leq A\sqrt{t} \text{ et } \sigma_{1,t} \bar{x}_{i,b_t t - \Delta(t)}^j \in \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{b_t t - \Delta(t)}} E_{i,j} \times (1 + o(1))$$

On fait ainsi apparaître $\mathbb{E}[x_j | \mathcal{F}_{\Delta(t)}]$ et $\mathbb{E}[x_j^2 | \mathcal{F}_{\Delta(t)}]$. Majorons tout d'abord $\mathbb{E}[x_j^2 | \mathcal{F}_{\Delta(t)}]$. En majorant par 1 le facteur correspondant au carré dans l'exponentielle, on obtient

$$E_{i,j} \leq \frac{C_{\bar{u}}(a)}{\sqrt{1-b_t}} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t) + \sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t)) - \sqrt{2}y} \times e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)(b_t t - \Delta(t)) + \sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t))}$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[x_j^2 \mid \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right] \\ & \leq \frac{C_{\bar{u}}(a)^2}{1-b_t} e^{-2(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t) + 2\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t)) - 2\sqrt{2}y} (1 + o(1)) \\ & \times \mathbb{E} \left[\left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}^j(b_t t - \Delta(t)) \\ |w_{i,j}| \leq A\sqrt{t} \text{ et} \\ \sigma_{1,t} \bar{x}_{i,b_t t - \Delta(t)}^j \in \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{b_t t - \Delta(t)}}} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)(b_t t - \Delta(t)) + \sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t))} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

On cherche alors à faire apparaître la martingale de McKean tronquée étudiée dans la sous-partie 2.4. On a $\sigma_{1,t} \bar{x}_{j,\Delta(t)} \in \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t$ et $\Delta(t) = o(t)$, donc il existe $A' > A$ tel que pour t suffisamment grand,

$$\left\{ |w_{i,j}| \leq A\sqrt{t} \right\} \subset \left\{ \left| \bar{x}_i^j(b_t t - \Delta(t)) - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2(b_t t - \Delta(t)) \right| \leq A' \sqrt{b_t t - \Delta(t)} \right\},$$

où A' et t grand ne dépendent pas de i et j . Il existe également $r' > r$ et $\gamma < \gamma' < 1$ indépendants de i et j tels que pour tout $t \geq 0$,

$$\left\{ \sigma_{1,t} \bar{x}_{i,b_t t - \Delta(t)}^j \in \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma}^{b_t t - \Delta(t)} \right\} \subset \left\{ \bar{x}_{i,b_t t - \Delta(t)}^j \in \mathcal{T}_{b_t t - \Delta(t), r', \gamma'}^{b_t t - \Delta(t)} \right\}.$$

Alors la somme dans (2.67) est majorée par $Y_{A', r'}^{\sigma_{1,t}}(b_t t - \Delta(t))$ la troncature de la martingale de McKean définie dans la démonstration du théorème 2.13, où $\sigma_{1,t}$ remplace σ_1 . Or on a vu dans la remarque qui suit cette démonstration que, pour tout $s \geq 0$, $\mathbb{E}[Y_{A', r'}^{\sigma_{1,t}}(s)^2] \leq D_1(\sigma_{1,t}, A') + D_2(\sigma_{1,t}, r') \leq D(A', r')$. Donc à partir de (2.67) on obtient

$$\mathbb{E} \left[x_j^2 \mid \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right] \leq \frac{C_{\bar{u}}(a)^2}{1-b_t} e^{-2(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t) + 2\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t)) - 2\sqrt{2}y} (1 + o(1)) D(A', r'). \quad (2.68)$$

Encadrons maintenant $\mathbb{E}[x_j | \mathcal{F}_{\Delta(t)}]$. En utilisant le lemme de regroupement 1.5, on obtient, avec W_1 de loi $\mathcal{N}(0, b_t t - \Delta(t))$ et ξ un pont brownien entre 0 et 0 de longueur $b_t t - \Delta(t)$ tels que W_1 et ξ soient indépendants,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[x_j \mid \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right] (1 + o(1)) \\
&= e^{b_t t - \Delta(t)} \mathbb{P} \left(\sigma_{1,t} \xi \in \tilde{\mathcal{T}}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma} \right) \mathbb{E} \left[\frac{C_{\bar{u}}(a) e^{-(1+\sigma_{1,t}^2) b_t t}}{\sqrt{1-b_t}} e^{-\sqrt{2}y + \sqrt{2}\sigma_{1,t}[\bar{x}_j(\Delta(t)) + W_1]} \right. \\
&\quad \left. \times e^{-\frac{(\sigma_{1,t}[\bar{x}_j(\Delta(t)) + W_1] - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t)^2}{2(1-b_t)t\sigma_{2,t}^2}} \mathbb{1}_{|\bar{x}_j(\Delta(t)) + W_1 - \sqrt{2}\sigma_{1,t} b_t t| \leq \frac{A}{\sigma_{1,t}} \sqrt{t}} \right] \\
&= P_t \times \frac{C_{\bar{u}}(a) e^{-\Delta(t) + \sigma_{1,t}^2 b_t t - \sqrt{2}y}}{\sqrt{1-b_t}} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{2}\sigma_{1,t}(z-K_t) - \frac{\sigma_{1,t}^2(z-K_t)^2}{2(1-b_t)t\sigma_{2,t}^2}} \mathbb{1}_{|z-K_t| \leq \frac{A}{\sigma_{1,t}} \sqrt{t}} \times \frac{e^{-\frac{z^2}{2(b_t t - \Delta(t))}}}{\sqrt{2\pi(b_t t - \Delta(t))}} dz, \tag{2.69}
\end{aligned}$$

où $K_t := \sqrt{2}\sigma_{1,t} b_t t - \bar{x}_j(\Delta(t))$ et $P_t := \mathbb{P}(\sigma_{1,t} \xi \in \tilde{\mathcal{T}}_{b_t t - \Delta(t), r, \gamma})$. On effectue le changement de variable $x = z - K_t$. Alors (2.69) est égal à

$$P_t \times \frac{C_{\bar{u}}(a) e^{-\Delta(t) + \sigma_{1,t}^2 b_t t - \sqrt{2}y}}{\sqrt{1-b_t}} \int_{-\frac{A\sqrt{t}}{\sigma_{1,t}}}^{\frac{A\sqrt{t}}{\sigma_{1,t}}} e^{\sqrt{2}\sigma_{1,t}x - \frac{\sigma_{1,t}^2 x^2}{2(1-b_t)t\sigma_{2,t}^2}} e^{-\frac{(x + \sqrt{2}\sigma_{1,t} b_t t - \bar{x}_j(\Delta(t)))^2}{2(b_t t - \Delta(t))}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi(b_t t - \Delta(t))}}. \tag{2.70}$$

Or, en utilisant que $\sigma_{1,t} \bar{x}_j(\Delta(t)) \in \mathcal{G}_{\Delta(t), B, \gamma}^t$, $|x| \leq A\sqrt{t}/\sigma_{1,t}$ et $\Delta(t) = o(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{(x + \sqrt{2}\sigma_{1,t} b_t t - \bar{x}_j(\Delta(t)))^2}{2(b_t t - \Delta(t))}} &= (1 + o(1)) e^{-\frac{x^2}{2b_t t} - \frac{\sigma_{1,t}^2 b_t^2 t^2}{b_t t - \Delta(t)} - \sqrt{2}\sigma_{1,t}x + \sqrt{2}\sigma_{1,t} \bar{x}_j(\Delta(t))} \\
&= (1 + o(1)) e^{-\frac{x^2}{2b_t t} - \sigma_{1,t}^2 b_t t + \sigma_{1,t}^2 \Delta(t) - \sqrt{2}\sigma_{1,t}x + \sqrt{2}\sigma_{1,t} \bar{x}_j(\Delta(t))},
\end{aligned}$$

où le $o(1)$ est uniforme en j et x , donc (2.70) est égal à

$$\begin{aligned}
& P_t \times (1 + o(1)) \frac{C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y}}{\sqrt{1-b_t}} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t) + \sqrt{2}\sigma_{1,t} \bar{x}_j(\Delta(t))} \int_{-\frac{A\sqrt{t}}{\sigma_{1,t}}}^{\frac{A\sqrt{t}}{\sigma_{1,t}}} e^{-\frac{x^2}{2b_t(1-b_t)t\sigma_{2,t}^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi b_t t}} \\
&= P_t \times (1 + o(1)) C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t) + \sqrt{2}\sigma_{1,t} \bar{x}_j(\Delta(t))} \int_{-\frac{A}{\sigma_{1,t}\sigma_{2,t}\sqrt{b_t(1-b_t)}}^{\frac{A}{\sigma_{1,t}\sigma_{2,t}\sqrt{b_t(1-b_t)}}} e^{-\frac{w^2}{2}} \frac{\sigma_{2,t}}{\sqrt{2\pi}} dw \\
&= (1 + o(1)) \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t) + \sqrt{2}\sigma_{1,t} \bar{x}_j(\Delta(t))} \times P_t \int_{-\frac{A}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{b(1-b)}}^{\frac{A}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{b(1-b)}}} \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dw,
\end{aligned}$$

où le $o(1)$ est toujours uniforme en j et x . En choisissant r et A assez grands, on a

$$\alpha_t := P_t \int_{-\frac{A}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{b(1-b)}}^{\frac{A}{\sigma_1\sigma_2\sqrt{b(1-b)}}} \frac{e^{-w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dw \in [1 - \epsilon; 1],$$

et on a donc montré que

$$\mathbb{E} \left[x_j \mid \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right] = (1 + o(1)) \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t) + \sqrt{2}\sigma_{1,t} \bar{x}_j(\Delta(t))} \times \alpha_t,$$

En comparant à la majoration (2.68), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E} \left[x_j^2 \mid \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right]}{\mathbb{E} \left[x_j \mid \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right]} &\leq \frac{C_{\bar{u}}(a)e^{-\sqrt{2}y}}{\sigma_2(1-b)} (1+o(1))D(A', r')e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t)+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t))} \\ &\leq \frac{C_{\bar{u}}(a)e^{-\sqrt{2}y}}{\sigma_2(1-b)} (1+o(1))D(A', r')e^{-(1-\sigma_{1,t}^2)\Delta(t)+\sqrt{2}(\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t))-\sqrt{2}\sigma_{1,t}^2\Delta(t))} \\ &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

avec convergence uniforme en j , car $|\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t)) - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2\Delta(t)| \leq B\Delta(t)^\gamma$. Donc notre encadrement nous a permis de montrer que $\mathbb{E}[e^{-x_j} | \mathcal{F}_{\Delta(t)}] = (1 - \mathbb{E}[x_j | \mathcal{F}_{\Delta(t)}])(1 + o(1))$ et donc (2.66) est égal à

$$\begin{aligned} &(1+o(1))\mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq j \leq \bar{n}(\Delta(t)) \\ \sigma_{1,t}\bar{x}_{j,\Delta(t)} \in \mathcal{G}_{\Delta(t),B,\gamma}^t}} \left(1 - \mathbb{E} \left[x_j \mid \mathcal{F}_{\Delta(t)} \right] \right) \right] \\ &= (1+o(1))\mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq j \leq \bar{n}(\Delta(t)) \\ \sigma_{1,t}\bar{x}_{j,\Delta(t)} \in \mathcal{G}_{\Delta(t),B,\gamma}^t}} \left(1 - \alpha_t \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t)+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t))} \right) \right], \end{aligned}$$

car avec tous les $o(1)$ sont à chaque fois majorés par un $o(1)$ déterministe. On a déjà vu que $\alpha_t \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t)+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t))}$ tend uniformément vers 0 car $\sigma_{1,t}\bar{x}_{j,\Delta(t)} \in \mathcal{G}_{\Delta(t),B,\gamma}^t$, donc (2.66) est égal à

$$\begin{aligned} &(1+o(1))\mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{\substack{1 \leq j \leq \bar{n}(\Delta(t)) \\ \sigma_{1,t}\bar{x}_{j,\Delta(t)} \in \mathcal{G}_{\Delta(t),B,\gamma}^t}} \alpha_t \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} e^{-(1+\sigma_{1,t}^2)\Delta(t)+\sqrt{2}\sigma_{1,t}\bar{x}_j(\Delta(t))} \right) \right] \\ &= (1+o(1))\mathbb{E} \left[\exp \left(-\alpha_t \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} \tilde{Y}_{B,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(\Delta(t)) \right) \right], \end{aligned} \tag{2.71}$$

où $\tilde{Y}_{B,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(s)$, définie en sous-partie 2.4, est une autre troncature de la martingale de McKean. D'autre part on a $\alpha \in [1 - \epsilon; 1]$ et, en remontant la démonstration, (2.71) $-\epsilon \leq \mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq y) \leq (2.71)$. Or par le lemme 2.15, $\tilde{Y}_{B,\gamma}^{\sigma_{1,t}}(\Delta(t))$ converge dans L^1 donc en loi vers Y quand t tend vers l'infini, et les fonctions $x \mapsto \exp(-\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} x)$ et $x \mapsto \exp(-(1-\epsilon)\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} x)$ sont continues bornées sur \mathbb{R}_+ donc on obtient l'encadrement

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left(-\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} Y \right) \right] - \epsilon &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq y) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq y) \\ &\leq \mathbb{E} \left[\exp \left(-(1-\epsilon)\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} Y \right) \right]. \end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on obtient la limite désirée. \square

2.6 Convergence du processus extrémal

Dans cette sous-partie, nous prouvons la convergence en loi du processus extrémal $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$, vers une limite dont nous obtiendrons la transformée de Laplace. Pour montrer l'existence d'un processus limite, nous allons utiliser la méthode présentée à la fin de la sous-partie 1.4 : nous allons montrer la tension de $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ à l'aide de la proposition 1.14, puis la convergence simple des transformées de Laplace des \mathcal{E}_t .

Proposition 2.18. *Pour tout $d \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_t([d; \infty]) \geq N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0,$$

avec convergence uniforme en $t \in \mathbb{R}_+$. En particulier, la famille $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ est tendue.

Démonstration. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on utilise l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{E}_t([d; \infty]) \geq N) &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E}[\mathcal{E}_t([d; \infty])] \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{n^t(t)} \mathbb{1}_{x_k^t(t) > \tilde{m}(t) + d} \right] \\ &= \frac{1}{N} e^t \mathbb{P}(B_t > \tilde{m}(t) + d), \end{aligned} \tag{2.72}$$

en utilisant le lemme de regroupement 2.1, avec B un mouvement brownien. Avec l'estimation gaussienne (2.9), on majore, pour t suffisamment grand,

$$e^t \mathbb{P}(B_t > \tilde{m}(t) + d) \leq e^t \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}(\tilde{m}(t) + d)} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{m}(t) + d}{\sqrt{t}} \right)^2} = \frac{e^{\sqrt{2}d}}{2\sqrt{\pi}} (1 + o(1))$$

et donc il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, on ait $e^t \mathbb{P}(B_t > \tilde{m}(t) + d) \leq M$. On en déduit que (2.72) tend vers 0 uniformément en t quand N tend vers l'infini. Ceci implique la tension de $(\mathcal{E}_t([d; \infty]))_{t \geq 0}$ pour tout $d \in \mathbb{R}$, ce qui est une propriété plus forte que le (iii) de la proposition 1.14. Donc $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ est tendue. \square

Grâce à la tension du processus extrémal, il nous suffit de montrer la convergence des transformées de Laplace pour obtenir sa convergence en loi.

Théorème 2.19. *Le processus extrémal $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ converge en loi, quand t tend vers l'infini, vers un processus ponctuel \mathcal{E} .*

Démonstration. Pour $t \geq 0$, on note Ψ_t la transformée de Laplace de \mathcal{E}_t définie sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$, on décompose $\Psi_t(\phi) = \Psi_t^{\leq \delta}(\phi) + \Psi_t^{> \delta}(\phi)$, où l'on a posé

$$\begin{aligned} \Psi_t^{\leq \delta}(\phi) &:= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \mathcal{E}_t(dy) \right) \mathbb{1}_{M(t) - \tilde{m}(t) \leq \delta} \right] \\ \Psi_t^{> \delta}(\phi) &:= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \mathcal{E}_t(dy) \right) \mathbb{1}_{M(t) - \tilde{m}(t) > \delta} \right]. \end{aligned}$$

Tout d'abord, $\Psi_t^{>\delta}(\phi)$ peut être rendu arbitrairement petit en choisissant δ suffisamment grand. En effet, on a par le théorème 2.17

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Psi_t^{>\delta}(\phi) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) > \delta) = 1 - \mathbb{E} \left[e^{-\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) Y e^{-\sqrt{2}\delta}} \right] \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} 0,$$

par convergence monotone. Intéressons nous maintenant à la convergence de $\Psi_t^{\leq\delta}(\phi)$ quand t tend vers l'infini. On a

$$\Psi_t^{\leq\delta}(\phi) = \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^{n^t(t)} e^{-\phi(x_k^t(t) - \tilde{m}(t))} \mathbb{1}_{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq \delta} \right]. \quad (2.73)$$

On va procéder de la même manière que dans la démonstration du théorème 2.17 pour la convergence en loi de $M(t) - \tilde{m}(t)$. On fixe $\epsilon > 0$. Alors en choisissant l'ensemble \mathcal{J} comme défini dans la démonstration du théorème 2.17, on a la minoration

$$\mathbb{E} \left[\prod_{1 \leq i \leq n^t(t) \text{ tel que } x_{k,t}^t \in \mathcal{J}} e^{-\phi(x_k^t(t) - \tilde{m}(t))} \mathbb{1}_{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq \delta} \right] - \epsilon \leq \Psi_t^{\leq\delta}(\phi),$$

car les facteurs présents dans le produits sont compris entre 0 et 1. On a également la majoration immédiate

$$\Psi_t^{\leq\delta}(\phi) \leq \mathbb{E} \left[\prod_{1 \leq i \leq n^t(t) \text{ tel que } x_{k,t}^t \in \mathcal{J}} e^{-\phi(x_k^t(t) - \tilde{m}(t))} \mathbb{1}_{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) \leq \delta} \right]. \quad (2.74)$$

On considère ensuite $((\bar{x}_k(s))_{1 \leq k \leq \bar{n}(s)})_{s \geq 0}$ et $((\bar{x}_k^i(s))_{1 \leq k \leq \bar{n}^i(s)})_{s \geq 0}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ des mouvements browniens branchants standard indépendants. Alors la partie droite de (2.74) est égale à

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}(b_t t) \\ \sigma_{1,t} \bar{x}_i, b_t t \in \mathcal{J}'}} e^{-\phi(\sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) + \sigma_{2,t} \bar{x}_k^i((1-b_t)t) - \tilde{m}(t))} \mathbb{1}_{\sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) + \sigma_{2,t} \bar{x}_k^i((1-b_t)t) - \tilde{m}(t) \leq \delta} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}(b_t t) \\ \sigma_{1,t} \bar{x}_i, b_t t \in \mathcal{J}'}} \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{\bar{n}^i((1-b_t)t)} g_\delta^t \left(\frac{\tilde{m}(t) - \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t)}{\sigma_{2,t}} - \bar{x}_k^i((1-b_t)t) \right) \middle| \mathcal{F}_{b_t t} \right] \right], \end{aligned} \quad (2.75)$$

où l'on a posé, pour $t \geq 0$ et $z \in \mathbb{R}$,

$$g_\delta^t(z) := e^{-\phi(-\sigma_{2,t} z)} \mathbb{1}_{\{-\sigma_{2,t} z \leq \delta\}}.$$

On définit alors, pour $t \geq 0$, la fonction u_δ^t sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par

$$u_\delta^t(s, z) := 1 - \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{\bar{n}(s)} g_\delta^t(z - \bar{x}_k(s)) \right],$$

et, d'après le lemme 1.7, u_δ^t est la solution de l'équation F-KPP (1.1) avec condition initiale $u_\delta^t(0, \cdot) = 1 - g_\delta^t$. En outre, on remarque que $u_\delta^t(0, \cdot)$ vérifie les conditions

(a), (b') et (c) de la proposition 2.10 (c'est en fait pour que la condition (c) soit vérifiée que l'on a besoin d'introduire l'indicatrice de comparaison à δ , qui assure que $u_\delta^t(0, \cdot)$ vaut 1 en $-\infty$). Par définition de u_δ^t , (2.75) est égal à

$$\mathbb{E} \left[\prod_{\substack{1 \leq i \leq \bar{n}(b_t t) \\ \sigma_{1,t} \bar{x}_i, b_t t \in \mathcal{J}'}} \left(1 - u_\delta^t \left((1 - b_t)t, \frac{\tilde{m}(t) - \sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t)}{\sigma_{2,t}} \right) \right) \right]. \quad (2.76)$$

On veut appliquer la proposition 2.12 pour avoir le comportement asymptotique de u_δ^t . Pour cela il faut montrer qu'il existe une fonction u_δ telle que les hypothèses de la proposition 2.12 soient vérifiées. On définit donc la fonction g_δ sur \mathbb{R} par

$$g_\delta(z) := e^{-\phi(-\sigma_2 z)} \mathbb{1}_{\{-\sigma_2 z \leq \delta\}}$$

et la fonction u_δ sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ par

$$u_\delta(s, z) := 1 - \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{\bar{n}(s)} g_\delta(z - \bar{x}_k(s)) \right],$$

qui est solution de l'équation F-KPP (1.1) avec condition initiale $u_\delta(0, \cdot) = 1 - g_\delta$ vérifiant les conditions (a), (b') et (c). En outre, g_δ^t converge simplement vers g_δ quand t tend vers l'infini, donc par théorème de convergence dominée, u_δ^t converge simplement vers u_δ . Et, avec les notations de la proposition 2.12, on a bien convergence de y_0^t vers y_0 . On peut donc appliquer la proposition 2.12 et on obtient

$$\sqrt{(1 - b_t)t} e^{\sqrt{2} z_i ((1 - b_t)t) + \frac{z_i ((1 - b_t)t)^2}{2(1 - b_t)t}} u_\delta^t \left((1 - b_t)t, \sqrt{2}(1 - b_t)t + z_i((1 - b_t)t) \right) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} C_{u_\delta}(a)$$

uniformément en i , avec $a := \sqrt{2}(1 - \sigma_2)$, $z_i(s) := as + h_i(s)$ et

$$h_i((1 - b_t)t) := \sqrt{2}(\sigma_{2,t} - \sigma_2)(1 - b_t)t + \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}} \log t - (\sigma_{1,t} \bar{x}_i(b_t t) - \sqrt{2}\sigma_{1,t}^2 b_t t)}{\sigma_{2,t}}.$$

Donc (2.76) est égal à l'espérance (2.62) obtenue dans la démonstration du théorème 2.17, mais où $C_{\bar{u}}(a)$ et y sont remplacés par $C_{u_\delta}(a)$ et 0. Avec les calculs de la démonstration du théorème 2.17, en faisant tendre t vers l'infini puis ϵ vers 0, on obtient

$$\Psi_t^{\leq \delta}(\phi) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} [\exp(-\sigma_2 C_{u_\delta}(a) Y)] =: \Psi^{\leq \delta}(\phi).$$

La fonction $\delta \mapsto \Psi^{\leq \delta}(\phi)$ est croissante et majorée par 1 donc converge quand δ tend vers l'infini vers une limite notée $\Psi(\phi)$. Or $\limsup_{t \rightarrow \infty} \Psi_t^{> \delta}(\phi)$ tend vers 0 quand δ tend vers l'infini donc

$$\Psi_t(\phi) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Psi(\phi).$$

La convergence simple des transformées de Laplace et la tension de $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ impliquent la convergence en loi de $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ vers un processus ponctuel \mathcal{E} de transformée de Laplace Ψ . \square

Pour pouvoir décrire la loi du processus ponctuel limite \mathcal{E} , nous allons tout d'abord décrire sa transformée de Laplace Ψ . On sait, d'après la démonstration qui précède, que

$$\Psi(\phi) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\exp(-\sigma_2 C_{u_\delta}(a)Y)].$$

Nous allons donc nous intéresser à la convergence de $C_{u_\delta}(a)$ quand δ tend vers l'infini :

Proposition 2.20. *Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$. Soient u et u_δ , pour $\delta \in \mathbb{R}$, les solutions de l'équation F-KPP (1.1) avec conditions initiales $u(0, z) = 1 - e^{-\phi(-\sigma_2 z)}$ et $u_\delta(0, z) = 1 - e^{-\phi(-\sigma_2 z)} \mathbb{1}_{\{-\sigma_2 z \leq \delta\}}$. On rappelle que $C_{u_\delta}(a)$ est défini par*

$$C_{u_\delta}(a) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u_\delta(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} (1 - e^{-2ay}) dy.$$

Alors $C_{u_\delta}(a)$ converge quand δ tend vers l'infini et la limite est

$$C_u(a) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy, \quad (2.77)$$

qui est une constante finie et strictement positive si ϕ n'est pas identiquement nulle. En particulier, on a

$$\Psi(\phi) = \mathbb{E} [\exp(-\sigma_2 C_u(a)Y)].$$

Remarque. La fonction u n'entre pas dans le cadre de la proposition 2.10 car elle ne vérifie pas l'hypothèse (c) : en effet, $u(0, z)$ vaut 0 au voisinage de $-\infty$. On ne peut donc pas définir $C_u(a)$ par (2.29). En outre, il n'y a en fait aucune ambiguïté pour la définition de $C_v(a)$ entre (2.29) et (2.77), car si v est une solution de l'équation F-KPP (1.1) dont la condition initiale vérifie les conditions (a), (b') et (c), alors la constante $C_v(a)$ définie par (2.29) vérifie

$$C_v(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy. \quad (2.78)$$

En effet, on a de manière immédiate

$$C_v(a) \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy.$$

Pour obtenir la borne inférieure, considérons $K > 0$. On a

$$\int_0^K e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy \leq K e^{(\sqrt{2}+a)K - a^2 r/2} \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.79)$$

Or on sait par la proposition 2.10 que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u_\delta(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} (1 - e^{-2ay}) dy < \infty,$$

donc, comme $1 - e^{-2ay}$ est proche de 1 pour y grand et que la partie inférieure de l'intégrale tend vers 0 d'après (2.79), on en déduit que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_K^\infty e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy < \infty.$$

On minore ensuite

$$\begin{aligned}
C_v(a) &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy \\
&= - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} e^{-2ay} dy \\
&\geq - \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2aK} \int_K^\infty e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy \\
&\geq -e^{-2aK} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy, \tag{2.80}
\end{aligned}$$

où pour obtenir la première minoration, on découpe l'intégrale en K et on utilise (2.79). Quand K tend vers l'infini, (2.80) tend vers 0, car la limite supérieure est finie. Donc on obtient la borne inférieure désirée et cela montre (2.78). On utilisera dorénavant seulement la définition (2.77) pour la constante $C_u(a)$, qui convient dans tous les cas considérés.

