

Marche aléatoire branchante et sélection

Introduction au domaine de recherche

Michel PAIN
sous la direction de Zhan SHI

16 juin 2015

Résumé

La marche aléatoire branchante est un objet probabiliste introduit dans les années 60 et qui possède de nombreuses interactions avec d'autres domaines des probabilités. On s'intéresse à une population dans laquelle on attribue aux individus une caractéristique sous la forme d'un réel : cette caractéristique peut représenter par exemple la position ou la capacité de survie de l'individu. Chaque individu se reproduit indépendamment des autres et ses enfants disposent d'une caractéristique obtenue à partir de celle de son parent en ajoutant un décalage aléatoire.

Nous introduisons tout d'abord le modèle standard et présentons quelques propriétés majeures concernant la position de la particule la plus basse ou la plus haute, dans le cas où la population ne s'éteint pas en temps fini.

Cependant, dans le modèle standard, le nombre d'individus explose et cela ne correspond pas à une réalité biologique. Nous présentons donc ensuite différents modèles où un phénomène de sélection réduit la taille de la population. Certains de ces modèles introduits par des physiciens sont l'objet de conjectures toujours ouvertes.

Table des matières

1	Définition du modèle standard	3
1.1	Le processus de Galton-Watson	3
1.2	La marche aléatoire branchante	4
1.3	Une hypothèse de base	5
2	Propriétés de la marche aléatoire branchante	6
2.1	Lemme de regroupement	6
2.2	Comportement asymptotique de la particule extrême	7
3	Les modèles avec sélection	8
3.1	Sélection par une droite	9
3.2	La N -marche aléatoire branchante	10
3.3	La L -marche aléatoire branchante	12
	Références	13

1 Définition du modèle standard

Le processus de Bienaymé-Galton-Watson est le processus de branchement le plus élémentaire : il décrit l'évolution d'une population où les individus se reproduisent à chaque génération avec même loi et indépendamment des autres. La marche aléatoire branchante est un modèle plus complexe qui fait également intervenir la position de chaque individu : la position d'un individu est obtenue en ajoutant à la position du parent un drift aléatoire. Cela peut par exemple modéliser des plantes, qui pendant l'été dispersent leur pollen donnant naissance à un nombre aléatoire d'enfants disposés aléatoirement autour de leur position et qui l'été suivant disperseront à leur tour du pollen par rapport à leurs positions respectives et ainsi de suite.

1.1 Le processus de Galton-Watson

Dans cette partie, nous allons définir le processus de Galton-Watson et rappeler ses principales propriétés. Il a été introduit par Bienaymé en 1845 mais ses travaux ont été oubliés et c'est l'étude de Galton et Watson effectuée en 1874 qui donna le nom à ce processus, malgré le fait que leur preuve était erronée. Les résultats énoncés ci-dessous sont présentés dans Athreya et Ney [4].

On considère une loi $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{N} appelée la *loi de reproduction* (on a donc $\sum_{k \in \mathbb{N}} p_k = 1$). On modélise une population où chaque individu se reproduit indépendamment des autres et selon la loi p , c'est-à-dire que la probabilité qu'il ait k enfants est p_k . Pour formaliser cela, on considère une famille $(P_{n,i})_{n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes ayant chacune pour loi p : $P_{n,i}$ est le nombre d'enfants du i^{e} individu de la génération n . Alors le *processus de Galton-Watson* de loi de reproduction p est le processus $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par $Z_0 := 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_{n+1} := \sum_{i=1}^{Z_n} P_{n,i},$$

où Z_n est donc le nombre d'individus à la génération n .

La question étudiée par Bienaymé, Galton et Watson est celle de la survie de la population. On définit l'événement de *survie* par $S := \{\forall n \in \mathbb{N}, Z_n > 0\}$ et sur son complémentaire on dit qu'il y a *extinction*. On note $m := \sum_{k \in \mathbb{N}} kp_k$ la moyenne de la loi p et on a la dichotomie suivante :

- si $m \leq 1$ et $p_1 < 1$, alors $\mathbb{P}(S) = 0$, il y a donc extinction p.s. (presque sûrement) ;
- si $m > 1$ ou $p_1 = 1$, alors $\mathbb{P}(S) > 0$.

On parle de cas *sous-critique* pour $m < 1$, *critique* pour $m = 1$ et *sur-critique* pour $m > 1$ (et on exclut généralement le cas $p_1 = 1$ qui est trivial : il n'y a qu'un seul individu à chaque génération).