Pour démontrer la proposition 2.20, nous allons avoir besoin du lemme suivant qui établit une relation simple entre les constantes $C_u(a)$ et $C_{u(\cdot, z+\cdot)}(a)$ pour $z \in \mathbb{R}$. En effet, si u est une solution de l'équation F-KPP avec condition initiale vérifiant (a),(b') et (c), alors c'est aussi le cas de tous ses translatés $u(\cdot, z + \cdot)$ pour $z \in \mathbb{R}$.

Lemme 2.21. *Soit u une solution de l'équation F-KPP (1.1) dont la condition initiale vérifie les conditions (a),(b') et (c). Alors, pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a*

$$C_{u(\cdot, z+\cdot)}(a) = C_u(a) e^{-(\sqrt{2}+a)z}. \tag{2.81}$$

En outre, pour toute fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée nulle au voisinage de $-\infty$, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^0 \mathbb{E} \left[h(y + \bar{M}(t) - \sqrt{2}t) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)y - a^2 r/2} dy \\
&= C_{\tilde{u}}(a) \int_{\mathbb{R}} h(x) (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)x} dx, \tag{2.82}
\end{aligned}$$

où $\bar{M}(t)$ est la position de la particule extrême d'un mouvement brownien branchant standard $((\bar{x}_k(s))_{1 \leq k \leq \bar{n}(s)})_{s \geq 0}$.

L'égalité (2.82) est une version fonctionnelle de (2.81), dans le cas particulier où $u = \tilde{u}$. Elle nous servira dans la sous-partie 2.7.

Démonstration. Avec le changement de variable $x = z + y$, on obtient

$$\begin{aligned}
C_{u(\cdot, z+\cdot)}(a) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u(r, z + y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy \\
&= e^{-(\sqrt{2}+a)z} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-a^2 r/2} u(r, x + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)x} dx \\
&= e^{-(\sqrt{2}+a)z} \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u(r, x + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)x} dx, \tag{2.83}
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est une conséquence de (2.79). Or (2.83) = $e^{-(\sqrt{2}+a)z}C_u(a)$, donc on a montré (2.81).

On considère maintenant la fonction \tilde{u} de condition initiale $\tilde{u}(0, \cdot) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}$. Pour $z \in \mathbb{R}$, d'après l'égalité (2.81), la fonction $h := \mathbb{1}_{]z; \infty[}$ vérifie (2.82), car on a $\mathbb{E}[h(y + \bar{M}(t) - \sqrt{2}t)] = \tilde{u}(t, z - y + \sqrt{2}t)$. Par linéarité, pour tous $k \in \mathbb{N}$, $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, la fonction $h := \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{]z_i; \infty[}$ vérifie (2.82).

Maintenant considérons $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée nulle au voisinage de $-\infty$. On note $M := \sup_{\mathbb{R}} |h|$. Soit $\epsilon > 0$ et soit δ suffisamment grand tel que pour tout $x \leq -\delta$, $h(x) = 0$ et tel que $2MC_{\tilde{u}}(a)e^{-(\sqrt{2}+a)\delta} \leq \epsilon$. Il existe une fonction $g = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{]z_i; \infty[}$ telle que g soit bornée par M , $g(x) = 0$ pour tout $x \leq -\delta$ et $|h(x) - g(x)| \leq e^{-(\sqrt{2}+a)\delta} \epsilon / C_{\tilde{u}}(a)$ pour tout $x \in [-\delta; \delta]$. En introduisant la décomposition $1 = \mathbb{1}_{y+\bar{M}(t)-\sqrt{2}t \leq -\delta} + \mathbb{1}_{y+\bar{M}(t)-\sqrt{2}t \in [-\delta; \delta]} + \mathbb{1}_{y+\bar{M}(t)-\sqrt{2}t > \delta}$, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^0 \mathbb{E} \left[(h - g) \left(y + \bar{M}(t) - \sqrt{2}t \right) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)y - a^2 r/2} dy \right| \\ & \leq 0 + \int_{-\infty}^0 \mathbb{E} \left[\frac{e^{-(\sqrt{2}+a)\delta} \epsilon}{C_{\tilde{u}}(a)} \mathbb{1}_{y+\bar{M}(t)-\sqrt{2}t > -\delta} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)y - a^2 r/2} dy \\ & \quad + \int_{-\infty}^0 \mathbb{E} \left[2M \mathbb{1}_{y+\bar{M}(t)-\sqrt{2}t > \delta} \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)y - a^2 r/2} dy \\ & \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{-(\sqrt{2}+a)\delta} \epsilon}{C_{\tilde{u}}(a)} C_{\tilde{u}}(a) e^{(\sqrt{2}+a)\delta} + 2MC_{\tilde{u}}(a) e^{-(\sqrt{2}+a)\delta} \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

D'autre part, on majore

$$\begin{aligned} & \left| C_{\tilde{u}}(a) \int_{\mathbb{R}} (h - g)(x) (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)x} dx \right| \\ & \leq C_{\tilde{u}}(a) \int_{-\delta}^{\delta} \frac{e^{-(\sqrt{2}+a)\delta} \epsilon}{C_{\tilde{u}}(a)} (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)x} dx + C_{\tilde{u}}(a) \int_{\delta}^{\infty} 2M (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)x} dx \\ & \leq 2\epsilon. \end{aligned}$$

Comme en outre g vérifie (2.82), on en déduit que

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow \infty} \left| \int_{-\infty}^0 \mathbb{E} \left[h \left(y + \bar{M}(t) - \sqrt{2}t \right) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)y - a^2 r/2} dy \right. \\ & \quad \left. - C_{\tilde{u}}(a) \int_{\mathbb{R}} h(x) (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)x} dx \right| \leq 4\epsilon, \end{aligned}$$

et donc, en faisant tendre ϵ vers 0, on a montré que h vérifie (2.82). \square

Démonstration de la proposition 2.20. Par la remarque qui suit l'énoncé de la proposition 2.20, on a

$$C_{u_\delta}(a) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u_\delta(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy.$$

Pour $(\bar{x}_k(s))_{1 \leq k \leq \bar{n}(s)}_{s \geq 0}$ un mouvement brownien branchant standard, $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a, d'après le lemme 1.7,

$$\begin{aligned} u_\delta(t, x) - u(t, x) &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-\phi(-\sigma_2(x - \bar{x}_k(t)))} - \prod_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-\phi(-\sigma_2(x - \bar{x}_k(t)))} \mathbb{1}_{\sigma_2(\bar{x}_k(t) - x) \leq \delta} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\prod_{k=1}^{\bar{n}(t)} e^{-\phi(-\sigma_2(x - \bar{x}_k(t)))} \right) \mathbb{1}_{\bar{M}(t) > \frac{\delta}{\sigma_2} + x} \right] \end{aligned}$$

donc on a l'encadrement $0 \leq u_\delta(t, x) - u(t, x) \leq \mathbb{P} \left(\bar{M}(t) > \frac{\delta}{\sigma_2} + x \right) = \tilde{u}(t, \frac{\delta}{\sigma_2} + x)$ en reprenant la notation du théorème 2.17. On note pour v une solution de l'équation F-KPP positive

$$\tilde{C}_v(r, a) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} v(r, y + \sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy.$$

Alors l'encadrement $u_\delta(r, x) - \tilde{u}(r, \frac{\delta}{\sigma_2} + x) \leq u(r, x) \leq u_\delta(r, x)$ implique que l'on a

$$\tilde{C}_{u_\delta}(r, a) - \tilde{C}_{\tilde{u}(\cdot, \delta/\sigma_2 + \cdot)}(r, a) \leq \tilde{C}_u(r, a) \leq \tilde{C}_{u_\delta}(r, a).$$

Les fonctions u_δ et $\tilde{u}(\cdot, \delta/\sigma_2 + \cdot)$ vérifient les hypothèses de la proposition 2.10, donc, en faisant tendre r vers l'infini, on obtient,

$$C_{u_\delta}(a) - C_{\tilde{u}(\cdot, \delta/\sigma_2 + \cdot)}(a) \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \tilde{C}_u(r, a) \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \tilde{C}_u(r, a) \leq C_{u_\delta}(a). \quad (2.84)$$

Or, d'après le lemme 2.21, $C_{\tilde{u}(\cdot, \delta/\sigma_2 + \cdot)}(a) = e^{-(\sqrt{2}+a)\frac{\delta}{\sigma_2}} C_{\tilde{u}}(a)$ et donc $C_{\tilde{u}(\cdot, \delta/\sigma_2 + \cdot)}(a)$ tend vers 0 quand δ tend vers l'infini. On en déduit

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} C_{u_\delta}(a) \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \tilde{C}_u(r, a) \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \tilde{C}_u(r, a) \leq \liminf_{\delta \rightarrow \infty} C_{u_\delta}(a)$$

et donc $\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{C}_u(r, a)$ et $\lim_{\delta \rightarrow \infty} C_{u_\delta}(a)$ existent et sont égales. Donc $C_u(a)$ est bien définie par (2.77) et $C_u(a) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} C_{u_\delta}(a)$. On en déduit que

$$\Psi(\phi) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\exp(-\sigma_2 C_{u_\delta}(a) Y)] = \mathbb{E} [\exp(-\sigma_2 C_u(a) Y)]$$

par convergence dominée. Il reste à montrer que $0 < C_u(a) < \infty$. Or en considérant (2.84) à δ fixé, on a $C_u(a) \leq C_{u_\delta}(a) < \infty$ par la proposition 2.10. D'autre part,

$$\Psi_t(\phi) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \mathcal{E}_t(dy) \right) \right] \leq \mathbb{E} [\exp(-\phi(\max \mathcal{E}_t))]$$

et $\max \mathcal{E}_t = M(t) - \tilde{m}(t)$ qui converge en loi, par le théorème 2.17, vers une variable aléatoire de fonction de répartition $y \mapsto \mathbb{E}[\exp(-\sigma_2 C_{\tilde{u}}(a) e^{-\sqrt{2}y} Y)]$ strictement croissante sur \mathbb{R} car $Y > 0$ p.s. et $C_{\tilde{u}}(a) > 0$. Donc si ϕ n'est pas nulle, $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\exp(-\phi(\max \mathcal{E}_t))] < 1$ et donc $\Psi(\phi) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi_t(\phi) < 1$. On en conclut que $C_u(a)$ ne peut pas être nul, car sinon on aurait $\Psi(\phi) = 1$. \square

Remarque. L'égalité (2.81) du lemme 2.21 reste valable pour la fonction u de la proposition 2.20, c'est-à-dire, pour $z \in \mathbb{R}$, on a

$$C_{u(\cdot, z+\cdot)}(a) = C_u(a)e^{-(\sqrt{2}+a)z}.$$

En effet, $u(\cdot, z+\cdot)$ est solution de l'équation F-KPP (1.1) avec pour condition initiale $u(0, z+y) = 1 - e^{-\phi(-\sigma_2(z+y))} = 1 - e^{-\phi_z(-\sigma_2 y)}$ où $\phi_z: y \mapsto \phi(y - \sigma_2 z)$ est bien une fonction de $\mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$. Donc par la proposition 2.20, la constante $C_{u(\cdot, z+\cdot)}(a)$ est bien définie et

$$C_{u(\cdot, z+\cdot)}(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-a^2 r/2} u(r, z+y+\sqrt{2}r) e^{(\sqrt{2}+a)y} dy.$$

On obtient donc $C_{u(\cdot, z+\cdot)}(a) = C_u(a)e^{-(\sqrt{2}+a)z}$ avec la même preuve que pour le lemme 2.21, car (2.79) reste valable pour $v = u$ (on utilise uniquement $v \leq 1$).

2.7 Le processus ponctuel auxiliaire

Dans cette sous-partie, nous allons introduire un processus ponctuel auxiliaire $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ et nous allons montrer, grâce à la transformée de Laplace, qu'il a la même limite en loi que le processus extrémal $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$. Nous pourrions alors décrire la loi de \mathcal{E} , dans la sous-partie suivante, en étudiant uniquement le processus auxiliaire.

Définissons le processus ponctuel Π_t pour $t \geq 0$. On se munit tout d'abord d'un processus ponctuel de Poisson \mathcal{P} sur \mathbb{R}_- d'intensité

$$\frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 t/2} e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz,$$

dont on note $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ les atomes. On considère également des mouvements browniens branchants standard indépendants $((\bar{x}_k^i(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}^i(t)})_{t \geq 0}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. On suppose également que les mouvements browniens branchants, le processus ponctuel \mathcal{P} et la variable aléatoire Y soient indépendants. Alors on définit le processus ponctuel auxiliaire par

$$\Pi_t := \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\bar{n}^i(t)} \delta_{\left(p_i + \frac{1}{\sqrt{2}+a} \log Y + \bar{x}_k^i(t) - \sqrt{2}t\right) \sigma_2}.$$

La définition de ce processus auxiliaire est très proche de celle dans le cas standard traité par Arguin, Bovier et Kistler [4], mais l'intensité du processus ponctuel de Poisson \mathcal{P} est différente. En effet, ici elle décroît exponentiellement en t , ce qui cause le fait que les particules extrémales de Π_t correspondent à des p_i de l'ordre de $-at$, comme nous allons le voir dans la proposition 2.24, alors que dans le cas standard elles correspondaient à des p_i de l'ordre de \sqrt{t} . Cette différence traduit bien la différence observée entre la position à l'instant $b_t t$ des particules extrémales de \mathcal{E}_t dans le cas à deux vitesses et dans le cas standard : elles sont à une distance linéaire en t de $\sqrt{2}b_t t$ dans le cas à deux vitesses et à une distance de l'ordre de \sqrt{t} dans le cas standard.

Théorème 2.22. *Le processus ponctuel auxiliaire $(\Pi_t)_{t \geq 0}$ converge en loi et*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Pi_t \stackrel{\text{loi}}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_t.$$

Démonstration. On sait que la fonction Ψ est la transformée de Laplace de la variable aléatoire \mathcal{E} , donc par la proposition 1.16 il suffit de montrer que la transformée de Laplace de Π_t converge simplement quand t tend vers l'infini vers Ψ . Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$, on note $\bar{\phi}(z) := \phi(\sigma_2 z)$. Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \Pi_t(dy) \right) \right] &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^{\bar{n}^i(t)} \bar{\phi} \left(p_i + \frac{\log Y}{\sqrt{2} + a} + \bar{x}_k^i(t) - \sqrt{2}t \right) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\prod_{i \in \mathbb{N}} \exp(-f_Y(p_i)) \mid Y \right] \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} f_Y(z) &:= -\log \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^{\bar{n}^i(t)} \bar{\phi} \left(z + \frac{\log Y}{\sqrt{2} + a} + \bar{x}_k^i(t) - \sqrt{2}t \right) \right) \mid Y \right] \\ &= -\log \left(1 - u \left(t, \sqrt{2}t - z - \frac{\log Y}{\sqrt{2} + a} \right) \right), \end{aligned}$$

où u est définie à partir de ϕ comme dans la proposition 2.20 : u est la solution de l'équation F-KPP (1.1) avec condition initiale $u(0, z) = 1 - e^{-\bar{\phi}(-z)}$. Par propriété de la transformée de Laplace des processus de Poisson, (2.85) est égal à

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{-\infty}^0 (1 - e^{-f_Y(z)}) \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 t/2} e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 u \left(t, \sqrt{2}t - z - \frac{\log Y}{\sqrt{2} + a} \right) e^{-a^2 t/2} e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

D'après la proposition 2.20, on a la convergence

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u \left(t, \sqrt{2}t + z - \frac{\log Y}{\sqrt{2} + a} \right) e^{-a^2 t/2} e^{(\sqrt{2}+a)z} dz \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_{u(\cdot, -\frac{\log Y}{\sqrt{2}+a} \cdot)}(a). \quad (2.87)$$

En outre, d'après le lemme 2.21 (qui est valable pour la fonction u d'après la remarque à la fin de la sous-partie 2.6), on a

$$C_{u(\cdot, -\frac{\log Y}{\sqrt{2}+a} \cdot)}(a) = e^{-(\sqrt{2}+a)\left(-\frac{\log Y}{\sqrt{2}+a}\right)} C_u(a) = Y C_u(a).$$

Donc par la convergence (2.87) et le théorème de convergence dominée (en dominant par 1), on obtient que (2.86) converge, quand t tend vers l'infini, vers

$$\mathbb{E} [\exp(-\sigma_2 Y C_u(a))],$$

qui est égal à $\Psi(\phi)$ d'après la proposition 2.20, ce qui conclut la démonstration. \square

Les deux propositions qui vont suivre décrivent quelques propriétés du processus auxiliaire. La première porte sur le processus des extrêmes, c'est-à-dire le processus obtenu en ne gardant que le maximum de chaque décoration du processus ponctuel de Poisson décoré Π_t .

Proposition 2.23. *Pour $t \geq 0$, considérons le processus ponctuel*

$$\Pi_t^{\text{ext}} := \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{\left(p_i + \frac{1}{\sqrt{2+a}} \log Y + \bar{M}^i(t) - \sqrt{2}t\right) \sigma_2},$$

où $\bar{M}^i(t) := \max_{1 \leq k \leq \bar{n}^i(t)} \bar{x}_k^i(t)$. Alors on a la convergence

$$\Pi_t^{\text{ext}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{loi}} \eta,$$

où η est un mélange de processus ponctuels de Poisson sur \mathbb{R} d'intensité $\sqrt{2}\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) Y e^{-\sqrt{2}x} dx$ conditionnellement à Y .

La limite est identique à celle obtenue par Arguin, Bovier et Kistler [4] dans le cas standard, avec seulement $\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) Y$ qui remplace CZ .

Démonstration. η a la même loi qu'un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\sqrt{2}\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}x} dx$ indépendant de Y auquel on ajoute $\log Y / \sqrt{2}$. Or, en utilisant que $\sqrt{2}\sigma_2 = \sqrt{2} + a$, on obtient que

$$\Pi_t^{\text{ext}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \log Y = \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_{(p_i + \bar{M}^i(t) - \sqrt{2}t) \sigma_2}$$

est indépendant de Y , donc il suffit de montrer que $\Pi_t^{\text{ext}} - \log Y / \sqrt{2}$ converge en loi vers un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\sqrt{2}\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}x} dx$. Pour cela, on utilise de nouveau la transformée de Laplace. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$, on note comme précédemment $\bar{\phi}(z) := \phi(\sigma_2 z)$. Alors on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \left(\Pi_t^{\text{ext}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \log Y \right) (dy) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{\phi}(p_i + \bar{M}^i(t) - \sqrt{2}t) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{-\infty}^0 \left(1 - \mathbb{E} \left[e^{-\bar{\phi}(z + \bar{M}(t) - \sqrt{2}t)} \right] \right) \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 t/2} e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \right) \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

par un calcul similaire à celui effectué dans la démonstration du théorème 2.22. On pose alors $h: z \mapsto 1 - e^{-\bar{\phi}(z)}$ et ainsi (2.88) est égal à

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sigma_2 \int_{-\infty}^0 \mathbb{E} \left[h(z + \bar{M}(t) - \sqrt{2}t) \right] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 t/2} e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \right) \right] \\ & \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) \int_{\mathbb{R}} h(z) (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \right) \right] \end{aligned} \quad (2.89)$$

par l'égalité (2.82) du lemme 2.21 car h est continue bornée et nulle au voisinage de $-\infty$ car ϕ est à support compact. Ensuite, (2.89) est égal à

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-\bar{\phi}(z)}) \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) \sqrt{2} \sigma_2 e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-\phi(z)}) C_{\bar{u}}(a) \sqrt{2} \sigma_2 e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \right) \right], \end{aligned}$$

qui est bien la transformée de Laplace appliquée en ϕ d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\sqrt{2}\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) e^{-\sqrt{2}x} dx$. \square

La seconde proposition fournit avec forte probabilité les p_i qui correspondent aux particules extrémales de Π_t pour t grand :

Proposition 2.24. *Soit $d \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\limsup_{B \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{p_i + \bar{M}^i(t) - \sqrt{2}t \geq d} \mathbb{1}_{p_i \notin [-at - B\sqrt{t}; -at + B\sqrt{t}]} \right] = 0. \quad (2.90)$$

Cela implique en particulier, que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que, pour tout t suffisamment grand,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\exists i \in \mathbb{N}, \exists k \in \llbracket 1; \bar{n}^i(t) \rrbracket : p_i + \bar{x}_k^i(t) - \sqrt{2}t \geq d \text{ et } p_i \notin [-at - B\sqrt{t}; -at + B\sqrt{t}] \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\exists i \in \mathbb{N} : p_i + \bar{M}^i(t) - \sqrt{2}t \geq d \text{ et } p_i \notin [-at - B\sqrt{t}; -at + B\sqrt{t}] \right) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Les particules extrémales de Π_t correspondent donc à un p_i de l'ordre de $-at$.

Pour montrer cette proposition nous allons avoir besoin du lemme suivant montré par Arguin, Bovier et Kistler dans [3], qui fournit une estimation assez précise de la queue de distribution de $\bar{M}(t)$, la position extrémale d'un mouvement brownien branchant standard. C'est en fait un corollaire d'un résultat de Bramson [9, Proposition 8.2].

Lemme 2.25. *Il existe $\rho > 0$ et $t_0 \geq 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$ et tout $z > 1$, on ait*

$$\mathbb{P} \left(\bar{M}(t) - \sqrt{2}t + \frac{3}{2\sqrt{2}} \log t \geq z \right) \leq \rho z \exp \left(-\sqrt{2}z - \frac{z^2}{2t} + \frac{3z}{2\sqrt{2}} \frac{\log t}{t} \right)$$

où $\bar{M}(t)$ est la position à l'instant t de la particule la plus haute d'un mouvement brownien branchant standard.

Démonstration de la proposition 2.24. On décompose tout d'abord l'espérance dans (2.90) en $P^> + P^<$, en posant

$$\begin{aligned} P^> &:= \mathbb{E} \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{p_i + \bar{M}^i(t) - \sqrt{2}t \geq d} \mathbb{1}_{p_i > -at + B\sqrt{t}} \right] \\ P^< &:= \mathbb{E} \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{p_i + \bar{M}^i(t) - \sqrt{2}t \geq d} \mathbb{1}_{p_i < -at - B\sqrt{t}} \right]. \end{aligned}$$

Pour majorer $P^>$, on pose $f: z \mapsto \mathbb{P}(z + \bar{M}(t) - \sqrt{2}t \geq d) \mathbb{1}_{z > -at + B\sqrt{t}}$. Alors on a

$$\begin{aligned} P^> &= \mathbb{E} [\mathcal{P}(f)] \\ &= \int_{-\infty}^0 f(z) \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 t/2} e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \\ &= \int_0^{at - B\sqrt{t}} \mathbb{P}(\bar{M}(t) - y - \sqrt{2}t \geq d) \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-a^2 t/2} e^{(\sqrt{2}+a)y} dy \end{aligned} \quad (2.91)$$

avec le changement de variable $y = -z$. Pour $y \in [0; at - B\sqrt{t}]$, on majore, en utilisant le lemme 2.25,

$$\mathbb{P}(\bar{M}(t) - y - \sqrt{2}t \geq d) \leq \rho x \exp\left(-\sqrt{2}x - \frac{x^2}{2t} + \frac{3x}{2\sqrt{2}} \frac{\log t}{t}\right) \quad (2.92)$$

avec $x = d + y + 3 \log t / 2\sqrt{2} > 1$ pour t suffisamment grand indépendant de y car $y \geq 0$. Or on a

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2t} + \frac{3x}{2\sqrt{2}} \frac{\log t}{t} &= -\frac{(d+y)^2}{2t} - \frac{3(d+y)\log t}{2\sqrt{2}t} - \frac{9\log^2 t}{16t} + \frac{3\left(d+y + \frac{3}{2\sqrt{2}}\log t\right)\log t}{2\sqrt{2}t} \\ &= -\frac{(d+y)^2}{2t} \end{aligned}$$

Donc (2.92) est majoré par

$$\begin{aligned} &\rho \left(d + y + \frac{3}{2\sqrt{2}}\log t\right) \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\sqrt{2}(d+y) - \frac{(d+y)^2}{2t}\right) \\ &\leq \frac{\rho a}{\sqrt{t}} \exp\left(-\sqrt{2}(d+y) - \frac{(d+y)^2}{2t}\right) \end{aligned}$$

pour t suffisamment grand, en utilisant que $y \leq at - B\sqrt{t}$. On en déduit que (2.91) est majoré par

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\rho a}{\sqrt{t}} \int_0^{at-B\sqrt{t}} e^{-\sqrt{2}d - \frac{(d+y)^2}{2t}} e^{ay - \frac{a^2 t}{2}} dy &= \frac{\sigma_2 \rho a}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^{at-B\sqrt{t}} e^{-(\sqrt{2}+a)d} e^{-\frac{(y+(d-at))^2}{2t}} dy \\ &= \frac{\sigma_2 \rho a}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)d} \int_{\frac{d-at}{\sqrt{t}}}^{\frac{d-B\sqrt{t}}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

avec le changement de variable $x = (y + (d - at))/\sqrt{t}$. On en conclut que

$$\limsup_{B \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} P^> \leq \limsup_{B \rightarrow \infty} \frac{\sigma_2 \rho a}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)d} \int_{-\infty}^{-B} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

On procède de même pour majorer $P^<$. Cependant ici on ne peut plus majorer y , donc avec le lemme 2.25, on obtient

$$\begin{aligned} P^< &\leq \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \int_{at+B\sqrt{t}}^{\infty} \frac{(\rho+1)y}{t^{3/2}} e^{-\sqrt{2}d - \frac{(d+y)^2}{2t}} e^{ay - \frac{a^2 t}{2}} dy \\ &= \frac{\sigma_2(\rho+1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)d} \int_{\frac{d+B\sqrt{t}}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{\sqrt{t}x - d + at}{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \end{aligned}$$

avec le même changement de variable, et donc

$$\limsup_{B \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} P^< \leq \limsup_{B \rightarrow \infty} \frac{\sigma_2(\rho+1)a}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)d} \int_B^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

et on en déduit (2.90). □

2.8 Description de la limite du processus extrémal

Dans cette sous-partie, nous allons terminer la démonstration du théorème 2.4 en montrant la description (2.5) de la loi de \mathcal{E} . Tout d'abord, nous allons devoir étudier le processus \mathcal{L}_t introduit dans la proposition 2.3 et donc nous intéresser au comportement d'un mouvement brownien branchant standard conditionné à avoir une particule à l'instant t plus haute que $\sqrt{2}\sigma_2 t = (\sqrt{2} + a)t$. En effet, on a vu que les particules extrémales de Π_t correspondent à des p_i de l'ordre de $-at$ et donc à des mouvements browniens branchants ayant des particules de l'ordre de $\sqrt{2}t + at$. La proposition suivante montre la convergence en loi du processus extrémal pour un mouvement brownien branchant conditionné à avoir des particules aussi hautes.

Proposition 2.26. *Soit $((\bar{x}_k(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)})_{t \geq 0}$ un mouvement brownien branchant standard et soit $x(t) = at + h(t)$ avec $h(t) = o(t)$. On pose, pour $t \geq 0$,*

$$\bar{\mathcal{E}}_t := \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} \delta_{\bar{x}_k(t) - \sqrt{2}t}.$$

Alors, conditionnellement à $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0\}$, $\bar{\mathcal{E}}_t - x(t)$ converge en loi quand t tend vers l'infini vers un processus ponctuel $\bar{\mathcal{E}}$. La loi de $\bar{\mathcal{E}}$ ne dépend pas de h et $\max \bar{\mathcal{E}}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\sqrt{2} + a$.

Démonstration. Soit $z > 0$. En notant $\bar{M}(t) := \max_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)} \bar{x}_k(t)$ et en utilisant la convergence fournie par la proposition 2.10 appliquée à la fonction \tilde{u} , on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > z \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0 \right) \\ &= \frac{\tilde{u}(t, z + x(t) + \sqrt{2}t)}{\tilde{u}(t, x(t) + \sqrt{2}t)} \\ &\sim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_{\bar{u}}(a)t^{-1/2} \exp \left(-\sqrt{2}(x(t) + z) - \frac{(x(t)+z)^2}{2t} \right)}{C_{\bar{u}}(a)t^{-1/2} \exp \left(-\sqrt{2}x(t) - \frac{x(t)^2}{2t} \right)} \\ &= \exp \left(-\sqrt{2}z - \frac{2zat + 2zh(t) + z^2}{2t} \right) \\ &\sim_{t \rightarrow \infty} \exp \left(-(\sqrt{2} + a)z \right). \end{aligned}$$

On a donc montré que, conditionnellement à $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0\}$, $\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t)$ converge en loi quand t tend vers l'infini vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\sqrt{2} + a$.

Pour montrer la convergence du processus ponctuel $\bar{\mathcal{E}}_t - x(t)$ conditionnellement à $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0\}$, nous allons montrer tout d'abord la tension. On procède de manière analogue à la démonstration de la proposition 2.18. Soit $d \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On majore par inégalité de Markov

$$\begin{aligned} & N \times \mathbb{P} \left((\bar{\mathcal{E}}_t - x(t))([d; \infty]) \geq N \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0 \right) \\ &\leq \frac{1}{\mathbb{P} \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0 \right)} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\bar{n}(t)} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(t) - \sqrt{2}t - x(t) \geq d} \right] \\ &= \frac{1}{\tilde{u}(t, \sqrt{2}t + x(t))} \cdot e^t \int_{\frac{\sqrt{2}t + x(t) + d}{\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx, \end{aligned} \tag{2.93}$$

par le lemme de regroupement 1.5. Pour t suffisamment grand, par l'estimation gaussienne (2.9), on majore (2.93) par

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tilde{u}(t, \sqrt{2t} + x(t))} \cdot e^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2t} + x(t) + d} \exp\left(-\frac{1}{2t}(\sqrt{2t} + x(t) + d)^2\right) \\ & \leq \frac{1}{\tilde{u}(t, \sqrt{2t} + x(t))} \cdot e^t \frac{2}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2} + a)\sqrt{t}} \exp\left(-t - \frac{x(t)^2}{2t} - \sqrt{2}x(t) + (\sqrt{2} + a)d\right) \\ & \leq \frac{2}{C_{\tilde{u}}(a)} \cdot \frac{2e^{(\sqrt{2}+a)d}}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{2} + a)}, \end{aligned}$$

pour t suffisamment grand, en utilisant la proposition 2.10. Or (2.93) varie continûment en t pour $t \geq 1$, donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \geq 1$, on ait

$$\mathbb{P}\left((\bar{\mathcal{E}}_t - x(t))(]d; \infty]) \geq N \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0\right) \leq \frac{M}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

uniformément en t . On en déduit la tension de $(\bar{\mathcal{E}}_t - x(t))_{t \geq 1}$ conditionnellement à $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0\}$ par la proposition 1.14.

Montrons maintenant la convergence simple de sa transformée de Laplace Θ_t . Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$ et $\delta > 0$, on décompose $\Theta_t(\phi) = \Theta_t^{\leq \delta}(\phi) + \Theta_t^{> \delta}(\phi)$, où l'on a posé

$$\begin{aligned} \Theta_t^{\leq \delta}(\phi) &:= \mathbb{E} \left[\exp\left(-\int_{\mathbb{R}} \phi(y - x(t)) \bar{\mathcal{E}}(dy)\right) \mathbb{1}_{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) \leq \delta} \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0 \right] \\ \Theta_t^{> \delta}(\phi) &:= \mathbb{E} \left[\exp\left(-\int_{\mathbb{R}} \phi(y - x(t)) \bar{\mathcal{E}}(dy)\right) \mathbb{1}_{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > \delta} \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0 \right]. \end{aligned}$$

Contrôlons tout d'abord $\Theta_t^{> \delta}(\phi)$: on a, d'après les calculs précédents,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \Theta_t^{> \delta}(\phi) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > \delta \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0\right) \\ &= e^{-(\sqrt{2}+a)\delta} \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\Theta_t^{\leq \delta}(\phi)$ converge quand t tend vers l'infini. On a

$$\begin{aligned} & \Theta_t^{\leq \delta}(\phi) \times \mathbb{P}\left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0\right) \\ &= \mathbb{E} \left[\left(1 - \mathbb{1}_{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) \leq 0}\right) \prod_{i=1}^{\bar{n}(t)} e^{-\phi(\bar{x}_k - \sqrt{2t} - x(t))} \mathbb{1}_{\bar{x}_k(t) - \sqrt{2t} - x(t) \leq \delta} \right] \\ &= v_0(t, \sqrt{2t} + x(t)) - v_\delta(t, \sqrt{2t} + x(t)), \end{aligned}$$

où, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, v_α est la solution de l'équation F-KPP (1.1) avec pour condition initiale $v_\alpha(0, x) = 1 - e^{-\phi(-x)} \mathbb{1}_{-x \leq \alpha}$. Or $\mathbb{P}(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > 0) = \tilde{u}(t, \sqrt{2t} + x(t))$, donc on obtient

$$\Theta_t^{\leq \delta}(\phi) = \frac{v_0(t, \sqrt{2t} + x(t)) - v_\delta(t, \sqrt{2t} + x(t))}{\tilde{u}(t, \sqrt{2t} + x(t))} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{C_{v_0}(a) - C_{v_\delta}(a)}{C_{\tilde{u}}(a)} =: \Theta^{\leq \delta}(\phi)$$

par la proposition 2.10 car les conditions initiales de \tilde{u} , v_0 et v_δ vérifient les conditions (a), (b') et (c). D'après la proposition 2.20, $C_{v_\delta}(a)$ tend vers $C_v(a)$ quand δ tend vers

l'infini, où v est la solution de l'équation F-KPP (1.1) avec pour condition initiale $v(0, x) = 1 - e^{-\phi(-x)}$ (ce ne sont pas exactement les mêmes notations que dans la proposition 2.20, ici la fonction ϕ est remplacée par $x \mapsto \phi(x/\sigma_2)$). On a donc montré que

$$\Theta_t(\phi) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{C_{v_0}(a) - C_v(a)}{C_{\bar{u}}(a)}, \quad (2.94)$$

ce qui implique la convergence en loi de $\bar{\mathcal{E}}_t - x(t)$. Comme la transformée de Laplace de $\bar{\mathcal{E}}$ donnée par (2.94) ne dépend pas de h , c'est aussi le cas de la loi de $\bar{\mathcal{E}}$. En outre, par continuité de la fonction $\max: M_+(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ pour la topologie vague, on en déduit que $\max \bar{\mathcal{E}}$ a pour loi $\lim_{t \rightarrow \infty} \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t)$, c'est-à-dire une exponentielle de paramètre $\sqrt{2} + a$ d'après le début de la démonstration. \square

Nous allons maintenant pouvoir étudier le processus ponctuel défini dans la proposition 2.3 :

$$\mathcal{L}_t := \sum_{k=1}^{\bar{n}(t)} \delta_{\bar{x}_k(t) - \bar{M}(t)},$$

où $((\bar{x}_k(t))_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien branchant standard et $\bar{M}(t) := \max_{1 \leq k \leq \bar{n}(t)} \bar{x}_k(t)$. On définit également

$$\mathcal{L} := \bar{\mathcal{E}} - \max \bar{\mathcal{E}},$$

processus ponctuel sur \mathbb{R}_- avec un atome en 0. La proposition suivante nous fournit un résultat de convergence plus général que celui de la proposition 2.3 pour le processus \mathcal{L}_t :

Corollaire 2.27. *Soit $x(t) = at + h(t)$ avec $h(t) = o(t)$ et soit $b \in \mathbb{R}$. Alors, conditionnellement à $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b\}$, \mathcal{L}_t converge en loi vers \mathcal{L} et est asymptotiquement indépendant de $\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t)$. Plus précisément, pour toutes fonctions $f, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues bornées et $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$, on a*

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}_t(dz) \right) h \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) \right) \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}(dz) \right) \right] \frac{\int_b^\infty h(z) (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz}{e^{-(\sqrt{2}+a)b}} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Pour montrer ce corollaire, nous allons utiliser ce résultat général de continuité, montré par Arguin, Bovier et Kistler [4] :

Lemme 2.28. *Soient $(\xi_t)_{t \geq 0}$ une famille de mesures aléatoires et $(X_t)_{t \geq 0}$ une famille de variables aléatoires réelles. Soient ξ une mesure aléatoire et X une variable aléatoire réelle. Supposons que le couple (ξ_t, X_t) converge en loi vers (ξ, X) , c'est-à-dire que l'on ait, pour toutes fonctions $f, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues bornées et $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$,*

$$\mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \xi_t(dz) \right) h(X_t) \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \xi(dz) \right) h(X) \right].$$

Alors la mesure aléatoire $\xi_t + X_t$ converge en loi vers $\xi + X$, c'est-à-dire que, pour toutes fonctions $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée et $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$, on a

$$\mathbb{E} \left[g \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z + X_t) \xi_t(dz) \right) \right] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[g \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z + X) \xi(dz) \right) \right].$$

Démonstration du corollaire 2.27. D'après la proposition 2.26, on sait que, conditionnellement à $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b\}$, le couple $(\bar{\mathcal{E}}_t - x(t) - b, \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) - b)$ converge en loi vers $(\bar{\mathcal{E}}, \max \bar{\mathcal{E}})$, où $\max \bar{\mathcal{E}}$ suit une loi exponentielle de paramètre $\sqrt{2} + a$. Donc, d'après le lemme 2.28 appliqué à $\xi_t = \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) - b$ et $X_t = -\max \bar{\mathcal{E}}_t + x(t) + b$ conditionnés à $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b\}$, $\xi = \bar{\mathcal{E}}$ et $X = -\max \bar{\mathcal{E}}$, on a la convergence en loi de $\xi_t + X_t = \mathcal{L}_t$ conditionné à $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b\}$ vers $\xi + X = \mathcal{L}$.

Montrons maintenant l'indépendance asymptotique. Soient $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée et $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$. On considère pour l'instant la fonction $h := \mathbb{1}_{]b'; \infty[}$, avec $b' \geq b$. Alors on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}_t(dz) \right) h \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) \right) \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}_t(dz) \right) \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b' \right] \frac{\mathbb{P} \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b' \right)}{\mathbb{P} \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b \right)}. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Or on a, d'après la proposition 2.26,

$$\frac{\mathbb{P} \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b' \right)}{\mathbb{P} \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b \right)} = \frac{\mathbb{P} \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - (x(t) + b) > b' - b \right)}{\mathbb{P} \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - (x(t) + b) > 0 \right)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} e^{-(\sqrt{2}+a)(b'-b)}$$

et l'espérance dans (2.96) converge d'après la première partie de la démonstration, donc (2.96) tend vers

$$\mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}(dz) \right) \right] e^{(\sqrt{2}+a)b} \int_{b'}^{\infty} (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz$$

quand t tend vers l'infini. Donc h vérifie (2.95). Par linéarité, pour tous $k \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_k \geq b$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, la fonction $h := \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{]b_i; \infty[}$ vérifie (2.82).

À présent considérons $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. On note $M := \sup_{\mathbb{R}} |h|$ et $L := \mathbb{E} \left[\left| f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}(dz) \right) \right| \right]$. Soit $\epsilon > 0$ et soit $\delta > b$ tel que $2ML e^{-(\sqrt{2}+a)(\delta-b)} \leq \epsilon$. Il existe une fonction $g = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbb{1}_{]b_i; \infty[}$ avec $b_1, \dots, b_k \geq b$ telle que g soit bornée par M et $|h(x) - g(x)| \leq \epsilon/L$ pour tout $x \in [b; \delta]$. Alors on a

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}(dz) \right) \right] e^{(\sqrt{2}+a)b} \int_b^{\infty} (h - g)(z) (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)z} dz \right| \\ & \leq L e^{(\sqrt{2}+a)b} \times \left(\frac{\epsilon}{L} e^{-(\sqrt{2}+a)b} + 2M e^{-(\sqrt{2}+a)\delta} \right) \leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

en découpant l'intégrale en δ , et, d'autre part,

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}_t(dz) \right) (h - g) \left(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) \right) \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b \right] \right| \\ & \leq \mathbb{E} \left[|f| \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}_t(dz) \right) \frac{\epsilon}{L} \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b \right] \\ & \quad + \mathbb{E} \left[|f| \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}_t(dz) \right) 2M \mathbb{1}_{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > \delta} \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > b \right] \\ & \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[|f| \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(z) \mathcal{L}(dz) \right) \right] \times \left(\frac{\epsilon}{L} + 2M e^{-(\sqrt{2}+a)(\delta-b)} \right) \leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

d'après les calculs précédents en remplaçant b' par δ pour obtenir la convergence du deuxième terme. On en conclut que h vérifie (2.82) en faisant tendre ϵ vers 0, comme dans la démonstration du lemme 2.21. \square

Le théorème suivant conclut la démonstration du théorème principal 2.4 : par le théorème 2.22, on sait que le processus ponctuel auxiliaire Π_t converge en loi vers \mathcal{E} , il suffit donc de montrer que Π_t converge également vers le processus défini par la partie droite de (2.5) dans le théorème 2.4.

Théorème 2.29. *Soit η un mélange de processus ponctuels de Poisson d'intensité $\sqrt{2}\tilde{C}Y e^{-\sqrt{2}y} dy$ conditionnellement à Y , dont on note $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ les atomes. Soit $(\Lambda^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de processus ponctuels de même loi que \mathcal{L} . Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $(\Lambda_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}}$, les atomes de $\Lambda^{(i)}$. Alors on a la convergence*

$$\Pi_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{\text{loi}} \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \delta_{\eta_i + \sigma_2 \Lambda_j^{(i)}}. \quad (2.97)$$

Démonstration. Pour montrer cette convergence, nous allons de nouveau utiliser la transformée de Laplace. Notons $\tilde{\mathcal{E}}$ la limite dans (2.97). Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^+(\mathbb{R})$, on note $\bar{\phi}(z) := \phi(\sigma_2 z)$ pour $z \in \mathbb{R}$. Par des calculs similaires à ceux effectués dans la démonstration du théorème 2.22, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \tilde{\mathcal{E}}(dy) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(z+y) (\sigma_2 \mathcal{L})(dz) \right) \right] \right) \sqrt{2} \tilde{C} Y e^{-\sqrt{2}y} dy \right) \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la démonstration du théorème 2.22, on a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \Pi_t(dy) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{-\infty}^0 \left(1 - \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(z+y + \frac{\log Y}{\sqrt{2}+a}) \bar{\mathcal{E}}_t(dz) \right) \middle| Y \right] \right) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)y - a^2 t/2} dy \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{-\infty}^0 \left(1 - \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(z+x) \bar{\mathcal{E}}_t(dz) \right) \right] \right) \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} Y e^{-(\sqrt{2}+a)x - a^2 t/2} dx \right) \right] \end{aligned}$$

avec le changement de variable $x = y + \log Y / (\sqrt{2} + a)$ et où $\bar{\mathcal{E}}_t$ est défini comme dans la proposition 2.26 à partir d'un mouvement brownien branchant standard indépendant de Y . En posant, pour $x, z \in \mathbb{R}$, $f(x) := 1 - e^{-x}$ et $T_z \bar{\phi}(x) = \bar{\phi}(z+x)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 \left(1 - \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(z+x) \bar{\mathcal{E}}_t(dz) \right) \right] \right) \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)x - a^2 t/2} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \mathbb{E} \left[f \left(\int_{-\infty}^0 (T_{x+\max \bar{\mathcal{E}}_t \bar{\phi}})(z) \mathcal{L}_t(dz) \right) \right] \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)x - a^2 t/2} dx \\ &= U_1(t, B) + U_2(t, B), \end{aligned}$$

pour $B > 0$, où U_1 est l'intégrale sur $[-at - B\sqrt{t}; -at + B\sqrt{t}]$ et U_2 est l'intégrale sur le complémentaire. Notons m le minimum du support de $\bar{\phi}$. Alors pour $x < m$,

on a $\int_{-\infty}^0 T_x \bar{\phi}(z) \mathcal{L}_t(dz) = 0$, donc, comme en outre $\mathbb{P}(x + \max \bar{\mathcal{E}}_t = m) = 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[f \left(\int_{-\infty}^0 \left(T_{x+\max \bar{\mathcal{E}}_t} \bar{\phi} \right) (z) \mathcal{L}_t(dz) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f \left(\int_{-\infty}^0 \left(T_{x+\max \bar{\mathcal{E}}_t} \bar{\phi} \right) (z) \mathcal{L}_t(dz) \right) \mathbb{1}_{x+\max \bar{\mathcal{E}}_t > m} \right]. \end{aligned}$$

Donc, en majorant f par 1, on obtient

$$\begin{aligned} U_2(t, B) &\leq \int_{x \notin [-at-B\sqrt{t}; -at+B\sqrt{t}]} \mathbb{P}(x + \max \bar{\mathcal{E}}_t > m) \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{2}+a)x - a^2 t/2} dx \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{p_i + \bar{M}^i(t) - \sqrt{2}t \geq d} \mathbb{1}_{p_i \notin [-at-B\sqrt{t}; -at+B\sqrt{t}]} \right], \end{aligned}$$

en reprenant les notations de la sous-partie 2.7 permettant de définir Π_t et donc $\limsup_{B \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} U_2(t, B) = 0$, d'après la proposition 2.24. Montrons maintenant la convergence de $U_1(t, B)$ quand t tend vers l'infini. Avec le changement de variable $x = -at - y\sqrt{t}$, on obtient

$$\begin{aligned} U_1(t, B) &= \int_{-B}^B \mathbb{E} \left[f \left(\int_{-\infty}^0 \left(T_{\max \bar{\mathcal{E}}_t - at - y\sqrt{t}} \bar{\phi} \right) (z) \mathcal{L}_t(dz) \right) \mathbb{1}_{\max \bar{\mathcal{E}}_t - at - y\sqrt{t} > m} \right] \\ &\quad \times \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{(\sqrt{2}+a)(at+y\sqrt{t}) - a^2 t/2} \sqrt{t} dy. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Pour $y \in [-B; B]$ fixé, en notant $x(t) := at + y\sqrt{t}$, l'intégrand dans (2.98) s'écrit

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[f \left(\int_{-\infty}^0 \left(T_{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t)} \bar{\phi} \right) (z) \mathcal{L}_t(dz) \right) \mid \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > m \right] \\ & \quad \times \mathbb{P}(\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) > m) \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} e^{(\sqrt{2}+a)x(t) - a^2 t/2} \sqrt{t}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

D'après le corollaire 2.27, on sait que le couple $(\mathcal{L}_t, \max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) - m)$ conditionné par $\{\max \bar{\mathcal{E}}_t - x(t) - m > 0\}$ converge en loi vers (\mathcal{L}, e) où e est une variable aléatoire indépendante de \mathcal{L} et de loi exponentielle de paramètre $\sqrt{2} + a$, donc la première ligne de (2.99) converge quand t tend vers l'infini vers

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[f \left(\int_{-\infty}^0 T_{e+m} \bar{\phi}(z) \mathcal{L}(dz) \right) \right] \\ &= \int_0^\infty \mathbb{E} \left[f \left(\int_{-\infty}^0 T_{u+m} \bar{\phi}(z) \mathcal{L}(dz) \right) \right] (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)u} du \\ &= e^{(\sqrt{2}+a)m} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(z+v) \mathcal{L}(dz) \right) \right] (\sqrt{2} + a) e^{-(\sqrt{2}+a)v} dv, \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $v = u + m$, le fait que $\mathcal{L}(\mathbb{R}_+^*) = 0$ p.s., et le fait que l'espérance est nulle pour $v < m$. D'autre part, la deuxième ligne de (2.99) est égale à

$$\frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} \tilde{u}(t, \sqrt{2}t + x(t) + m) \sqrt{t} \exp \left((\sqrt{2} + a)x(t) - \frac{a^2 t}{2} \right) \quad (2.100)$$

$$\sim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} C_{\tilde{u}}(a) \exp \left(-\sqrt{2}(x(t) + m) - \frac{(x(t) + m)^2}{2t} \right) \exp \left((\sqrt{2} + a)x(t) - \frac{a^2 t}{2} \right)$$

$$\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} C_{\tilde{u}}(a) e^{-(\sqrt{2}+a)m - y^2/2} \quad (2.101)$$

d'après la proposition 2.10. On a donc montré que (2.99) converge quand t tend vers l'infini vers

$$\frac{\sigma_2}{\sqrt{2\pi}} C_{\bar{u}}(a) e^{-y^2/2} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(z+v) \mathcal{L}(dz) \right) \right] (\sqrt{2}+a) e^{-(\sqrt{2}+a)v} dv.$$

Il s'agit maintenant de dominer (2.99). Comme $f \leq 1$, il est majoré par (2.100). Mais la convergence de (2.100) vers (2.101) est en fait uniforme en $y \in [-B; B]$, par un calcul identique en utilisant la proposition 2.10 avec l'ensemble $\mathcal{H} := \{t \mapsto y\sqrt{t} + m \mid y \in [-B; B]\}$. Donc pour t suffisamment grand, pour tout $y \in [-B; B]$, l'intégrand de $U_1(t, B)$ est majoré par (2.101) + 1, qui est une fonction de y intégrable sur $[-B; B]$. Donc par théorème de convergence dominée, $U_1(t, B)$ converge quand t tend vers l'infini vers

$$\sigma_2 C_{\bar{u}}(a) \left(\int_{-B}^B \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(z+v) \mathcal{L}(dz) \right) \right] (\sqrt{2}+a) e^{-(\sqrt{2}+a)v} dv \right)$$

et donc on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{B \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} U_1(t, B) &= \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(z+v) \mathcal{L}(dz) \right) \right] (\sqrt{2}+a) e^{-(\sqrt{2}+a)v} dv \\ &= \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(\sigma_2 z + y) \mathcal{L}(dz) \right) \right] \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}y} dy, \end{aligned}$$

avec le changement de variable $y = \sigma_2 v$ et car $\sqrt{2} + a = \sqrt{2}\sigma_2$. On en conclut que

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \Pi_t(dy) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-Y(U_1(t, B) + U_2(t, B)) \right) \right] \\ &\xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\exp \left(-Y \sigma_2 C_{\bar{u}}(a) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E} \left[f \left(\int_{\mathbb{R}} \phi(\sigma_2 z + y) \mathcal{L}(dz) \right) \right] \sqrt{2} e^{-\sqrt{2}y} dy \right) \right] \quad (2.102) \end{aligned}$$

par théorème de convergence dominée et en utilisant le fait que $\limsup_{B \rightarrow \infty} \limsup_{t \rightarrow \infty} U_2(t, B) = 0$. Or (2.102) est égal à la transformée de Laplace de $\tilde{\mathcal{E}}$ appliquée en ϕ d'après le début de la démonstration, donc on a montré que Π_t converge en loi vers $\tilde{\mathcal{E}}$ quand t tend vers l'infini. \square

3 Le mouvement brownien branchant à vitesse variable dans le cas sous-critique

Dans cette partie, nous montrons des résultats analogues à ceux de la partie 2 pour le mouvement brownien branchant à vitesse variable, mais avec un choix plus large de fonctions vitesse, tout en restant dans le cas sous-critique. Les résultats présentés sont ceux obtenus par Bovier et Hartung [7].

3.1 Énoncé des résultats

Il nous faut tout d'abord définir le cadre d'étude de cette partie, c'est-à-dire les fonctions vitesse Σ_t^2 que nous allons considérer. On garde toujours les conditions générales imposées au début de la sous-partie 2.1 pour définir le modèle :

$\Sigma_t^2: [0; t] \longrightarrow [0; t]$ est une fonction croissante, continue à droite et telle que $\Sigma_t^2(0) = 0$ et $\Sigma_t^2(t) = t$. On impose ici aux Σ_t^2 pour $t \geq 0$ d'avoir toutes la même forme : soit $A: [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ croissante, continue à droite et telle que $A(0) = 0$ et $A(1) = 1$, on pose

$$\Sigma_t^2(s) := tA\left(\frac{s}{t}\right) \quad (3.1)$$

pour $t \geq 0$ et $0 \leq s \leq t$. La partie 2 traite le cas où A est affine en deux morceaux de pentes σ_1^2 puis σ_2^2 avec $\sigma_1 < \sigma_2$. On peut donc parler de cas général ici car on va considérer des fonctions A beaucoup plus variées. Cependant, ce n'est pas à proprement parler un cadre plus général que celui de la partie 2 car on ne peut pas avoir ici des pentes $\sigma_{1,t}^2$ et $\sigma_{2,t}^2$ dépendant du temps. Mais Bovier et Hartung ne procèdent pas exactement ainsi : dans [6], ils traitent le cas du mouvement brownien branchant à deux vitesses indépendantes du temps et, dans [7], ils traitent le cas général présenté dans cette partie et pour cela montrent que l'on peut adapter la démonstration de [6] au cas où les vitesses dépendent du temps. Ainsi, pour eux, le cadre de [6] est strictement plus général que celui de [7].

Si les fonctions vitesses sont définies par (3.1), alors la fonction A caractérise entièrement le modèle. Pour finir de définir le cadre de cette partie, il nous suffit donc de fixer les hypothèses sur A . On supposera que la fonction $A: [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ vérifie les cinq conditions suivantes :

- (1) A est croissante, continue à droite et vérifie $A(0) = 0$ et $A(1) = 1$,
- (2) pour tout $x \in]0; 1[$, $A(x) < x$,
- (3) A est dérivable en 0 et en 1 et on a $\sigma_1^2 := A'(0) < 1$ et $\sigma_2^2 := A'(1) > 1$,
- (4) il existe $\eta_1 > 0$ et $\underline{B}, \overline{B}: [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ deux fois dérivables sur $[0; \eta_1]$ et de dérivée seconde bornée tels que $\underline{B}(0) = \overline{B}(0) = 0$,

$$\forall x \in [0; \eta_1], \underline{B}(x) \leq A(x) \leq \overline{B}(x)$$

$$\text{et } \underline{B}'(0) = \overline{B}'(0) = A'(0),$$

- (5) il existe $\eta_2 > 0$ et $\underline{C}, \overline{C}: [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ deux fois dérivables sur $[1 - \eta_2; 1]$ et de dérivée seconde bornée tels que $\underline{C}(1) = \overline{C}(1) = 1$,

$$\forall x \in [1 - \eta_2; 1], \underline{C}(x) \leq A(x) \leq \overline{C}(x)$$

$$\text{et } \underline{C}'(1) = \overline{C}'(1) = A'(1).$$

La condition (2) correspond au fait que l'on se place dans le cas sous-critique. Les conditions (3), (4) et (5) sont des conditions locales de régularité en 0 et en 1 pour la fonction A .

Comme dans la partie 2, on note $((x_k^t(s))_{1 \leq k \leq n^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$ le mouvement brownien branchant de fonction vitesse Σ_t^2 et d'horizon fini $t \geq 0$ et on pose

$$M(t) := \max_{1 \leq k \leq n^t(t)} x_k^t(t)$$

la position de sa particule extrême à l'instant t et

$$\mathcal{E}_t := \sum_{k=1}^{n^t(t)} \delta_{x_k^t(t) - \tilde{m}(t)}$$

son processus extrême à l'instant t , avec

$$\tilde{m}(t) = \sqrt{2}t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \log t.$$

On considère également le processus ponctuel \mathcal{L} , défini comme la limite en loi du processus ponctuel \mathcal{L}_t des particules à l'instant t d'un mouvement brownien standard vu depuis son maximum $\bar{M}(t)$, conditionnellement à $\{\bar{M}(t) \geq \sqrt{2}\sigma_2 t\}$, et la variable aléatoire strictement positive Y , définie comme la limite de la martingale de McKean $(Y_t)_{t \geq 0}$, qui est uniformément intégrable. Enfin, on note toujours $\tilde{C} > 0$ la constante ne dépendant que de σ_2 présente dans le théorème 2.4, qui est en fait égale à $\sigma_2 C_{\tilde{u}}(a)$, où la constante $C_{\tilde{u}}(a)$ est définie dans la sous-partie 2.3, avec $a = \sqrt{2}(\sigma_2 - 1)$ et \tilde{u} la solution de l'équation F-KPP (1.1) avec condition initiale $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette partie :

Théorème 3.1 (Bovier et Hartung, 2014). *Soit $A: [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ vérifiant les conditions (1) à (5). On considère les mouvements browniens branchants de fonctions vitesse définies par (3.1) pour $t \geq 0$.*

(i) *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left[\exp \left(-\tilde{C} Y e^{-\sqrt{2}x} \right) \right]. \quad (3.2)$$

(ii) *Le processus extrême \mathcal{E}_t converge en loi quand t tend vers $+\infty$ vers un processus ponctuel \mathcal{E} . Soit η un mélange de processus ponctuels de Poisson d'intensité $\sqrt{2}\tilde{C} Y e^{-\sqrt{2}x} dx$ conditionnellement à Y . On note $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$, les atomes de η . Soit $(\Lambda^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ une suite i.i.d. de processus ponctuels de même loi que \mathcal{L} . Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $(\Lambda_j^{(i)})_{j \in \mathbb{N}}$, les atomes de $\Lambda^{(i)}$. Alors on a l'identité*

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{loi}}{=} \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \delta_{\eta_i + \sigma_2 \Lambda_j^{(i)}}. \quad (3.3)$$

Les convergences obtenues en (i) et (ii) sont exactement les mêmes que dans le théorème 2.4 : les limites en loi de $M(t) - \tilde{m}(t)$ et \mathcal{E}_t ne dépendent que de σ_1 et σ_2 , c'est-à-dire des pentes en 0 et 1 de la fonction A .

Présentons les différentes étapes de la démonstration de ce théorème. Dans la sous-partie 3.2, nous établissons un résultats de localisation pour les trajectoires des particules extrêmes, analogue à ceux de la sous-partie 2.2. Dans la sous-partie 3.3, on montre la tension du processus extrême et on en déduit alors qu'il suffit de montrer la convergence des lois fini-dimensionnelles du processus extrême, c'est-à-dire des k -uplets $(\mathcal{N}_{u_1}(t), \dots, \mathcal{N}_{u_k}(t))$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}$, où

$$\mathcal{N}_u(t) := \sum_{k=1}^{n^t(t)} \mathbb{1}_{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) > u}.$$

Pour cela, dans la sous-partie 3.4, on approche les fonctions vitesses Σ_t^2 par deux fonctions affines en deux morceaux $\underline{\Sigma}_t^2$ et $\overline{\Sigma}_t^2$, qui encadrent Σ_t^2 au voisinage de 0 et de t et dont les pentes convergent vers σ_1 et σ_2 quand t tend vers l'infini. Enfin, dans les sous-parties 3.5 et 3.6, on montre que les transformées de Laplace des k -uplets $(\mathcal{N}_{u_1}(t), \dots, \mathcal{N}_{u_k}(t))$ sont encadrées à la limite par celles associées aux mouvements browniens branchants de fonctions vitesse $\underline{\Sigma}_t^2$ et $\overline{\Sigma}_t^2$. On conclut alors à l'aide du théorème 2.4, qui nous indique que les deux limites par lesquelles on encadre sont égales.

3.2 Localisation des trajectoires

Dans la partie 2, nous avons défini $\mathcal{S}_{r,\gamma}^t$, borélien de $\mathcal{D}([0; t], \mathbb{R})$, de telle sorte que le contrôle fourni par l'inégalité (2.16) du lemme 2.7 se réécrit $\sup_{t \geq 0} \mathbb{P}(\xi \in \mathcal{S}_{r,\gamma}^t) \leq \epsilon$ pour ξ un pont brownien entre 0 et 0 de longueur t . Nous avons ensuite introduit le borélien $\hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t$ pour transposer cette propriété à la trajectoire d'une particule du mouvement brownien branchant de fonction vitesse Σ_t^2 , c'est-à-dire pour que l'on ait l'équivalence

$$X \in \hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t \Leftrightarrow \xi \in \mathcal{S}_{r,\gamma}^t,$$

où X est la trajectoire d'une particule du mouvement brownien branchant de fonction vitesse Σ_t^2 , c'est-à-dire $X = (B_{\Sigma_t^2(s)})_{0 \leq s \leq t}$ avec B un mouvement brownien, et $\xi = (B_s - (s/t)B_t)_{0 \leq s \leq t}$ est un pont brownien entre 0 et 0 de longueur t .

Dans cette sous-partie, nous voulons procéder de même pour le contrôle explicite fourni par l'inégalité (2.15) du lemme 2.7, que l'on rappelle ici : soient ξ un pont brownien entre 0 et 0 de longueur t , $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, $q > 1$ et $t \geq 3q$, alors on a

$$\mathbb{P}(\exists s \in [q; t - q] : |\xi_s| \geq (s \wedge (t - s))^\gamma) \leq 8 \sum_{k=[q]}^{\infty} \frac{(k+1)^{\frac{1}{2}}}{(k-1)^\gamma} \times e^{-\frac{(k-1)^{2\gamma}}{2(k+1)}}. \quad (3.4)$$

On définit donc, pour $J \subset [0; t]$, un nouveau borélien de $\mathcal{D}([0; t], \mathbb{R})$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{J,\gamma}^t := \{X \in \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R}) \mid \forall s \in J, |X(s)| \leq (s \wedge (t - s))^\gamma\}$$

et ainsi la probabilité dans (3.4) s'écrit $\mathbb{P}(\xi \notin \tilde{\mathcal{S}}_{[q;t-q],\gamma}^t)$. On souhaite transposer cette propriété à la trajectoire X d'une particule du mouvement brownien branchant de fonction vitesse Σ_t^2 , comme pour $\mathcal{S}_{r,\gamma}^t$ et $\hat{\mathcal{T}}_{r,\gamma}^t$. On définit donc

$$\tilde{\mathcal{T}}_{J,\gamma}^t := \left\{ X \in \mathcal{D}([0; t], \mathbb{R}) \mid \forall s \in J, \left| X(s) - \frac{\Sigma_t^2(s)}{t} X(t) \right| \leq \left(\Sigma_t^2(s) \wedge (t - \Sigma_t^2(s)) \right)^\gamma \right\}$$

et on a alors l'équivalence

$$X \in \tilde{\mathcal{T}}_{J,\gamma}^t \Leftrightarrow \xi \in \tilde{\mathcal{S}}_{\Sigma_t^2(J),\gamma}^t, \quad (3.5)$$

avec X et ξ définis comme précédemment. On va alors pouvoir obtenir un contrôle sur les trajectoires des particules du mouvement brownien branchant à partir de l'inégalité (3.4) :

Proposition 3.2. Soient $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, $q > 1$ et $t \geq 3q$. Alors on a, pour tout $i \in \llbracket 1; n^t(t) \rrbracket$,

$$\mathbb{P} \left(x_{i,t}^t \notin \tilde{\mathcal{T}}_{I_q, \gamma}^t \mid \tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}} \right) \leq 8 \sum_{k=\lfloor q \rfloor}^{\infty} \frac{(k+1)^{\frac{1}{2}}}{(k-1)^\gamma} \times e^{-\frac{(k-1)^{2\gamma}}{2(k+1)}},$$

où $I_q := (\Sigma_t^2)^{-1}([q; t - q])$.

Démonstration. On rappelle que τ est l'arbre sous-jacent au mouvement brownien branchant et $(\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}}$ est la famille des temps de vie des particules de l'arbre. Par construction, sachant τ et $(\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}}$, la trajectoire $x_{i,t}^t$ d'une particule du mouvement brownien branchant a la même loi que $(B_{\Sigma_t^2(s)})_{0 \leq s \leq t}$, où B un mouvement brownien. D'après l'équivalence (3.5), on a

$$\mathbb{P} \left(x_{i,t}^t \notin \tilde{\mathcal{T}}_{I_q, \gamma}^t \mid \tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}} \right) = \mathbb{P} \left(\xi \in \tilde{\mathcal{S}}_{\Sigma_t^2(I_q), \gamma}^t \right), \quad (3.6)$$

où $\xi := (B_s - (s/t)B_t)_{0 \leq s \leq t}$ est un pont brownien entre 0 et 0 de longueur t . Or $\Sigma_t^2(I_q) \subset [q; t - q]$, donc (3.6) est majoré par $\mathbb{P}(\xi \in \tilde{\mathcal{S}}_{[q; t - q], \gamma}^s)$ et on conclut grâce à l'inégalité (3.4). \square

3.3 Démonstration du théorème principal

Dans cette sous-partie, nous allons montrer que la démonstration du théorème principal 3.1 se ramène à la démonstration du théorème 3.4. On obtient tout d'abord la tension du processus extrémal de la même manière que dans le cas à deux vitesses :

Proposition 3.3. Pour tout $d \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_t(\lfloor d; \infty \rfloor) \geq N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0, \quad (3.7)$$

avec convergence uniforme en $t \in \mathbb{R}_+$. En particulier, la famille $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ est tendue.

Démonstration. La preuve est identique à celle de la proposition 2.18. \square

Comme $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ est tendue, il s'agit maintenant de montrer l'unicité de la limite. Pour cela on passe par les lois fini-dimensionnelles : pour $t \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_u(t) &:= \sum_{k=1}^{n^t(t)} \mathbb{1}_{x_k^t(t) - \tilde{m}(t) > u}, \\ \mathcal{N}_u &:= \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{\eta_i + \sigma_2 \Lambda_j^{(i)} > u}, \end{aligned}$$

en utilisant les notations du théorème 3.1. On définit également pour $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}$ la transformée de Laplace de $(\mathcal{N}_{u_1}(t), \dots, \mathcal{N}_{u_k}(t))$ par

$$\Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^k c_i \mathcal{N}_{u_i}(t) \right) \right]$$

pour $c = (c_1, \dots, c_k) \in \mathbb{R}_+^k$. On définit de la même manière Ψ_{u_1, \dots, u_k} la transformée de Laplace de $(\mathcal{N}_{u_1}, \dots, \mathcal{N}_{u_k})$. On montrera dans les trois sous-parties suivantes le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}$ et $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Psi_{u_1, \dots, u_k}(c).$$

Montrons tout d'abord comment ce théorème implique le théorème principal 3.1.

Démonstration du théorème 3.1. Montrons tout d'abord le point (ii) du théorème 3.1. $(\mathcal{E}_t)_{t \geq 0}$ est tendue donc relativement compacte (pour la métrique de Prokhorov) et donc toute sous-suite $(\mathcal{E}_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$, avec $t_n \rightarrow \infty$, admet une valeur d'adhérence. On considère \mathcal{E} une telle valeur d'adhérence et on note

$$\tilde{\mathcal{E}} := \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \delta_{\eta_i + \sigma_2 \Lambda_j^{(i)}},$$

il suffit alors de montrer que \mathcal{E} et $\tilde{\mathcal{E}}$ ont même loi. Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}$, d'après le théorème 3.4, on a la convergence en loi de $(\mathcal{N}_{u_1}(t), \dots, \mathcal{N}_{u_k}(t))$ vers $(\mathcal{N}_{u_1}, \dots, \mathcal{N}_{u_k})$ quand t tend vers l'infini, donc

$$(\mathcal{E}(\lceil u_1; \infty \rceil), \dots, \mathcal{E}(\lceil u_k; \infty \rceil)) \stackrel{\text{loi}}{=} (\tilde{\mathcal{E}}(\lceil u_1; \infty \rceil), \dots, \tilde{\mathcal{E}}(\lceil u_k; \infty \rceil)).$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(\lceil u; \infty \rceil) < \infty$ p.s. d'après la convergence (3.7) qui est uniforme en $t \in \mathbb{R}_+$. On a donc aussi $\tilde{\mathcal{E}}(\lceil u; \infty \rceil) < \infty$ et on en déduit que pour tous $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}$, on a

$$(\mathcal{E}(\lceil u_1; v_1 \rceil), \dots, \mathcal{E}(\lceil u_k; v_k \rceil)) \stackrel{\text{loi}}{=} (\tilde{\mathcal{E}}(\lceil u_1; v_1 \rceil), \dots, \tilde{\mathcal{E}}(\lceil u_k; v_k \rceil)).$$

Or l'ensemble $\mathcal{C} := \{\lceil u; v \rceil \mid u, v \in \mathbb{R}\}$ vérifie les hypothèses de la proposition 1.13, donc on en déduit que \mathcal{E} et $\tilde{\mathcal{E}}$ ont même loi, ce qui conclut la preuve du point (ii).

Montrons à présent le point (i). Soit $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(M(t) - \tilde{m}(t) \leq u) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_t(\lceil u; \infty \rceil) = 0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{E}(\lceil u; \infty \rceil) = 0),$$

or, par (3.3), la loi de \mathcal{E} ne dépend que de σ_1 et σ_2 donc d'après le théorème 2.4, $\mathbb{P}(\mathcal{E}(\lceil u; \infty \rceil) = 0) = \mathbb{E}[\exp(-\tilde{C}Y e^{-\sqrt{2}u})]$. \square

3.4 Approximation par des mouvements browniens branchants à deux vitesses

Pour démontrer le théorème 3.4, nous allons comparer la fonction A à des fonctions affines en deux morceaux, pour pouvoir se ramener au mouvement brownien branchant à deux vitesses étudié dans la partie 2. Comme la limite du processus extrémal ne dépend que des pentes de A en 0 et en 1, on se contente d'encadrer la fonction A au voisinage de 0 et de 1, par des fonctions affines en deux morceaux dont les pentes vont converger vers σ_1 et σ_2 . Pour construire ces fonctions, définissons tout d'abord, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} \delta^<(t) &:= \sup \left\{ x \in [0; 1] \mid A(x) \leq \frac{1}{t^{2/3}} \right\}, \\ \delta^>(t) &:= 1 - \inf \left\{ x \in [0; 1] \mid A(x) \geq 1 - \frac{1}{t^{2/3}} \right\}. \end{aligned}$$

Remarque. Comme $A(x) \leq x$ pour tout $x \in [0; 1]$, on a $\delta^>(t) \leq t^{-2/3}$ et donc

$$\delta^>(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

Mais ce n'est pas forcément le cas de $\delta^<(t)$: en effet la fonction A peut être nulle au voisinage de zéro. Cependant, $\delta^<(t)$ étant décroissant en t , on peut définir

$$\delta^< := \lim_{t \rightarrow \infty} \delta^<(t).$$

On a alors, pour tout $x < \delta^<$, $A(x) = 0$ et, pour tout $x > \delta^<$, $A(x) > 0$. On remarque également que si $\sigma_1 > 0$, alors $\delta^< = 0$. Nous distinguerons régulièrement les trois cas suivant : soit $\sigma_1 > 0$, soit $\sigma_1 = 0$ et $\delta^< = 0$, soit $\delta^< > 0$.

Nous allons maintenant construire les fonctions \underline{A}_t et \overline{A}_t , continues et affines en deux morceaux, pour encadrer la fonction A au voisinage de 0 et de 1. Pour cela nous allons utiliser les conditions (4) et (5) vérifiées par la fonction A . On fixe une constante $M > 0$ telle que \underline{B}'' et \overline{B}'' sur $[0; \eta_1]$ et \underline{C}'' et \overline{C}'' sur $[1 - \eta_2; 1]$ soient bornées par M . Les fonctions \underline{A}_t et \overline{A}_t vont être définies par leur deux pente : $\underline{\sigma}_{1,t}^2$ et $\underline{\sigma}_{2,t}^2$ pour \underline{A}_t et $\overline{\sigma}_{1,t}^2$ et $\overline{\sigma}_{2,t}^2$ pour \overline{A}_t . On pose, pour tout $t > 0$,

$$\underline{\sigma}_{2,t}^2 := \sigma_2^2 + \frac{M}{2} \delta^>(t) \text{ et } \overline{\sigma}_{2,t}^2 := \sigma_2^2 - \frac{M}{2} \delta^>(t).$$

Pour $\underline{\sigma}_{1,t}^2$ et $\overline{\sigma}_{1,t}^2$, il va falloir différencier les trois cas présentés dans la remarque précédente.

- Si $\sigma_1 > 0$, on pose, pour tout $t > 0$,

$$\underline{\sigma}_{1,t}^2 := \sigma_1^2 - \frac{M}{2} \delta^<(t) \text{ et } \overline{\sigma}_{1,t}^2 := \sigma_1^2 + \frac{M}{2} \delta^<(t).$$

- Si $\sigma_1 = 0$ et $\delta^< = 0$, on pose, pour tout $t > 0$,

$$\underline{\sigma}_{1,t}^2 := 0 \text{ et } \overline{\sigma}_{1,t}^2 := \frac{M}{2} \delta^<(t).$$

- Si $\delta^< > 0$, on a donc $\sigma_1 = 0$ et on pose, pour tout $t > 0$,

$$\underline{\sigma}_{1,t}^2 := 0 \text{ et } \overline{\sigma}_{1,t}^2 := 0.$$

Dans tous les cas, on a $\underline{\sigma}_{1,t}^2, \overline{\sigma}_{1,t}^2 \rightarrow \sigma_1^2$ et $\underline{\sigma}_{2,t}^2, \overline{\sigma}_{2,t}^2 \rightarrow \sigma_2^2$ quand $t \rightarrow \infty$, donc pour t suffisamment grand, on a $\underline{\sigma}_{1,t}^2, \overline{\sigma}_{1,t}^2 < 1$ et $\underline{\sigma}_{2,t}^2, \overline{\sigma}_{2,t}^2 > 1$. On peut donc définir

$$\underline{b}_t := \frac{\underline{\sigma}_{2,t}^2 - 1}{\underline{\sigma}_{2,t}^2 - \underline{\sigma}_{1,t}^2} \text{ et } \overline{b}_t := \frac{\overline{\sigma}_{2,t}^2 - 1}{\overline{\sigma}_{2,t}^2 - \overline{\sigma}_{1,t}^2}$$

les instants de changement de pentes de \underline{A}_t et \overline{A}_t . Aux fonctions \underline{A}_t et \overline{A}_t , on associe les fonctions vitesses

$$\underline{\Sigma}_t^2 : s \in [0; t] \mapsto t \underline{A}_t \left(\frac{s}{t} \right) \text{ et } \overline{\Sigma}_t^2 : s \in [0; t] \mapsto t \overline{A}_t \left(\frac{s}{t} \right).$$

Les fonctions $\underline{\Sigma}_t^2$ et $\overline{\Sigma}_t^2$ vérifient bien les propriétés escomptées :

Lemme 3.5. Les fonctions $\underline{\Sigma}_t^2, \overline{\Sigma}_t^2: [0; t] \longrightarrow [0; t]$ sont continues et affines en deux morceaux de pentes respectives $\underline{\sigma}_{1,t}^2$ puis $\underline{\sigma}_{2,t}^2$ et $\overline{\sigma}_{1,t}^2$ puis $\overline{\sigma}_{2,t}^2$. Elles vérifient $\underline{\Sigma}_t^2(0) = \overline{\Sigma}_t^2(0) = 0$ et $\underline{\Sigma}_t^2(1) = \overline{\Sigma}_t^2(1) = 1$. En outre, on a les encadrements suivants pour t suffisamment grand :

(i) Pour tout s tel que $\Sigma_t^2(s) \in [t - t^{1/3}; t]$, on a

$$\underline{\Sigma}_t^2(s) \leq \Sigma_t^2(s) \leq \overline{\Sigma}_t^2(s).$$

(ii) Si $\delta^< = 0$, alors pour tout s tel que $\Sigma_t^2(s) \in [0; t^{1/3}]$, on a

$$\underline{\Sigma}_t^2(s) \leq \Sigma_t^2(s) \leq \overline{\Sigma}_t^2(s).$$

(iii) Si $\delta^< > 0$, alors on a $\bar{b}_t \leq \underline{b}_t$ et, pour tout $s \in [0; (\delta^< \wedge \bar{b}_t)t]$,

$$\underline{\Sigma}_t^2(s) = \Sigma_t^2(s) = \overline{\Sigma}_t^2(s) = 0.$$

Démonstration. Les premières propriétés des $\underline{\Sigma}_t^2$ et $\overline{\Sigma}_t^2$ sont immédiates par construction. Montrons les différents encadrements. Pour le point (i), considérons t suffisamment grand tel que $\delta^>(t) \leq \eta_2$ et s tel que $\Sigma_t^2(s) \in [t - t^{1/3}; t]$. Alors, par définition de $\delta^>(t)$, on a $s/t \geq 1 - \delta^>(t) \geq 1 - \eta_2$ et donc

$$\Sigma_t^2(s) = tA\left(\frac{s}{t}\right) \leq t\overline{C}\left(\frac{s}{t}\right).$$

Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, on majore

$$\begin{aligned} t\overline{C}\left(\frac{s}{t}\right) &\leq t\left(\overline{C}(1) + \overline{C}'(1)\left(\frac{s}{t} - 1\right) + \frac{M}{2}\left(\frac{s}{t} - 1\right)^2\right) \\ &\leq t\left(1 - \sigma_2^2\left(1 - \frac{s}{t}\right) + \frac{M}{2}\delta^>(t)\left(1 - \frac{s}{t}\right)\right) \\ &= t\overline{A}_t\left(\frac{s}{t}\right) = \overline{\Sigma}_t^2(s), \end{aligned}$$

en utilisant que $1 - s/t \leq \delta^>(t)$. On a donc montré que $\Sigma_t^2(s) \leq \overline{\Sigma}_t^2(s)$ et, en minorant de même \underline{C} par inégalité de Taylor-Lagrange, on obtient $\underline{\Sigma}_t^2(s) \leq \Sigma_t^2(s)$.

Pour le point (ii), on a $\delta^< = 0$ donc on peut considérer t suffisamment grand tel que $\delta^<(t) \leq \eta_1$. Pour s tel que $\Sigma_t^2(s) \in [0; t^{1/3}]$, on a $s \leq \delta^<(t) \leq \eta_1$ et donc de la même manière que précédemment, on obtient

$$\Sigma_t^2(s) = tA\left(\frac{s}{t}\right) \geq t\underline{B}\left(\frac{s}{t}\right) \geq t\left(\sigma_1^2\frac{s}{t} - \frac{M}{2}\delta^<(t)\frac{s}{t}\right) = t\underline{A}_t\left(\frac{s}{t}\right) = \underline{\Sigma}_t^2(s)$$

et de même $\Sigma_t^2(s) \leq \overline{\Sigma}_t^2(s)$.

Enfin, si $\delta^< > 0$, on a $\underline{\sigma}_{1,t}^2 = \overline{\sigma}_{1,t}^2 = 0$ et on a $\underline{\sigma}_{2,t}^2 > \overline{\sigma}_{2,t}^2$ donc $\underline{b}_t \geq \bar{b}_t$. Or Σ_t^2 est nulle sur $[0; t\delta^<[$, $\underline{\Sigma}_t^2$ est nulle sur $[0; \underline{b}_t]$ et $\overline{\Sigma}_t^2$ est nulle sur $[0; \bar{b}_t]$, donc on en déduit le troisième point. \square

Nous allons donc considérer les mouvements browniens branchants à deux vitesses associés aux fonctions vitesse $\underline{\Sigma}_t^2$ et $\overline{\Sigma}_t^2$ pour comparer leur comportement asymptotique à celui de fonction vitesse Σ_t^2 . Introduisons quelques notations. Pour $t > 0$, on considère $((y_k^t(s))_{1 \leq k \leq n^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$ un mouvement brownien branchant de fonction vitesse $\underline{\Sigma}_t^2$, tel que l'arbre sous-jacent et les temps de vie des particules soient les mêmes que pour $((x_k^t(s))_{1 \leq k \leq n^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$ mais les trajectoires soient indépendantes (c'est-à-dire que les deux arbres marqués aléatoires sont construits à partir des mêmes τ et $(\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}}$ et avec des marques $(Y_u)_{u \in \mathcal{U}}$ indépendantes). On pose, pour $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{N}_u(t) := \sum_{k=1}^{n^t(t)} \mathbb{1}_{\underline{y}_k^t(t) - \tilde{m}(t) > u}.$$

Puis on définit $\underline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t$ la transformée de Laplace de $(\mathcal{N}_{u_1}(t), \dots, \mathcal{N}_{u_k}(t))$ pour $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}$, de la même manière que dans la sous-partie 3.3. On définit de même $(\overline{y}_k^t(s))_{1 \leq k \leq n^t(s)}_{0 \leq s \leq t}$, $\overline{\mathcal{N}}_u(t)$ et $\overline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t$ pour la fonction vitesse $\overline{\Sigma}_t^2$. Alors on a les convergences suivantes :

Proposition 3.6. *Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}$ et $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t(c) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Psi_{u_1, \dots, u_k}(c), \\ \overline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t(c) &\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Psi_{u_1, \dots, u_k}(c). \end{aligned}$$

Démonstration. Par construction, on a $\underline{\sigma}_{1,t}^2, \overline{\sigma}_{1,t}^2 \rightarrow \sigma_1^2$ et $\underline{\sigma}_{2,t}^2, \overline{\sigma}_{2,t}^2 \rightarrow \sigma_2^2$ quand $t \rightarrow \infty$. Donc on peut appliquer le théorème 2.4 aux processus extrémaux des mouvements browniens branchants de fonctions vitesse $\underline{\Sigma}_t^2$ et $\overline{\Sigma}_t^2$, ce qui montre la proposition. \square

Dans la suite, nous soulignerons tous les objets liés à $\underline{\Sigma}_t^2$ et surlignerons tous ceux liés à $\overline{\Sigma}_t^2$. En particulier, on définit, de la même manière que $\delta^<(t)$ et $\delta^>(t)$ pour Σ_t^2 , les grandeurs $\underline{\delta}^<(t)$, $\underline{\delta}^>(t)$ associées à $\underline{\Sigma}_t^2$ et $\overline{\delta}^<(t)$, $\overline{\delta}^>(t)$ associées à $\overline{\Sigma}_t^2$.

3.5 Comparaison gaussienne

Nous voulons montrer le théorème 3.4, c'est-à-dire la convergence de $\Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c)$, en utilisant l'encadrement de la fonction vitesse Σ_t^2 construit dans la sous-partie 3.4. Nous allons montrer dans cette sous-partie, à quelques lemmes près qui seront démontrés dans la sous-partie 3.6, le théorème suivant :

Théorème 3.7. *Pour tous $k \in \mathbb{N}$, $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}$ et $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) - \underline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t(c) \geq 0, \quad (3.8)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) - \overline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t(c) \leq 0. \quad (3.9)$$

Vérifions que l'on peut en déduire le théorème 3.4.

Démonstration du théorème 3.4. $\underline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t(c)$ converge vers $\Psi_{u_1, \dots, u_k}(c)$ d'après la proposition 3.6, donc on déduit de (3.8) que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) \geq \Psi_{u_1, \dots, u_k}(c)$$

et de même on obtient, à partir de (3.9),

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) \leq \Psi_{u_1, \dots, u_k}(c)$$

ce qui conclut la démonstration. \square

On notera dans cette sous-partie $\tilde{\mathbb{P}} := \mathbb{P}(\cdot \mid \tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}})$ la probabilité sachant la structure d'arbre sous-jacente et les temps de vie des particules, qui sont communs aux différents mouvements browniens branchants considérés (ce sont sous $\tilde{\mathbb{P}}$ des processus gaussiens indépendants définis sur la même structure). On note $\tilde{\mathbb{E}}$ l'espérance associée. On rappelle qu'on a les covariances, pour $i, j \in \llbracket 1; n^t(t) \rrbracket$,

$$\tilde{\mathbb{E}} [x_i^t(s)x_j^t(s)] = \Sigma_t^2(d(x_i^t(s), x_j^t(s))).$$

Démonstration du théorème 3.7. Les démonstrations de (3.8) et (3.9) sont très similaires. Nous travaillerons sur (3.9), en précisant les points où la démonstration de (3.8) diffère. On note, pour $t > 0$ et $\sigma > 0$,

$$\begin{aligned} f(x^t(t)) &= f(x_1^t(t), \dots, x_{n^t(t)}^t(t)) := \exp \left(- \sum_{i=1}^{n^t(t)} \sum_{l=1}^k c_l \mathbb{1}_{x_i^t(t) - \tilde{m}(t) > u_l} \right), \\ f_\sigma(x^t(t)) &= f_\sigma(x_1^t(t), \dots, x_{n^t(t)}^t(t)) := \exp \left(- \sum_{i=1}^{n^t(t)} \sum_{l=1}^k c_l h_\sigma(x_i^t(t) - \tilde{m}(t) - u_l) \right), \end{aligned}$$

où la fonction $h_\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$h_\sigma(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^{-z^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dz = \int_{-\infty}^{x/\sigma} \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

et vérifie $h_\sigma(x)$ tend vers $\mathbb{1}_{x>0}$ pour tout $x \neq 0$ quand σ tend vers 0. Comme $x_i^t(t) - \tilde{m}(t) \neq u_l$ p.s., on en déduit que $f_\sigma(x^t(t))$ converge p.s. vers $f(x^t(t))$. Or $0 \leq f_\sigma(x^t(t)) \leq 1$, donc par convergence dominée, on a

$$\mathbb{E} [f_\sigma(x^t(t))] \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{E} [f(x^t(t))] = \Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) \quad (3.10)$$

et de même $\mathbb{E}[f_\sigma(\bar{y}^t(t))]$ tend vers $\bar{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t(c)$ quand σ tend vers 0. Nous allons donc essayer de contrôler $\mathbb{E}[f_\sigma(x^t(t)) - f_\sigma(\bar{y}^t(t))]$. Pour $h \in [0; 1]$, on définit, pour $0 \leq s \leq t$ et $1 \leq i \leq n^t(s)$,

$$\bar{x}_i^{t,h}(s) := \sqrt{h}x_i^t(s) + \sqrt{1-h}\bar{y}_i^t(s).$$

Alors $((\bar{x}_i^{t,h}(s))_{1 \leq i \leq n^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$ est un mouvement brownien branchant de fonction vitesse

$$\bar{\Sigma}_{t,h}^2: s \in [0; t] \mapsto h\Sigma_t^2(s) + (1-h)\bar{\Sigma}_t^2(s)$$

et ayant toujours le même arbre sous-jacent et les mêmes temps de vie des particules que pour $((x_k^t(s))_{1 \leq k \leq n^t(s)})_{0 \leq s \leq t}$. On a ainsi interpolé $x^t(t) = \bar{x}_i^{t,1}(t)$ et $\bar{y}^t(t) = \bar{x}_i^{t,0}(t)$ et on a

$$f_\sigma(x^t(t)) - f_\sigma(\bar{y}^t(t)) = \int_0^1 \frac{d}{dh} f_\sigma(\bar{x}^{t,h}(t)) dh,$$

où

$$\frac{d}{dh} f_\sigma(\bar{x}^{t,h}(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}_1^{t,h}(t), \dots, \bar{x}_{n^t(t)}^{t,h}(t)) \left(\frac{1}{\sqrt{h}} x_i^t(t) - \frac{1}{\sqrt{1-h}} \bar{y}_i^t(t) \right) \quad (3.11)$$

avec

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}^{t,h}(t)) = - \left(\sum_{l=1}^k \frac{c_l}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left(- \frac{(x_i^{t,h}(t) - \tilde{m}(t) - u_l)^2}{2\sigma^2} \right) \right) f_\sigma(\bar{x}^{t,h}(t)). \quad (3.12)$$

On introduit alors dans chaque terme de la somme (3.11) la décomposition

$$1 = \mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \in \bar{I}_{h,\gamma}^t} + \mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \notin \bar{I}_{h,\gamma}^t},$$

pour $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ fixé et

$$\bar{I}_h := \begin{cases} [\delta^<(t)t; (1 - \bar{\delta}^>(t))t] & \text{si } \delta^< = 0 \\ [\bar{\delta}_h^<(t)t; (1 - \bar{\delta}^>(t))t] & \text{si } \delta^< > 0 \end{cases},$$

où $\bar{\delta}_h^<(t)$ est défini comme $\delta^<(t)$ mais pour la fonction $\bar{\Sigma}_{t,h}^2$. On a alors

$$\mathbb{E} [f_\sigma(x^t(t)) - f_\sigma(\bar{y}^t(t))] = \mathbb{E} \left[\int_0^1 (\bar{S}_1(\sigma, h) + \bar{S}_2(\sigma, h)) dh \right], \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{S}_1(\sigma, h) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}^{t,h}(t)) \mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \in \bar{I}_{h,\gamma}^t} \left(\frac{x_i^t(t)}{\sqrt{h}} - \frac{\bar{y}_i^t(t)}{\sqrt{1-h}} \right), \\ \bar{S}_2(\sigma, h) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}^{t,h}(t)) \mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \notin \bar{I}_{h,\gamma}^t} \left(\frac{x_i^t(t)}{\sqrt{h}} - \frac{\bar{y}_i^t(t)}{\sqrt{1-h}} \right). \end{aligned}$$

On obtient de la même manière pour la borne inférieure la décomposition

$$\mathbb{E} [f_\sigma(x^t(t)) - f_\sigma(\underline{y}^t(t))] = \mathbb{E} \left[\int_0^1 (\underline{S}_1(\sigma, h) + \underline{S}_2(\sigma, h)) dh \right],$$

en choisissant ici

$$\underline{I}_h := \begin{cases} [\delta^<(t)t; (1 - \delta^>(t))t] & \text{si } \sigma_1 > 0 \\ [\delta_h^<(t)t; (1 - \delta^>(t))t] & \text{si } \sigma_1 = 0 \end{cases}.$$

Le contrôle de $\bar{S}_2(\sigma, h)$ et $\underline{S}_2(\sigma, h)$ est fourni par le lemme suivant, que nous montrerons dans la sous-partie 3.6 :

Lemme 3.8. *Avec les notations qui précèdent, on a les deux limites suivantes*

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\overline{S}_2(\sigma, h)| dh \right] &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\underline{S}_2(\sigma, h)| dh \right] &= 0. \end{aligned}$$

Contrôlons à présent $\overline{S}_1(\sigma, h)$ et $\underline{S}_1(\sigma, h)$. Par le théorème de Fubini (en utilisant que $\partial f_\sigma / \partial x_i$ est bornée) puis en conditionnant par $(\tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}})$, on a

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 \overline{S}_1(\sigma, h) dh \right] = \int_0^1 \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} \left[\overline{S}_1(\sigma, h) \right] \right] dh.$$

Par définition de $\tilde{\mathbb{E}}$, on a, pour $h \in [0; 1]$,

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\overline{S}_1(\sigma, h) \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\overline{x}^{t,h}(t)) \mathbb{1}_{\overline{x}_{i,t}^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \left(\frac{x_i^t(t)}{\sqrt{h}} - \frac{\overline{y}_i^t(t)}{\sqrt{1-h}} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Par définition de $\tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t$ dans la sous-partie 3.2, on a

$$\mathbb{1}_{\overline{x}_{i,t}^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} = \mathbb{1}_{\forall s \in \overline{I}_h, |\xi_i(\Sigma_t^2(s))| \leq (\Sigma_t^2(s) \wedge (t - \Sigma_t^2(s)))^\gamma}, \quad (3.15)$$

où $\xi_i(s) := B_i(s) - (s/t)B_i(t)$ avec B_i mouvement brownien tel que $\overline{x}_{i,t}^{t,h}(s) = B_i(\Sigma_t^2(s))$ pour tout $s \in [0; t]$. On cherche à approcher (3.15) par une fonction ne dépendant que d'un nombre fini de valeurs de ξ_i . Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$g_n((\xi_i(j2^{-n}))_{1 \leq j \leq 2^n}) := \prod_{j=1}^{2^n} \mathbb{1}_{j2^{-n} \in \overline{I}_h} \mathbb{1}_{|\xi_i(\Sigma_t^2(j2^{-n}))| \leq (\Sigma_t^2(j2^{-n}) \wedge (t - \Sigma_t^2(j2^{-n})))^\gamma}.$$

On s'est ainsi ramené à un nombre fini de variables aléatoires gaussiennes et on va pouvoir utiliser la formule d'intégration par parties gaussienne, présentée par exemple par Talagrand [23, Partie A.4] :

Proposition 3.9 (Formule d'intégration par parties gaussienne). *Soient W, Z_1, \dots, Z_N des variables aléatoires gaussiennes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $F: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si, pour tout $a > 0$, $F(x) \exp(-a|x|^2)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, alors on a*

$$\mathbb{E} [WF(Z_1, \dots, Z_N)] = \sum_{j=1}^N \mathbb{E} [WZ_j] \mathbb{E} \left[\frac{\partial F}{\partial x_j}(Z_1, \dots, Z_N) \right].$$

Cependant ici la fonction g_n n'est pas différentiable, mais on peut l'approcher par une suite $(g_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions différentiables comprises entre 0 et 1 et telles que $g_{n,k}$ converge presque partout vers g_n quand k tend vers l'infini (en utilisant les fonctions h_σ pour approcher les fonctions indicatrices). En appliquant la formule d'intégration par parties avec $W = x_i^t(t)$, $N = n^t(t) + 2^n$, $(Z_1, \dots, Z_N) = (\overline{x}_1^{t,h}(t), \dots, \overline{x}_{n^t(t)}^{t,h}(t), \xi_i(2^{-n}), \dots, \xi_i(1))$ et à la fonction

$$F: (x, z) \in \mathbb{R}^{n^t(t)} \times \mathbb{R}^{2^n} \longmapsto \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(x) \cdot g_{n,k}(z)$$

qui est différentiable et est bornée par $\sum_{l=1}^k c_l / \sqrt{2\pi\sigma^2}$ d'après (3.12) donc vérifie les hypothèses de la proposition 3.9, on obtient

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[x_i^t(t) \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}^{t,h}(t)) \cdot g_{n,k}(\xi_i(2^{-n}), \dots, \xi_i(1)) \right] \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[x_i^t(t) \bar{x}_j^{t,h}(t) \right] \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \cdot g_{n,k}(\xi_i(2^{-n}), \dots, \xi_i(1)) \right] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{2^n} \tilde{\mathbb{E}} \left[x_i^t(t) \xi_i(j2^{-n}) \right] \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}^{t,h}(t)) \cdot \frac{\partial g_{n,k}}{\partial x_i}(\xi_i(2^{-n}), \dots, \xi_i(1)) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[x_i^t(t) \bar{x}_j^{t,h}(t) \right] \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \cdot g_{n,k}(\xi_i(2^{-n}), \dots, \xi_i(1)) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

car $x_i^t(t)$ et $\xi_i(j2^{-n})$ sont indépendants (ξ_i est un pont brownien indépendant de $x_i^{t,h}(t)$) et donc $\tilde{\mathbb{E}}[x_i^t(t)\xi_i(j2^{-n})] = 0$. On calcule les dérivées partielles secondes de f_σ , pour $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) = \left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right) \left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_j^{t,h}(t)) \right) f_\sigma(\bar{x}^{t,h}(t)), \quad (3.18)$$

où l'on a posé, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_\sigma^l(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{m}(t) - u_l)^2}{2\sigma^2}\right).$$

En faisant tendre k vers l'infini dans (3.16) et (3.17), on obtient par théorème de convergence dominée (pour la domination, on majore $g_{n,k}$ par 1, $\frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}$ sont bornées d'après (3.12) et (3.18) et $x_i^t(t)$ est intégrable),

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{E}} \left[x_i^t(t) \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}^{t,h}(t)) \cdot g_n(\xi_i(2^{-n}), \dots, \xi_i(1)) \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[x_i^t(t) \bar{x}_j^{t,h}(t) \right] \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \cdot g_n(\xi_i(2^{-n}), \dots, \xi_i(1)) \right]. \end{aligned}$$

Puis, toujours par le théorème de convergence dominée, en faisant tendre n vers l'infini et en dominant g_n par 1, on obtient

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbb{E}} \left[x_i^t(t) \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}^{t,h}(t)) \cdot \mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[x_i^t(t) \bar{x}_j^{t,h}(t) \right] \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \cdot \mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

On remarque que l'égalité (3.19) est vraie en remplaçant $x_i^t(t)$ par $\bar{y}_i^t(t)$. On en déduit

que (3.14) est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \sum_{j=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(\frac{x_i^t(t)}{\sqrt{h}} - \frac{\bar{y}_i^t(t)}{\sqrt{1-h}} \right) \bar{x}_j^{t,h}(t) \right] \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left(\tilde{\mathbb{E}} [x_i^t(t)x_j^t(t)] - \tilde{\mathbb{E}} [\bar{y}_i^t(t)\bar{y}_j^t(t)] \right) \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right], \end{aligned}$$

en utilisant que $\bar{x}_i^{t,h}(s) = \sqrt{h}x_i^t(s) + \sqrt{1-h}\bar{y}_i^t(s)$ et l'indépendance entre $x_i^t(s)$ et $\bar{y}_i^t(s)$, puis en remarquant que pour $i = j$, on a $\tilde{\mathbb{E}}[x_i^t(t)x_j^t(t)] = t = \tilde{\mathbb{E}}[\bar{y}_i^t(t)\bar{y}_j^t(t)]$. On introduit alors, dans chaque terme de la double somme, la décomposition

$$1 = \mathbb{1}_{d(x_i^t(t), x_j^t(t)) \in \bar{I}_h} + \mathbb{1}_{d(x_i^t(t), x_j^t(t)) \in \bar{I}_h^c},$$

où les deux fonctions indicatrices sont $(\tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}})$ -mesurables. Par construction, on a $d(x_i^t(t), x_j^t(t)) = d(\bar{y}_i^t(t), \bar{y}_j^t(t)) = d(\bar{x}_i^{t,h}(t), \bar{x}_j^{t,h}(t))$ que l'on notera $d_{i,j}^t$ dans la suite. On obtient alors

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 \bar{S}_1(\sigma, h) dh \right] = \int_0^1 \mathbb{E} [\bar{T}_1(\sigma, h) + \bar{T}_2(\sigma, h)] dh, \quad (3.20)$$

en posant,

$$\begin{aligned} \bar{T}_1(\sigma, h) &:= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left(\Sigma_t^2(d_{i,j}^t) - \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t) \right) \mathbb{1}_{d_{i,j}^t \in \bar{I}_h} \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right] \\ \bar{T}_2(\sigma, h) &:= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left(\Sigma_t^2(d_{i,j}^t) - \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t) \right) \mathbb{1}_{d_{i,j}^t \notin \bar{I}_h} \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right], \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\tilde{\mathbb{E}}[x_i^t(t)x_j^t(t)] = \Sigma_t^2(d_{i,j}^t)$ et $\tilde{\mathbb{E}}[\bar{y}_i^t(t)\bar{y}_j^t(t)] = \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t)$. De la même manière, on obtient la décomposition

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 \underline{S}_1(\sigma, h) dh \right] = \int_0^1 \mathbb{E} [\underline{T}_1(\sigma, h) + \underline{T}_2(\sigma, h)] dh,$$

où les grandeurs surlignées sont remplacées par les grandeurs soulignées. Ces deux termes sont contrôlés dans les deux lemmes suivants, que nous montrerons également dans la sous-partie 3.6 :

Lemme 3.10. *Avec les notations qui précèdent, on a les deux limites suivantes*

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [|\bar{T}_1(\sigma, h)|] dh = 0, \\ & \lim_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [|\underline{T}_1(\sigma, h)|] dh = 0. \end{aligned}$$

Lemme 3.11. *Avec les notations qui précèdent, on a les deux inégalités suivantes*

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\bar{T}_2(\sigma, h)] dh \leq 0, \\ & \liminf_{t \rightarrow \infty} \liminf_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\underline{T}_2(\sigma, h)] dh \geq 0. \end{aligned}$$

On obtient, en utilisant successivement la convergence (3.10) et les égalités (3.13) et (3.20) ,

$$\begin{aligned}
\Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) - \overline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t(c) &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[f_\sigma(x^t(t)) - f_\sigma(\overline{y}^t(t)) \right] \\
&= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\overline{T}_1(\sigma, h) + \overline{T}_2(\sigma, h)] dh + \mathbb{E} \left[\int_0^1 \overline{S}_2(\sigma, h) dh \right] \\
&\leq \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [|\overline{T}_1(\sigma, h)|] dh + \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\overline{T}_2(\sigma, h)] dh \\
&\quad + \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\overline{S}_2(\sigma, h)| dh \right]
\end{aligned}$$

et donc en appliquant les lemmes 3.8, 3.10 et 3.11, on en déduit la borne supérieure (3.9). On procède de même pour la borne inférieure : on a

$$\begin{aligned}
\Psi_{u_1, \dots, u_k}^t(c) - \underline{\Psi}_{u_1, \dots, u_k}^t(c) &\geq \liminf_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\overline{T}_2(\sigma, h)] dh - \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [|\overline{T}_1(\sigma, h)|] dh \\
&\quad - \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\overline{S}_2(\sigma, h)| dh \right]
\end{aligned}$$

et on en déduit (3.8) par les trois lemmes. \square

3.6 Démonstration des lemmes auxiliaires

Dans cette sous-partie, nous allons démontrer les différents lemmes laissés en suspens dans la sous-partie précédente. Expliquons tout d'abord rapidement les motivations du découpage effectué dans la démonstration du théorème 3.7. Le terme $\overline{S}_2(\sigma, h)$ est contrôlé grâce à l'indicatrice de l'événement $\{\overline{x}_{i,t}^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{\overline{I}_h, \gamma}^t\}$, qui est de probabilité faible d'après la sous-partie 2.2 (si les bords de \overline{I}_h sont suffisamment loin des bords de $[0; t]$). Le découpage entre $\overline{T}_1(\sigma, h)$ et $\overline{T}_2(\sigma, h)$ semble assez naturel : si $d_{i,j}^t \in \overline{I}_h$, on peut utiliser l'indicatrice de l'événement $\{\overline{x}_{i,t}^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{\overline{I}_h, \gamma}^t\}$ pour contrôler la position des trajectoires $\overline{x}_{j,t}^{t,h}$ et $\overline{x}_{i,t}^{t,h}$ à l'instant $d_{i,j}^t$ où elles se séparent. Alors $\overline{T}_1(\sigma, h)$ est petit car $d_{i,j}^t \in \overline{I}_h$ n'a lieu qu'avec faible probabilité pour deux particules extrémales, par analogie avec la proposition 1.12 (de nouveau si les bords de \overline{I}_h sont suffisamment loin des bords de $[0; t]$). Enfin, pour $\overline{T}_2(\sigma, h)$, si \overline{I}_h est suffisamment grand, on a $\Sigma_t^2 \leq \overline{\Sigma}_t^2$ en dehors de \overline{I}_h et donc on peut en déduire le signe de $\overline{T}_2(\sigma, h) \leq 0$.

On voit donc que \overline{I}_h et \underline{I}_h doivent être choisis à la fois suffisamment petits et suffisamment grands. Le lemme suivant justifie le choix de ces intervalles :

Lemme 3.12. *Les intervalles \overline{I}_h et \underline{I}_h vérifient les propriétés suivantes.*

(i) *Il existe $D > 0$ et $t_0 \geq 0$ tels que, pour tout $t \geq t_0$ et tout $h \in [0; 1]$, on ait*

$$\overline{\Sigma}_{t,h}^2(\overline{I}_h) \subset [Dt^{1/3}; t - Dt^{1/3}] \quad (3.21)$$

$$\underline{\Sigma}_{t,h}^2(\underline{I}_h) \subset [Dt^{1/3}; t - Dt^{1/3}]. \quad (3.22)$$

- (ii) Pour t suffisamment grand, si $s \in](1 - \bar{\delta}^>(t))t; t]$, ou si $\delta^< = 0$ et $s \in [0; \delta^<(t)t[$, on a

$$\Sigma_t^2(s) \leq \bar{\Sigma}_t^2(s).$$

- (iii) Pour t suffisamment grand, si $s \in](1 - \delta^>(t))t; t]$, ou si $\sigma_1 > 0$ et $s \in [0; \delta^<(t)t[$, ou si $(\sigma_1, \delta^<) = (0, 0)$ et $s \in [0; \underline{\delta}_h^<(t)t[$, on a

$$\underline{\Sigma}_t^2(s) \leq \Sigma_t^2(s).$$

Le point (i) signifie que \bar{I}_h et \underline{I}_h sont suffisamment petits : les bords de $\bar{\Sigma}_{t,h}^2(\bar{I}_h)$ s'éloignent suffisamment des bords de $[0; t]$ pour que l'on n'ait $\bar{x}_{i,t}^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h, \gamma}^t$ qu'avec très faible probabilité, ce qui nous permettra de contrôler $\bar{S}_2(\sigma, h)$ dans la démonstration du lemme 3.8. Les points (ii) et (iii) signifient que \bar{I}_h et \underline{I}_h sont suffisamment grands pour que l'on puisse connaître simplement les signes de $\bar{T}_2(\sigma, h)$ et $\underline{T}_2(\sigma, h)$. En effet ils montrent que si $\delta^< = 0$, on a $\Sigma_t^2 \leq \bar{\Sigma}_t^2$ en dehors de \bar{I}_h et $\underline{\Sigma}_t^2 \leq \Sigma_t^2$ en dehors de \underline{I}_h . Cependant on remarque que le cas $\delta^< > 0$ pose problème pour les parties inférieures de $(\bar{I}_h)^c$ et $(\underline{I}_h)^c$ et ce cas sera donc traité à part dans la démonstration du lemme 3.11.

Démonstration. Commençons par montrer le point (i) pour \bar{I}_h . Comme $\bar{\Sigma}_{t,h}^2$ est croissante il suffit de s'intéresser aux bornes de \bar{I}_h . La borne supérieure de \bar{I}_h est $(1 - \bar{\delta}^>(t))t$. Par continuité de $\bar{\Sigma}_t^2$, on a $\bar{\Sigma}_t^2((1 - \bar{\delta}^>(t))t) = t - t^{1/3}$. D'autre part, on a $\bar{\delta}^>(t) = t^{-2/3}/\bar{\sigma}_{2,t}^2 \sim t^{-2/3}/\sigma_2^2$ quand $t \rightarrow \infty$ et $1 - A(1 - x) \sim \sigma_2^2 x$ quand $x \rightarrow 0$, donc $t - \Sigma_t^2((1 - \bar{\delta}^>(t))t) \sim t^{1/3}$. On en déduit que pour t grand (indépendant de h), on a $\Sigma_t^2((1 - \bar{\delta}^>(t))t) \leq t - t^{1/3}/2$ et donc

$$\bar{\Sigma}_{t,h}^2((1 - \bar{\delta}^>(t))t) = h\Sigma_t^2((1 - \bar{\delta}^>(t))t) + (1 - h)\bar{\Sigma}_t^2((1 - \bar{\delta}^>(t))t) \leq t - \frac{t^{1/3}}{2}.$$

Maintenant, distinguons les cas $\sigma_1 > 0$, $(\sigma_1, \delta^<) = (0, 0)$ et $\delta^< > 0$. Si $\sigma_1 > 0$, la borne inférieure de \bar{I}_h est $\delta^<(t)t$. On a $\Sigma_t^2(\delta^<(t)t) \geq t^{1/3}$. Comme $\sigma_1^2 > 0$, $\delta^<(t)$ tend vers 0 et $A(\delta^<(t)) \sim \sigma_1^2 \delta^<(t)$ quand $t \rightarrow \infty$. Donc $\delta^<(t) \sim t^{-2/3}/\sigma_1^2$ et $\bar{\Sigma}_t^2(\delta^<(t)t) = \bar{\sigma}_{1,t}^2 \delta^<(t) \sim t^{-2/3}$. On en conclut que pour t grand (indépendant de h), on a $\bar{\Sigma}_{t,h}^2(\delta^<(t)t) \geq t^{1/3}/2$. Si $(\sigma_1, \delta^<) = (0, 0)$, la borne inférieure de \bar{I}_h est $\delta^<(t)t$. On a toujours $\Sigma_t^2(\delta^<(t)t) \geq t^{1/3}$. D'autre part $\bar{\sigma}_{1,t}^2 = \delta^<(t)M/2$ donc pour t suffisamment grand tel que $\delta^<(t) \leq \eta_1$, par Taylor-Lagrange, on a

$$\bar{\Sigma}_t^2(\delta^<(t)t) = t \frac{M}{2} \delta^<(t) \geq t \bar{B}(\delta^<(t)) \geq t A(\delta^<(t)) \geq t^{1/3}$$

et donc $\bar{\Sigma}_{t,h}^2(\bar{\delta}_h^<(t)t) \geq t^{1/3}$. Si $\delta^< > 0$, la borne inférieure de \bar{I}_h est $\bar{\delta}_h^<(t)t$ et on a directement $\bar{\Sigma}_{t,h}^2(\bar{\delta}_h^<(t)t) \geq t^{1/3}$. On a donc montré (3.21).

Montrons maintenant le point (i) pour \underline{I}_h . La borne supérieure de \underline{I}_h est $(1 - \delta^>(t))t$. Comme $\delta^>(t)$ tend vers 0, on a $1 - A(1 - \delta^>(t)) \sim \sigma_2^2 \delta^>(t)$ quand $t \rightarrow \infty$ et donc $\delta^>(t) \sim t^{-2/3}/\sigma_2^2$. On en déduit que $\Sigma_t^2((1 - \delta^>(t))t) \sim t^{1/3}$ et $t -$

$\underline{\Sigma}_t^2((1 - \delta^>(t))t) = \underline{\sigma}_{2,t}^2 \delta^>(t)t \sim t^{1/3}$. Donc pour t grand (indépendant de h), on a $\underline{\Sigma}_{t,h}^2((1 - \delta^>(t))t) \leq t - t^{1/3}/2$. Si $\sigma_1 > 0$, la borne inférieure de \underline{I}_h est $\delta^<(t)t$. On a $\Sigma_t^2(\delta^<(t)t) \geq t^{1/3}$. Comme précédemment, on a $\delta^<(t) \sim t^{-2/3}/\sigma_1^2$ et $\underline{\Sigma}_t^2 = \underline{\sigma}_{1,t}^2 \delta^<(t) \sim t^{-2/3}$. Donc pour t grand (indépendant de h), on a $\underline{\Sigma}_{t,h}^2(\delta^<(t)t) \geq t^{1/3}/2$. Si $\sigma_1 = 0$, la borne inférieure de \underline{I}_h est $\underline{\delta}_h^<(t)t$ et on a $\underline{\Sigma}_{t,h}^2(\underline{\delta}_h^<(t)t) \geq t^{1/3}$. On a donc montré (3.22).

Montrons le point (ii). Si $\delta^< = 0$, pour $s \in [0; \delta^<(t)t[$, on a $\Sigma_t^2(s) \leq t^{1/3}$, donc d'après le lemme 3.5, on a $\Sigma_t^2(s) \leq \bar{\Sigma}_t^2(s)$. Considérons maintenant $s \in](1 - \bar{\delta}^>(t))t; t]$ pour $\delta^<$ quelconque. Si $\Sigma_t^2(s) \geq t - t^{1/3}$, alors d'après le lemme 3.5, on a $\Sigma_t^2(s) \leq \bar{\Sigma}_t^2(s)$. Si $\Sigma_t^2(s) < t - t^{1/3}$, alors on a également $\Sigma_t^2(s) \leq \bar{\Sigma}_t^2(s)$ car $\bar{\Sigma}_t^2(s) \geq t - t^{1/3}$ pour $s \geq (1 - \bar{\delta}^>(t))t$.

Montrons le point (iii). Si $\sigma_1 > 0$ et $s \in [0; \delta^<(t)t[$, de même, par le lemme 3.5, on a $\Sigma_t^2(s) \leq \Sigma_t^2(s)$. Si $(\sigma_1, \delta^<) = (0, 0)$ et $s \in [0; \underline{\delta}_h^<(t)t[$, alors $\underline{\Sigma}_t^2$ est nulle sur $[0; \underline{b}_t t]$ et Σ_t^2 est croissante et strictement positive sur $]0; t]$. Quand t tend vers l'infini, \underline{b}_t tend vers $\underline{b} > 0$ en décroissant. Alors, pour t grand tel que $\Sigma_t^2(\underline{b}) \geq t^{1/3}$, on a $\delta^<(t) \leq \underline{\delta}_h^<(t) \leq \delta^<(t)$ et on en déduit : si $s \leq \underline{b}$, $\Sigma_t^2(s) = 0 \leq \Sigma_t^2(s)$ et si $s > \underline{b}$, $\Sigma_t^2(s) \leq t^{1/3} \leq \Sigma_t^2(s)$. Enfin, si $s \in](1 - \delta^>(t))t; t]$, on a $\Sigma_t^2(s) \geq t - t^{1/3}$ donc par le lemme 3.5, $\Sigma_t^2(s) \leq \Sigma_t^2(s)$. \square

Nous allons maintenant nous intéresser à la fonction φ_σ^l pour $1 \leq l \leq k$, définie dans la démonstration du théorème 3.7 par

$$\varphi_\sigma^l(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \tilde{m}(t) - u_l)^2}{2\sigma^2}\right),$$

pour $x \in \mathbb{R}$. La fonction φ_σ^l apparaît dans les dérivées partielles de f_σ et donc intervient dans toutes les grandeurs considérées dans les lemmes 3.8, 3.10 et 3.11. On s'intéresse au comportement de φ_σ^l quand σ tend vers 0 et il s'agit en fait d'une approximation de Dirac en $\tilde{m}(t) + u_l$ comme le montre le lemme suivant :

Lemme 3.13. *Soient $1 \leq l \leq k$, W une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \zeta^2)$ et $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et bornée. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathbb{E} \left[\varphi_\sigma^l(W + y) F(W) \right] \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\tilde{m}(t) + u_l - y)^2}{2\zeta^2}\right) F(\tilde{m}(t) + u_l - y).$$

En outre, $\mathbb{E}[\varphi_\sigma^l(W + y) F(W)]$ est bornée par $\|F\|_\infty / \zeta\sqrt{2\pi}$ pour tout $\sigma > 0$.

Ainsi les facteurs $\varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t))$, qui apparaissent dans les grandeurs que l'on veut contrôler, indiquent que $\bar{x}_i^{t,h}(t)$ est proche de $\tilde{m}(t) + u_l$ et donc que c'est une particule extrême.

Démonstration. On a, avec le changement de variables $z = (w + y - \tilde{m}(t) - u_l)/\sigma$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\varphi_\sigma^l(W + y) F(W) \right] &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(w+y-\tilde{m}(t)-u_l)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} F(w) \frac{e^{-w^2/2\zeta^2}}{\zeta\sqrt{2\pi}} dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} F(\sigma z - y + \tilde{m}(t) + u_l) \frac{e^{-(\sigma z - y + \tilde{m}(t) + u_l)^2/2\zeta^2}}{\zeta\sqrt{2\pi}} dz \\ &\xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} F(\tilde{m}(t) + u_l - y) \frac{e^{-(\tilde{m}(t) + u_l - y)^2/2\zeta^2}}{\zeta\sqrt{2\pi}} dz, \end{aligned} \quad (3.23)$$

d'après le théorème de convergence dominée, où la domination est obtenue grâce à la majoration

$$\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} F(\sigma z - y + \tilde{m}(t) + u_l) \frac{e^{-(\sigma z - y + \tilde{m}(t) + u_l)^2/2\varsigma^2}}{\varsigma\sqrt{2\pi}} \leq \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \|F\|_\infty \frac{1}{\varsigma\sqrt{2\pi}}. \quad (3.24)$$

Alors (3.23) est égal à la limite souhaitée et (3.24) fournit la majoration énoncée. \square

Montrons maintenant les trois lemmes énoncés dans la sous-partie 3.5.

Démonstration du lemme 3.8. Par le théorème de Fubini et en conditionnant par $(\tau, (\sigma_u)_{u \in \mathcal{U}})$, on a

$$\mathbb{E} \left[\int_0^1 |\bar{S}_2(\sigma, h)| dh \right] = \int_0^1 \mathbb{E} \left[\tilde{\mathbb{E}} \left[|\bar{S}_2(\sigma, h)| \right] \right] dh.$$

Par définition de $\bar{S}_2(\sigma, h)$ et par inégalité triangulaire, on a, pour $h \in]0; 1[$,

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[|\bar{S}_2(\sigma, h)| \right] \leq \tilde{\mathbb{E}} \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \left| \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right| \mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \left(\frac{|x_i^t(t)|}{\sqrt{h}} + \frac{|\bar{y}_i^t(t)|}{\sqrt{1-h}} \right) \right] \quad (3.25)$$

et on a, d'après (3.12), en majorant f_σ par 1,

$$\left| \frac{\partial f_\sigma}{\partial x_i}(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right| \leq \sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)),$$

donc (3.25) est majoré par $\bar{R}_1(\sigma, h) + \bar{R}_2(\sigma, h)$ avec

$$\begin{aligned} \bar{R}_1(\sigma, h) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right) \mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{|x_i^t(t)|}{\sqrt{h}} \mathbb{1}_{|x_i^t(t)| > 2\tilde{m}(t)} + \frac{|\bar{y}_i^t(t)|}{\sqrt{1-h}} \mathbb{1}_{|\bar{y}_i^t(t)| > 2\tilde{m}(t)} \right) \right], \\ \bar{R}_2(\sigma, h) &:= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right) \mathbb{1}_{\bar{x}_i^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{|x_i^t(t)|}{\sqrt{h}} \mathbb{1}_{|x_i^t(t)| \leq 2\tilde{m}(t)} + \frac{|\bar{y}_i^t(t)|}{\sqrt{1-h}} \mathbb{1}_{|\bar{y}_i^t(t)| \leq 2\tilde{m}(t)} \right) \right], \end{aligned}$$

où $\bar{R}_1(\sigma, h)$ pourra être contrôlé car $|x_i^t(t)| > 2\tilde{m}(t)$ et $|\bar{y}_i^t(t)| > 2\tilde{m}(t)$ n'ont lieu qu'avec probabilité très faible et, pour $\bar{R}_2(\sigma, h)$, nous utiliserons le fait que $x_i^t(t)$ et $\bar{y}_i^t(t)$ sont bornés par $2\tilde{m}(t)$ et que $\bar{x}_i^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t$ n'a lieu qu'avec probabilité faible.

Commençons par contrôler $\bar{R}_1(\sigma, h)$. On majore l'indicatrice de l'événement $\{\bar{x}_i^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{I_h, \gamma}^t\}$ par 1. Ensuite, on traite tout d'abord le terme contenant $|x_i^t(t)|$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \tilde{\mathbb{E}} \left[\left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right) \frac{|x_i^t(t)|}{\sqrt{h}} \mathbb{1}_{|x_i^t(t)| > 2\tilde{m}(t)} \right] \\ &= \frac{1}{2} n^t(t) \sum_{l=1}^k \frac{c_l}{\sqrt{h}} \mathbb{E} \left[|Z| \mathbb{1}_{|Z| > 2\tilde{m}(t)} \mathbb{E} \left[\varphi_\sigma^l(\sqrt{h}Z + \sqrt{1-h}W) \mid Z \right] \right], \quad (3.26) \end{aligned}$$

où Z et W sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, t)$, car $x_i^t(t)$ et $\bar{y}_i^t(t)$ sont indépendants. Par le lemme 3.13, comme Z et W sont indépendants et $\sqrt{1-h}W$ a pour loi $\mathcal{N}(0, (1-h)t)$, on sait que $\mathbb{E}[\varphi_\sigma^l(\sqrt{h}Z + \sqrt{1-h}W) \mid Z] \leq 1/\sqrt{2\pi(1-h)t}$ pour tout $\sigma > 0$, donc (3.26) est majoré par

$$\frac{1}{2}n^t(t) \frac{\sum_{l=1}^k c_l}{\sqrt{2\pi t} \sqrt{1-h}\sqrt{h}} \mathbb{E} \left[|Z| \mathbb{1}_{|Z| > 2\tilde{m}(t)} \right]. \quad (3.27)$$

Le terme contenant $|\bar{y}_i^t(t)|$ est également majoré par (3.27) par symétrie des rôles entre $x_i^t(t)$ et $\bar{y}_i^t(t)$ et donc on a

$$\int_0^1 \mathbb{E} [\bar{R}_1(\sigma, h)] dh \leq e^t \frac{\sum_{l=1}^k c_l}{\sqrt{2\pi t}} \left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-h}\sqrt{h}} dh \right) 2\mathbb{E} [Z \mathbb{1}_{Z > 2\tilde{m}(t)}], \quad (3.28)$$

or on peut calculer explicitement

$$\mathbb{E} [Z \mathbb{1}_{Z > 2\tilde{m}(t)}] = \int_{2\tilde{m}(t)/\sqrt{t}}^\infty \sqrt{tx} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\tilde{m}(t)^2/t},$$

donc, comme $-2\tilde{m}(t)^2/t \sim -4t$ quand t tend vers l'infini, (3.28) tend vers 0 quand t tend vers l'infini. On en conclut

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\bar{R}_1(\sigma, h)] dh = 0. \quad (3.29)$$

car (3.28) ne dépend pas de σ et l'intégrale sur h est finie.

Contrôlons maintenant $\bar{R}_2(\sigma, h)$. En utilisant le contrôle sur $x_i^t(t)$ et $\bar{y}_i^t(t)$ fourni par les indicatrices, on majore $\bar{R}_2(\sigma, h)$ par

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n^t(t)} \sum_{l=1}^k c_l \tilde{\mathbb{E}} \left[\varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h, \gamma}^t} 2\tilde{m}(t) \left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{1-h}} \right) \right] \\ &= \tilde{m}(t) \left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{1-h}} \right) \sum_{i=1}^{n^t(t)} \sum_{l=1}^k c_l \tilde{\mathbb{E}} \left[\varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right] \tilde{\mathbb{P}} \left(\bar{x}_{i,t}^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h, \gamma}^t \right), \end{aligned} \quad (3.30)$$

car l'événement $\{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h, \gamma}^t\}$ est indépendant de $\bar{x}_i^{t,h}(t)$ d'après la sous-partie 3.2.

D'après le lemme 3.12, on a $\bar{I}_h \subset (\bar{\Sigma}_{t,h}^2)^{-1}([Dt^{1/3}; t - Dt^{1/3}])$ pour tout $t \geq t_0$ et tout $h \in [0; 1]$, donc pour t suffisamment grand (indépendant de h) tel que $t \geq 3Dt^{1/3}$, d'après la proposition 3.2, on a la majoration suivante, indépendante de h ,

$$\tilde{\mathbb{P}} \left(\bar{x}_{i,t}^{t,h} \notin \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h, \gamma}^t \right) \leq 8 \sum_{k=\lfloor Dt^{1/3} \rfloor}^\infty \frac{(k+1)^{\frac{1}{2}}}{(k-1)^\gamma} e^{-\frac{(k-1)^{2\gamma}}{2(k+1)}} \leq e^{-\frac{1}{4}(Dt^{1/3})^{2\gamma-1}},$$

où la deuxième inégalité est vraie pour t suffisamment grand. D'autre part, comme $x_i^{t,h}(t)$ a pour loi $\mathcal{N}(0, t)$ sous \tilde{P} , on sait par le lemme 3.13 que

$$\tilde{\mathbb{E}} \left[\varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right] \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{(\tilde{m}(t) + u_l)^2}{2t} \right)$$

et que l'espérance est majorée par $1\sqrt{2\pi t}$. Donc en dominant (3.30) par

$$\tilde{m}(t) \left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{1-h}} \right) n^t(t) \sum_{l=1}^k c_l \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{4}(Dt^{1/3})^{2\gamma-1}}$$

qui est intégrable sous \mathbb{E} puis par rapport à h , on obtient, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned} & \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\bar{R}_2(\sigma, h)] dh \\ & \leq \tilde{m}(t) \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{h}} + \frac{1}{\sqrt{1-h}} \right) dh \right) e^t \sum_{l=1}^k c_l \frac{e^{-(\tilde{m}(t)+u_l)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{4}(Dt^{1/3})^{2\gamma-1}} \\ & \sim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{2t} C e^t \sum_{l=1}^k c_l \frac{e^{-t+\frac{1}{2}\log t - \sqrt{2}u_l}}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{4}(Dt^{1/3})^{2\gamma-1}} = C' t e^{-\frac{1}{4}(Dt^{1/3})^{2\gamma-1}} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

et on déduit de cette limite et de (3.29) que $\lim_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \mathbb{E}[\int_0^1 |\bar{S}_2(\sigma, h)| dh] = 0$.

La démonstration pour $\underline{S}_2(\sigma, h)$ est identique, car \underline{I}_h vérifie également le lemme 3.12 et cela conclut la démonstration du lemme 3.8. \square

Nous allons maintenant montrer le lemme 3.10, concernant le contrôle de $\underline{T}_1(\sigma, h)$ et $\bar{T}_1(\sigma, h)$. L'idée est que la dérivée seconde de f fait apparaître $\varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t))$ et $\varphi_\sigma^l(\bar{x}_j^{t,h}(t))$, qui signifient que $\bar{x}_i^{t,h}(t)$ et $\bar{x}_j^{t,h}(t)$ doivent être des particules extrémales et donc $d_{i,j}^t \in \bar{I}_h$ n'a lieu qu'avec faible probabilité. Nous allons couper la démonstration en deux en montrant tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.14. *Pour t suffisamment grand, on a la majoration*

$$\begin{aligned} & \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\bar{T}_1(\sigma, h)] dh \\ & \leq \int_0^1 \int_{\bar{I}_h} K |\Sigma_t^2(s) - \bar{\Sigma}_t^2(s)| \exp \left(-s + \bar{\Sigma}_{t,h}^2(s) + \alpha \left(\frac{\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)(t - \bar{\Sigma}_{t,h}^2(s))}{t} \right)^\gamma \right) ds dh, \end{aligned}$$

où α est une constante. On a la même majoration pour $\underline{T}_1(\sigma, h)$, en remplaçant $\bar{T}_1(\sigma, h)$, \bar{I}_h , $\bar{\Sigma}_t^2(s)$ et $\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)$ par leurs analogues soulignés.

Démonstration. Nous allons détailler la démonstration pour $\bar{T}_1(\sigma, h)$, celle pour $\underline{T}_1(\sigma, h)$ étant identique (on n'utilisera uniquement le fait que \bar{I}_h vérifie le lemme 3.12). On rappelle que

$$\bar{T}_1(\sigma, h) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left(\Sigma_t^2(d_{i,j}^t) - \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t) \right) \mathbb{1}_{d_{i,j}^t \in \bar{I}_h} \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \in \bar{I}_{h,\gamma}^t} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right].$$

D'après (3.18), en majorant f_σ par 1, on a la majoration

$$\left| \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right| \leq \left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right) \left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_j^{t,h}(t)) \right). \quad (3.31)$$

En utilisant le contrôle fourni par $\tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h, \gamma}^t$ à l'instant $d_{i,j}^t \in \bar{I}_h$ et en notant $A_1 := \bar{\Sigma}_{t,h}^2(d_{i,j}^t)/t$ et $A_2 := 1 - A_1$, on a la majoration

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h, \gamma}^t} \left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \right) \left(\sum_{l=1}^k c_l \varphi_\sigma^l(\bar{x}_j^{t,h}(t)) \right) \right] \\ & \leq \sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'} \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{|\bar{x}_{i,t}^{t,h}(d_{i,j}^t) - A_1 \bar{x}_{i,t}^{t,h}(t)| \leq ((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma} \varphi_\sigma^l(\bar{x}_i^{t,h}(t)) \varphi_\sigma^{l'}(\bar{x}_j^{t,h}(t)) \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Or, sous $\tilde{\mathbb{P}}$, le couple $(\bar{x}_{i,t}^{t,h}, \bar{x}_{j,t}^{t,h})$ a même loi que le couple formé par deux mouvements browniens reparamétrés par $\bar{\Sigma}_{t,h}^2$, coïncidant jusqu'à l'instant $d_{i,j}^t$ et étant indépendants ensuite. Donc $\bar{x}_{i,t}^{t,h}(d_{i,j}^t)$, $\bar{x}_{i,t}^{t,h}(t) - \bar{x}_{i,t}^{t,h}(d_{i,j}^t)$ et $\bar{x}_j^{t,h}(t) - \bar{x}_{i,t}^{t,h}(d_{i,j}^t)$ sont des gaussiennes indépendantes de variances respectives tA_1 , tA_2 et tA_2 . On en déduit que (3.32) est égal à

$$\sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2/2tA_1}}{\sqrt{2\pi tA_1}} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{|y - A_1(y+W_1)| \leq ((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma} \varphi_\sigma^l(y+W_1) \varphi_\sigma^{l'}(y+W_2) \right] dy, \quad (3.33)$$

où W_1 et W_2 sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, tA_2)$. Par indépendance et par le lemme 3.13, on sait que l'espérance dans (3.33) tend vers

$$\mathbb{1}_{|y - A_1(y + \tilde{m}(t) + u_l - y)| \leq ((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma} \frac{e^{-(\tilde{m}(t) + u_l - y)^2/2A_2t}}{\sqrt{2\pi A_2t}} \frac{e^{-(\tilde{m}(t) + u_{l'} - y)^2/2A_2t}}{\sqrt{2\pi A_2t}}$$

quand σ tend vers 0 et est bornée par $1/A_2t$ pour tout $\sigma > 0$. Ainsi par convergence dominée, (3.33) tend vers

$$\sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2/2tA_1}}{\sqrt{2\pi tA_1}} \mathbb{1}_{|y - A_1(\tilde{m}(t) + u_l)| \leq ((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma} \frac{e^{-(\tilde{m}(t) + u_l - y)^2/2A_2t} e^{-(\tilde{m}(t) + u_{l'} - y)^2/2A_2t}}{2\pi A_2t} dy \quad (3.34)$$

quand σ tend vers 0 et est bornée par $\sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'}/A_2t$ pour tout $\sigma > 0$. D'autre part, on remarque que, par le lemme 3.12, on a $A_1, A_2 \in [Dt^{-2/3}; 1 - Dt^{-2/3}]$ pour tout $t \geq t_0$, et donc en particulier ils ne peuvent pas être trop proches de 0. Donc on a la domination

$$|\bar{T}_1(\sigma, h)| \leq \frac{1}{2} n^t(t)^2 2t \sum_{l,l'=1}^k \frac{c_l c_{l'}}{A_2t} \leq \frac{1}{2} n^t(t)^2 2t \sum_{l,l'=1}^k \frac{c_l c_{l'}}{Dt^{1/3}},$$

qui est intégrable sous \mathbb{E} puis par rapport à h et donc, d'après la convergence de (3.33) vers (3.34), on obtient par le théorème convergence dominée

$$\begin{aligned} & \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [|\bar{T}_1(\sigma, h)|] dh \\ & \leq \int_0^1 \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left(\Sigma_t^2(d_{i,j}^t) - \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t) \right) \mathbb{1}_{d_{i,j}^t \in \bar{I}_h} \sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'} I_{l,l'} \right] dh, \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour $1 \leq l, l' \leq k$,

$$I_{l,l'} := \int_{A_1(\tilde{m}(t)+u_l)-((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma}^{A_1(\tilde{m}(t)+u_l)+((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma} \frac{e^{-y^2/2tA_1} e^{-(\tilde{m}(t)+u_l-y)^2/2A_2t} e^{-(\tilde{m}(t)+u_l-y)^2/2A_2t}}{\sqrt{2\pi tA_1} 2\pi A_2 t} dy.$$

Majorons à présent $I_{l,l'}$ pour t grand. Comme $|y - A_1(\tilde{m}(t) + u_l)| \leq ((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma$, on a

$$\tilde{m}(t) + u_l - y \geq A_2(\tilde{m}(t) + u_l) - ((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma \geq A_2(\tilde{m}(t) + u_l - t^\gamma),$$

qui est positif pour t grand (déterministe et indépendant de h et de σ). Donc, en posant $v := \max_{1 \leq l \leq k} u_l$, on a la majoration

$$I_{l,l'} \leq \int_{-\infty}^{A_1(\tilde{m}(t)+u_l)+((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma} \frac{e^{-y^2/2tA_1} e^{-(\tilde{m}(t)+v-y)^2/2A_2t}}{\sqrt{2\pi tA_1} 2\pi A_2 t} dy \quad (3.35)$$

pour t grand. On regroupe alors les deux exponentielles qui sont égales à :

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{y^2}{2tA_1} - \frac{y^2}{tA_2} + \frac{(v + \tilde{m}(t))y}{tA_2} - \frac{(v + \tilde{m}(t))^2}{tA_2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{w^2}{2} + \frac{2(v + \tilde{m}(t))^2}{tA_2} \frac{A_1}{A_1 + 1} - \frac{(v + \tilde{m}(t))^2}{tA_2}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{w^2}{2} - \frac{(v + \tilde{m}(t))^2}{t(A_1 + 1)}\right), \end{aligned}$$

où l'on utilise la relation $A_1 + A_2 = 1$ et on pose

$$w = -\frac{y}{\sqrt{t}} \left(\frac{A_1 + 1}{A_1 A_2}\right)^{1/2} + \frac{2(v + \tilde{m}(t))}{tA_2} \sqrt{t} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1 + 1}\right)^{1/2}. \quad (3.36)$$

Alors (3.35) est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi tA_1}} \frac{1}{2\pi tA_2} \sqrt{t} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1 + 1}\right)^{1/2} e^{-\frac{(v + \tilde{m}(t))^2}{t(A_1 + 1)}} \int_x^\infty e^{-w^2/2} dw, \quad (3.37)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} x &:= -\frac{A_1(u_l + \tilde{m}(t)) + ((A_1 \wedge A_2)t)^\gamma}{\sqrt{t}} \left(\frac{A_1 + 1}{A_1 A_2}\right)^{1/2} + \frac{2(v + \tilde{m}(t))}{tA_2} \sqrt{t} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1 + 1}\right)^{1/2} \\ &= \frac{v + \tilde{m}(t)}{\sqrt{t}} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1 + 1}\right)^{1/2} - \frac{A_1(u_l - v) + (A_1 \wedge A_2)^\gamma t^\gamma}{\sqrt{t}} \left(\frac{A_1 + 1}{A_1 A_2}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On rappelle que $A_1, A_2 \geq Dt^{-2/3}$ pour tout $t \geq t_0$. En utilisant également que $A_1 \wedge A_2 \leq 2A_1 A_2$ et $A_1 \leq 1$, on obtient

$$x \geq \frac{v + \tilde{m}(t)}{\sqrt{t}} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1 + 1}\right)^{1/2} - 2^{\gamma+1/2} (A_1 A_2 t)^{\gamma-1/2} - \sqrt{2} \frac{u_l - v}{Dt^{1/6}}.$$

On en déduit en particulier que le terme dominant de x est celui obtenu à partir du terme contenant $\tilde{m}(t)$, qui est de l'ordre de $(A_1 A_2 t)^{1/2} \geq Dt^{1/6}/2$ et donc pour

t grand (déterministe et indépendant de h), on a $x > 0$. On peut donc utiliser l'estimation gaussienne (2.9) et on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{(v+\tilde{m}(t))^2}{t(A_1+1)}} \int_u^\infty e^{-w^2/2} dw \\
& \leq e^{-\frac{(v+\tilde{m}(t))^2}{t(A_1+1)}} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{v+\tilde{m}(t)}{\sqrt{t}} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1+1}\right)^{1/2} - 2(2A_1 A_2 t)^{\gamma-\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \frac{u_l - v}{Dt^{1/6}}\right)^2\right) \\
& \leq \frac{1+o(1)}{x} \exp\left(-\frac{(v+\tilde{m}(t))^2}{2t} (2-A_1) + \sqrt{2t} \left(\frac{A_1 A_2}{A_1+1}\right)^{1/2} (2(2A_1 A_2 t)^{\gamma-\frac{1}{2}} + 1)\right) \\
& \leq \frac{1+o(1)}{\sqrt{2t}} \left(\frac{A_1+1}{A_1 A_2}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2t^2 - t \log t + 2\sqrt{2}vt}{2t} (2-A_1) + \alpha(A_1 A_2 t)^\gamma\right),
\end{aligned}$$

où le $o(1)$ est déterministe et indépendant de h et α est une constante. Donc (3.37) est majoré par

$$\frac{1+o(1)}{4\pi^{3/2}t^{3/2}} \frac{1}{A_2\sqrt{A_1}} t^{1-\frac{A_1}{2}} e^{-(2-A_1)t+Mt^\gamma+(2-A_1)\sqrt{2}v} \leq \frac{e^{-2t+A_1t+\alpha'(A_1 A_2 t)^\gamma}}{\sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'}},$$

pour t suffisamment grand (déterministe et indépendant de h) avec $\alpha' > 0$. On a utilisé le fait que $t^{1-A_1/2}/(t^{3/2}A_2\sqrt{A_1})$ est majoré par $\sqrt{2}t^{-1/12}$ si $A_1 \geq 1/2$ et par $2t^{-1/6}$ si $A_1 \leq 1/2$. On a donc montré que, pour t grand,

$$\begin{aligned}
& \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\bar{T}_1(\sigma, h)] dh \\
& \leq \int_0^1 \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left| \Sigma_t^2(d_{i,j}^t) - \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t) \right| \mathbb{1}_{d_{i,j}^t \in \bar{I}_h} e^{-2t+\bar{\Sigma}_{t,h}^2(d_{i,j}^t)+\alpha' \left(\frac{\bar{\Sigma}_{t,h}^2(d_{i,j}^t)(t-\bar{\Sigma}_{t,h}^2(d_{i,j}^t))}{t} \right)^\gamma} \right] dh
\end{aligned} \tag{3.38}$$

et, en utilisant le lemme 2.2 de regroupement d'ordre 2, (3.38) est égal à

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^t \frac{K}{2} e^{2t-s} \left| \Sigma_t^2(s) - \bar{\Sigma}_t^2(s) \right| \mathbb{1}_{s \in \bar{I}_h} e^{-2t+\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)+\alpha' \left(\frac{\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)(t-\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s))}{t} \right)^\gamma} ds dh \\
& \leq \int_0^1 \int_{\bar{I}_h} K \left| \Sigma_t^2(s) - \bar{\Sigma}_t^2(s) \right| e^{-s+\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)+\alpha' \left(\frac{\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)(t-\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s))}{t} \right)^\gamma} ds dh,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration du lemme 3.14. \square

Démonstration du lemme 3.10. Il suffit de montrer que les majorations établies dans le lemme 3.14 tendent vers 0 quand t tend vers l'infini. Commençons par $\bar{T}_1(\sigma, h)$. Nous allons découper l'intégrale sur \bar{I}_h en trois morceaux. Fixons $\eta_3 \in]0; \eta_1[$ tel que $\sigma_1^2 + \frac{M}{2}\eta_3 < 1$, où M est la constante définie dans la sous-partie 3.4. Fixons également $\eta_4 \in]0; \eta_2[$ tel que $\sigma_2^2 - \frac{M}{2}\eta_4 > 1$ et $\eta_3 < 1 - \eta_4$. On effectue la disjonction de cas suivante :

- Si $\delta^< = 0$, on a $\eta_3 t, \eta_4 t \in \bar{I}_h = [\delta^<(t)t; (1 - \bar{\delta}^>(t))t]$ pour t suffisamment grand car $\delta^<(t)$ et $\bar{\delta}^>(t)$ tendent vers 0 quand t tend vers l'infini. On a donc, comme \bar{I}_h ne dépend pas de h ,

$$\int_{\bar{I}_h} \int_0^1 K \left| \Sigma_t^2(s) - \bar{\Sigma}_t^2(s) \right| e^{-s + \bar{\Sigma}_{t,h}^2(s) + \alpha \left(\frac{\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)(t - \bar{\Sigma}_{t,h}^2(s))}{t} \right)^\gamma} dh ds = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3,$$

où \bar{P}_1 est l'intégrale pour $s \in [\delta^<(t)t; \eta_3 t]$, \bar{P}_2 est l'intégrale pour $s \in [\eta_3 t; \eta_4 t]$ et \bar{P}_3 est l'intégrale pour $s \in [\eta_4 t; (1 - \bar{\delta}^>(t))t]$.

- Si $\delta^< > 0$, on peut choisir $\eta_3 < \delta^< \wedge \bar{\delta}^<$ et alors on a $\bar{I}_h = [\bar{\delta}_h^<(t)t; (1 - \bar{\delta}^>(t))t] \subset [\eta_3 t; (1 - \bar{\delta}^>(t))t]$ et comme on a toujours $\eta_4 t \in \bar{I}_h$, on en déduit que

$$\int_0^1 \int_{\bar{I}_h} K \left| \Sigma_t^2(s) - \bar{\Sigma}_t^2(s) \right| e^{-s + \bar{\Sigma}_{t,h}^2(s) + \alpha \left(\frac{\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)(t - \bar{\Sigma}_{t,h}^2(s))}{t} \right)^\gamma} ds dh \leq \bar{P}_2 + \bar{P}_3,$$

où \bar{P}_2 et \bar{P}_3 sont définis comme dans le point précédent.

Commençons par montrer que \bar{P}_1 tend vers 0 quand t tend vers l'infini dans le cas où $\delta^< = 0$. On majore $t - \bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)$ par t et $\bar{\Sigma}_{t,h}^2(s)$ par s et on a donc

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &\leq \int_{\delta^<(t)t}^{\eta_3 t} K e^{-s + \alpha s^\gamma} \left| \Sigma_t^2(s) - \bar{\Sigma}_t^2(s) \right| \int_0^1 e^{h \Sigma_t^2(s) + (1-h) \bar{\Sigma}_t^2(s)} dh ds \\ &= \int_{\delta^<(t)t}^{\eta_3 t} K e^{-s + \alpha s^\gamma} \left| e^{\Sigma_t^2(s)} - e^{\bar{\Sigma}_t^2(s)} \right| ds. \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange et comme $\eta_3 < \eta_1$, on a la majoration, pour $s \in [0; \eta_3 t]$,

$$\Sigma_t^2(s) \leq t \bar{B}\left(\frac{s}{t}\right) \leq t \left(\sigma_1^2 \frac{s}{t} + \frac{M}{2} \left(\frac{s}{t}\right)^2 \right) \leq s \left(\sigma_1^2 + \frac{M}{2} \eta_3 \right),$$

donc par définition de $\bar{\Sigma}_t^2$, on a

$$\begin{aligned} \bar{P}_1 &\leq \int_{\delta^<(t)t}^{\eta_3 t} K e^{-s + \alpha s^\gamma} \left(e^{s(\sigma_1^2 + \frac{M}{2} \eta_3)} + e^{s(\sigma_1^2 + \frac{M}{2} \delta^<(t))} \right) ds \\ &\leq \int_{\delta^<(t)t}^{\infty} K e^{\alpha s^\gamma} 2e^{s(-1 + \sigma_1^2 + \frac{M}{2} \eta_3)} ds, \end{aligned} \tag{3.39}$$

car on considère t suffisamment grand pour que $\delta^<(t) < \eta_3$. On sait que $\delta^<(t)t \geq t^{1/3}$ et par définition de η_3 , on a $\beta := 1 - \sigma_1^2 - \frac{M}{2} \eta_3 > 0$ et donc pour t grand, comme $\gamma < 1$, (3.39) est majoré par

$$\int_{\delta^<(t)t}^{\infty} 2K e^{-s\beta/2} ds \leq \frac{4K}{\beta} e^{-t^{1/3}\beta/2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

et donc \bar{P}_1 tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

Montrons maintenant que \overline{P}_2 tend vers 0 quand t tend vers l'infini sans différencier les cas $\delta^< = 0$ et $\delta^< > 0$. En procédant comme pour \overline{P}_1 , on a

$$\overline{P}_2 \leq \int_{\eta_3 t}^{t-\eta_4 t} K e^{-s+\alpha s^\gamma} \left| e^{\Sigma_t^2(s)} - e^{\overline{\Sigma}_t^2(s)} \right| ds.$$

La fonction A est continue à droite croissante et vérifie $\forall x \in]0; 1[, A(x) < x$, donc on a

$$C := \inf_{x \in [\eta_3; 1-\eta_4]} (x - A(x)) > 0.$$

De même, pour t suffisamment grand tel que $\overline{\sigma}_{1,t} < 1$ et $\overline{\sigma}_{2,t} > 1$, on a

$$\overline{C}_t := \inf_{x \in [\eta_3; 1-\eta_4]} (x - \overline{A}_t(x)) > 0$$

et, comme $\overline{\sigma}_{1,t}^2$ croît en t et $\overline{\sigma}_{2,t}^2$ décroît en t , \overline{C}_t croît en t . On fixe donc \overline{C} tel que pour tout t grand, $\overline{C}_t \geq \overline{C}$. Alors on a les minoration $s - \Sigma_t^2(s) \geq Ct$ et $s - \overline{\Sigma}_t^2(s) \geq \overline{C}_t t \geq \overline{C}t$, pour t grand. On en déduit donc la majoration, pour t grand,

$$\overline{P}_2 \leq \int_{\eta_3 t}^{t-\eta_4 t} K e^{\alpha s^\gamma} (e^{-Ct} + e^{-\overline{C}t}) ds \leq \int_{\eta_3 t}^{\infty} 2K e^{-s(C \wedge \overline{C})/2} ds, \quad (3.40)$$

pour t suffisamment grand car $C \wedge \overline{C} > 0$. La partie droite de (3.40) tend vers 0 quand t tend vers l'infini donc \overline{P}_2 aussi.

Enfin, contrôlons \overline{P}_3 . On majore cette fois $t - \overline{\Sigma}_{t,h}^2(s)$ par $t - \min_{h \in [0;1]} \overline{\Sigma}_{t,h}^2(s)$ et $\overline{\Sigma}_{t,h}^2(s)$ par t et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \overline{P}_3 &\leq \int_{t-\eta_4 t}^{(1-\overline{\delta}^> (t))t} K e^{-s+\alpha \left(t - \min_{h \in [0;1]} \overline{\Sigma}_{t,h}^2(s) \right)^\gamma} \left| e^{\Sigma_t^2(s)} - e^{\overline{\Sigma}_t^2(s)} \right| ds \\ &\leq \int_{\overline{\delta}^> (t)t}^{\eta_4 t} K e^{-(t-r)+\alpha \left(t - \min_{h \in [0;1]} \overline{\Sigma}_{t,h}^2(t-r) \right)^\gamma} \left(e^{\Sigma_t^2(t-r)} + e^{\overline{\Sigma}_t^2(t-r)} \right) dr, \end{aligned}$$

avec le changement de variable $r = t - s$. Comme pour \overline{P}_1 , on montre que, pour tout $r \leq \eta_4 t$, on a $\Sigma_t^2(t-r) \leq t - r(\sigma_2 - \frac{M}{2}\eta_4)$ et $\overline{\Sigma}_t^2(t-r) \leq t - r(\sigma_2 - \frac{M}{2}\eta_4)$ pour t suffisamment grand. De même, on obtient que $\overline{\Sigma}_{t,h}^2(t-r) \geq t - r(\sigma_2 + \frac{M}{2}\eta_4)$. On en déduit que

$$\overline{P}_3 \leq \int_{\overline{\delta}^> (t)t}^{\eta_4 t} 2K e^{-(t-r)+\alpha r^\gamma (\sigma_2 + \frac{M}{2}\eta_4)^\gamma} e^{t-r(\sigma_2 - \frac{M}{2}\eta_4)} dr \leq \int_{\overline{\delta}^> (t)t}^{\infty} 2K e^{-r\beta'/2} dr, \quad (3.41)$$

pour t suffisamment grand, car $\beta' := -1 + \sigma_2 - \frac{M}{2}\eta_4 > 0$ et car $\overline{\delta}^> (t)t$ tend vers l'infini quand t tend vers l'infini. En effet, on a $\overline{\delta}^> (t) = t^{-2/3}/\overline{\sigma}_{2,t}^2 \sim t^{-2/3}/\sigma_2^2$. La partie droite de (3.41) tend donc vers 0 quand t tend vers l'infini donc \overline{P}_3 aussi. On en conclut que

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [|\overline{T}_1(\sigma, h)|] dh \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

grâce au lemme 3.14.

Pour $\underline{T}_1(\sigma, h)$, on procède de manière analogue, en utilisant de nouveau le découpage de \underline{I}_h aux instants $\eta_3 t$ et $t - \eta_4 t$. Les morceaux \underline{P}_2 et \underline{P}_3 sont traités de la même

manière (pour \underline{P}_3 , on utilise le fait que $\delta^>(t)t$ tend vers l'infini quand t tend vers l'infini). Pour \underline{P}_1 , il y a un cas en plus. Si $\sigma_1 > 0$, on montre comme précédemment que \underline{P}_1 tend vers 0 quand t tend vers l'infini (la borne inférieure de \underline{I}_h est également $\delta^<(t)t$). Si $\delta^< > 0$, alors de même, en choisissant η_3 suffisamment petit, on n'a pas à tenir compte de \underline{P}_1 . Enfin il reste le cas où $\sigma_1 = 0$ et $\delta^< = 0$. La borne inférieure de \underline{I}_h est $\underline{\delta}_h^<(t)$, que l'on peut minorer par $\delta^<(t)t$ car $\underline{\delta}_h^<(t)$ a une limite strictement positive. On se ramène ainsi au cas $\sigma_1 > 0$ qui est déjà traité. \square

La démonstration du lemme 3.11 repose sur le fait que $\Sigma_t^2 \leq \bar{\Sigma}_t^2$ en dehors de \bar{I}_h et $\underline{\Sigma}_t^2 \leq \Sigma_t^2$ en dehors de \underline{I}_h , comme nous l'avons montré dans le lemme 3.12. On en déduit ainsi le signe de $\underline{T}_2(\sigma, h)$ et $\bar{T}_2(\sigma, h)$. Cependant le lemme 3.12 ne traite pas complètement le cas $\delta^> > 0$: on peut avoir Σ_t^2 strictement au-dessus de $\bar{\Sigma}_t^2$ en dehors de \bar{I}_h si $\bar{b}_t > \delta^>$. Nous allons donc utiliser des contrôles plus précis dans ce cas-ci, en procédant d'une manière analogue à la démonstration du 3.14.

Démonstration du lemme 3.11. Commençons par traiter $\bar{T}_2(\sigma, h)$ dans le cas où $\delta^< = 0$. On rappelle que

$$\bar{T}_2(\sigma, h) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left(\Sigma_t^2(d_{i,j}^t) - \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t) \right) \mathbb{1}_{d_{i,j}^t \notin \bar{I}_h} \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \in \bar{\mathcal{I}}_{I_h, \gamma}^t} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right].$$

On veut montrer que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [\bar{T}_2(\sigma, h)] dh \leq 0. \quad (3.42)$$

Or on sait que les dérivées partielles secondes mixtes de f_σ sont positives d'après (3.18) et qu'on a $\Sigma_t^2 \leq \bar{\Sigma}_t^2$ en dehors de \bar{I}_h , d'après le point (ii) du lemme 3.12. Donc on a $\bar{T}_2(\sigma, h) \leq 0$ ce qui implique (3.42).

On procède de même pour $\underline{T}_2(\sigma, h)$ dans le cas où $\delta^< = 0$. On a aussi $\underline{\Sigma}_t^2 \leq \Sigma_t^2$ en dehors de \underline{I}_h , d'après le point (iii) du lemme 3.12 (en distinguant $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_1 = 0$) et donc $\underline{T}_2(\sigma, h) \geq 0$.

Traisons à présent $\bar{T}_2(\sigma, h)$ dans le cas où $\delta^< > 0$. On a ici $\bar{I}_h = [\bar{\delta}_h^<(t)t; (1 - \bar{\delta}^>(t))t]$ et on décompose donc $\bar{T}_2(\sigma, h)$ en $\bar{Q}_1(\sigma, h) + \bar{Q}_2(\sigma, h)$ en introduisant l'identité

$$\mathbb{1}_{d_{i,j}^t \notin \bar{I}_h} = \mathbb{1}_{d_{i,j}^t < \bar{\delta}_h^<(t)} + \mathbb{1}_{d_{i,j}^t > (1 - \bar{\delta}^>(t))t}.$$

D'après le point (ii) du lemme 3.12, on a $\bar{Q}_2(\sigma, h) \leq 0$. Pour montrer (3.42), il suffit donc de montrer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} [|\bar{Q}_1(\sigma, h)|] dh = 0. \quad (3.43)$$

On fixe $\eta_5 > 0$ tel que pour t grand, $\eta_5 < \delta^< \wedge \bar{b}_t$ (c'est possible car \bar{b}_t converge vers une limite $\bar{b} > 0$ quand t tend vers l'infini). On a alors $\Sigma_t^2 = \bar{\Sigma}_t^2 = 0$ sur $[0; \eta_5]$, d'après le point (iii) du lemme 3.5. D'autre part, on a $\bar{\delta}_h^<(t) \geq \delta^< \wedge \bar{b}_t > \eta_5$, donc on en déduit

$$\bar{Q}_1(\sigma, h) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left(\Sigma_t^2(d_{i,j}^t) - \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t) \right) \mathbb{1}_{d_{i,j}^t \in [\eta_5 t; \bar{\delta}_h^<(t)t]} \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \in \bar{\mathcal{I}}_{I_h, \gamma}^t} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right].$$

En procédant comme dans la démonstration du lemme 3.14, mais en majorant ici l'indicatrice de l'événement $\{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h,\gamma}^t\}$ par 1 (elle n'apporte aucun contrôle sur $\bar{x}_{i,t}^{t,h}(d_{i,j}^t)$ car $d_{i,j}^t \notin \bar{I}_h$), on montre avec le lemme 3.13 que

$$\limsup_{\sigma \rightarrow 0} \left| \tilde{\mathbb{E}} \left[\mathbb{1}_{\bar{x}_{i,t}^{t,h} \in \tilde{\mathcal{T}}_{\bar{I}_h,\gamma}^t} \frac{\partial^2 f_\sigma}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}^{t,h}(t)) \right] \right| \leq \sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'} J_{l,l'},$$

où l'on a posé

$$J_{l,l'} := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-y^2/2tA_1} e^{-(\tilde{m}(t)+u_l-y)^2/2A_2t} e^{-(\tilde{m}(t)+u_{l'}-y)^2/2A_2t}}{\sqrt{2\pi tA_1} 2\pi A_2 t} dy,$$

avec $A_1 := \bar{\Sigma}_{t,h}^2(d_{i,j}^t)/t$ et $A_2 := 1 - A_1$. Comme $d_{i,j}^t < \bar{\delta}_h^<(t)t$, on a $A_1 \leq t^{-2/3}$ et donc $A_2 \geq 1/2$ pour t grand. En procédant de même pour la domination, on obtient

$$\begin{aligned} & \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} \left[\left| \bar{Q}_1(\sigma, h) \right| \right] dh \\ & \leq \int_0^1 \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n^t(t)} \left| \Sigma_t^2(d_{i,j}^t) - \bar{\Sigma}_t^2(d_{i,j}^t) \right| \mathbb{1}_{d_{i,j}^t \in]n_5 t; \bar{\delta}_h^<(t)t[} \sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'} J_{l,l'} \right] dh. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Majorons à présent l'intégrale $J_{l,l'}$. Pour cela on la découpe en deux, en notant $J_{l,l'}^<$ l'intégrale sur $]-\infty; 2\sqrt{A_1}t[$ et $J_{l,l'}^>$ l'intégrale sur $[2\sqrt{A_1}t; \infty[$. Pour $J_{l,l'}^>$, on majore la deuxième exponentielle par 1, on minore A_2 par $1/2$ et on obtient

$$J_{l,l'}^> \leq \int_{2\sqrt{A_1}t}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2tA_1}}{\sqrt{2\pi tA_1}} \frac{1}{\pi t} dy \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{3/2} t} \int_{2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}^{3/2} t} \frac{e^{-2t}}{2\sqrt{t}} \quad (3.45)$$

avec le changement de variable $x = y/\sqrt{A_1 t}$ puis l'estimation gaussienne (2.9). Majorons à présent $J_{l,l'}^<$. On a $y \leq 2\sqrt{A_1}t \leq 2t^{2/3}$ donc pour t grand (déterministe et indépendant de h), on a $\tilde{m}(t) + u_l - y \geq \tilde{m}(t) + v - 2\sqrt{A_1}t \geq 0$ avec $v := \max_{1 \leq l \leq k} u_l$. On en déduit que

$$\begin{aligned} J_{l,l'}^< & \leq \frac{e^{-(\tilde{m}(t)+v-2\sqrt{A_1}t)^2/A_2t}}{2\pi A_2 t} \int_{-\infty}^{2\sqrt{A_1}t} \frac{e^{-y^2/2tA_1}}{\sqrt{2\pi tA_1}} dy \\ & \leq \frac{1+o(1)}{2\pi A_2 t} \exp \left(-\frac{2t}{A_2} + \frac{\log t}{A_2} - \frac{2\sqrt{2}v}{A_2} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt{A_1}t}{A_2} \right) \\ & \leq \frac{1+o(1)}{\pi t} \exp \left(-2t + 2 \log t + 4\sqrt{2}|v| + 8\sqrt{2}t^{2/3} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

en majorant l'intégrale par 1 puis en utilisant l'encadrement $1/2 \leq A_2 \leq 1$. On déduit de (3.45) et (3.46) que pour t grand, on a la majoration $J_{l,l'} \leq Cte^{-2t+8\sqrt{2}t^{2/3}}$, avec $C > 0$ une constante, et donc on obtient, à partir de (3.44) et en utilisant le

lemme 2.2 de regroupement d'ordre 2,

$$\begin{aligned} & \limsup_{\sigma \rightarrow 0} \int_0^1 \mathbb{E} \left[|\overline{Q}_1(\sigma, h)| \right] dh \\ & \leq \int_0^1 \int_{\eta_5 t}^{\overline{\delta}_h^<(t)t} \frac{K}{2} e^{2t-s} \left| \Sigma_t^2(s) - \overline{\Sigma}_t^2(s) \right| \sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'} C t e^{-2t+8\sqrt{2}t^{2/3}} ds dh \\ & \leq \left(\sum_{l,l'=1}^k c_l c_{l'} \right) K C t^2 e^{8\sqrt{2}t^{2/3}} e^{-\eta_5 t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

en majorant les fonctions Σ_t^2 et $\overline{\Sigma}_t^2$ par t et en intégrant par rapport à $s \in [\eta_5 t; \infty[$. On en conclut que (3.42) est vrai dans le cas $\delta^< > 0$.

Pour traiter $\underline{T}_2(\sigma, h)$ dans le cas $\delta^< > 0$, on procède exactement de la même manière en remplaçant η_5 par $\delta^< \wedge \underline{b} > 0$ où \underline{b} est la limite décroissante de \underline{b}_t quand t tend vers l'infini. \square

Références

- [1] E. AIDÉKON, J. BERESTYCKI, E. BRUNET et Z. SHI – « Branching Brownian motion seen from its tip », *Probab. Theor. Rel. Fields* **157** (2013), no. 1-2, p. 405–451.
- [2] L.-P. ARGUIN, A. BOVIER et N. KISTLER – « The genealogy of extremal particles of branching Brownian motion », *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (2011), no. 12, p. 1647–1676.
- [3] — , « Poissonian statistics in the extremal process of branching Brownian motion », *Ann. Appl. Probab.* **22** (2012), no. 4, p. 1693–1711.
- [4] — , « The extremal process of branching Brownian motion », *Probab. Theor. Rel. Fields* **157** (2013), no. 3-4, p. 535–574.
- [5] P. BILLINGSLEY – *Convergence of probability measures, second edition*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, INC., 1999.
- [6] A. BOVIER et L. HARTUNG – « The extremal process of two-speed branching Brownian motion », *Electron. J. Probab.* **19** (2014), no. 18.
- [7] — , « Variable speed branching Brownian motion 1. Extremal processes in the weak correlation regime », (2014), [arXiv:1403.6332v2](https://arxiv.org/abs/1403.6332v2) [math.PR].
- [8] M. BRAMSON – *Convergence of solutions to the Kolmogorov equation to traveling waves*, vol. 44, Mem. Amer. Math. Soc., no. 285, American Mathematical Society, 1983.
- [9] M. D. BRAMSON – « Maximal displacement of branching Brownian motion », *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), no. 5, p. 531–581.

- [10] B. CHAUVIN et A. ROUAULT – « KPP equation and supercritical branching Brownian motion in the subcritical speed area. Application to spatial trees », *Probab. Theor. Rel. Fields* **80** (1988), no. 2, p. 299–314.
- [11] — , « Supercritical branching Brownian motion and K-P-P equation in the critical speed-area », *Math. Nachr.* **149** (1990), no. 1, p. 41–59.
- [12] R. DURRETT – *Brownian motion and martingales in analysis*, The Wadsworth Mathematics Series, Belmont, 1984.
- [13] M. FANG et O. ZEITOUNI – « Branching random walks in time inhomogeneous environments », *Electron. J. Probab.* **17** (2012), p. no. 67, 1–18.
- [14] R. A. FISHER – « The wave of advance of advantageous genes », *Annals of Eugenics* **7** (1937), no. 4, p. 355–369.
- [15] J.-B. GOUÉRÉ – « Le mouvement brownien branchant vu depuis une extrémité », *Séminaire Bourbaki* **2012-2013** (2013).
- [16] N. IKEDA, M. NAGASAWA et S. WATANABE – « Branching markov processes ii », *J. Math. Kyoto Univ.* **8** (1968), no. 3, p. 365–410.
- [17] A. KOLMOGOROV, I. PETROVSKY et N. PISKUNOV – « Etude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique », *Bulletin Université d'Etat À Moscou* **1** (1937), p. 1–25.
- [18] S. P. LALLEY et T. SELLEKE – « A conditional limit theorem for the frontier of a branching brownian motion », *The Annals of Probability* **15** (1987), no. 3, p. 1052–1061.
- [19] P. MAILLARD – « A characterisation of superposable random measures », (2011), [hal-00564630v1](https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00564630v1).
- [20] H. P. MCKEAN – « Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov », *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975), p. 323–331.
- [21] J. NEVEU – « Arbres et processus de Galton-Watson », *Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques* (1986).
- [22] S. I. RESNICK – *Extreme values, regular variation, and point processes*, Applied Probability. A Series of the Applied Probability Trust, vol. 4, Springer-Verlag, 1987.
- [23] M. TALAGRAND – *Mean field models for spin glasses volume I : Basic examples*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 54, Springer Berlin Heidelberg, 2011.