Dans le cas sur-critique, on s'intéresse au comportement asymptotique de Z_n conditionnellement à la survie. On pose $W_n := Z_n/m^n$. Le processus $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale et, comme elle est positive, on sait qu'elle converge p.s. vers une limite W . Soit P une v.a. de loi p , Kesten et Stigum [16] ont montré la dichotomie suivante, dans le cas où $m > 1$:

- si $\mathbb{E}[P \log P] = \infty$, alors $W = 0$ p.s. ;
- si $\mathbb{E}[P \log P] < \infty$, alors $W > 0$ p.s. sur S et $\mathbb{E}[W] = 1$.

Donc, dans le cas où $\mathbb{E}[P \log P] < \infty$, on a $Z_n \sim Wm^n$ p.s. avec $W > 0$ sur l'événement de survie, c'est-à-dire que la population croît exponentiellement vite.

Le processus de Galton-Watson ne garde aucune information concernant la généalogie entre les individus. Pour cette raison, on définit également l'*arbre de Galton-Watson* de loi de reproduction p qui est l'arbre planaire enraciné aléatoire \mathbb{T} obtenu par le même procédé : la racine a un nombre d'enfants aléatoire tiré selon la loi p , puis chacun de ses enfants se reproduit selon la loi p indépendamment du reste et ainsi de suite. Ainsi Z_n est le nombre de nœuds de hauteur n dans l'arbre \mathbb{T} . L'arbre \mathbb{T} est infini si et seulement si il y a survie de la population.

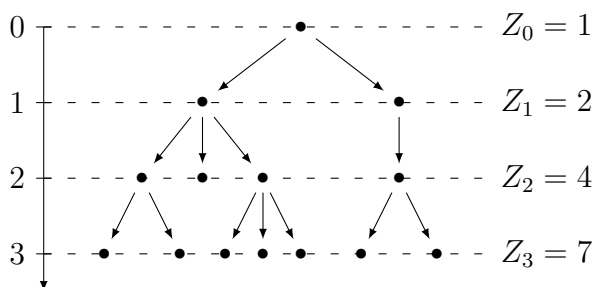


FIGURE 1: Réalisation des 4 premières générations d'un arbre de Galton-Watson

1.2 La marche aléatoire branchante

Dans cette partie, nous définissons la marche aléatoire branchante, qui consiste à attribuer à chaque individu d'un arbre de Galton-Watson une position qui dépend de celle de son parent. On peut faire remonter l'étude de cet objet jusqu'à Ney [18] en 1964.

On considère un processus ponctuel \mathcal{L} sur \mathbb{R} , c'est-à-dire $\mathcal{L} = (X_1, \dots, X_P)$ où P est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et les X_i sont des v.a. réelles. Ce processus décrit la manière dont un individu se reproduit et dispose ses enfants par rapport à sa position. La *marche aléatoire branchante* (abrégée en MAB) est définie par le procédé suivant. On part d'une particule en 0 à la génération 0. La génération 1 est formée par ses enfants dont le nombre et les positions sont tirés selon la loi de \mathcal{L} : il y a P enfants positionnés en X_1, \dots, X_P . Chaque particule de la génération 1 donne ensuite naissance à partir de sa position selon la loi de \mathcal{L} , indépendamment des autres et de ce qui précède. On continue ainsi de suite.

On remarque que la taille de la population suit un processus de Galton-Watson de loi de reproduction la loi de P (avec en outre la possibilité pour P de prendre $+\infty$ comme valeur). On peut donc définir comme précédemment l'arbre aléatoire \mathbb{T} décrivant la généalogie de la MAB (mais ici un nœud de l'arbre peut avoir une infinité de fils). Pour tout individu $x \in \mathbb{T}$, on note $|x|$ sa génération (qui est sa hauteur dans l'arbre) et $V(x)$ sa position. Ainsi $(V(x), |x| = 1)$ a même loi que \mathcal{L} .

On supposera désormais $\mathbb{E}[P] > 1$, c'est-à-dire que l'on suppose que le processus de Galton-Watson sous-jacent est sur-critique. Ainsi la probabilité de survie

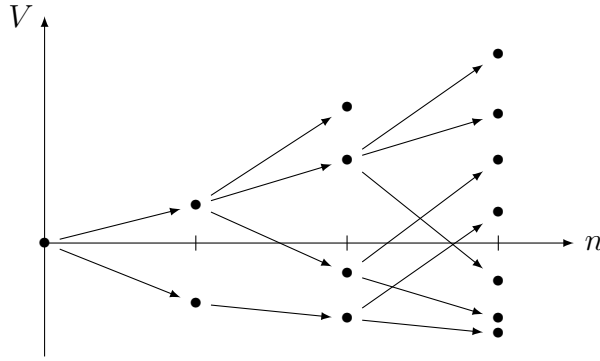


FIGURE 2: Réalisation d'une marche aléatoire branchante sur 4 générations qui a pour arbre généalogique l'arbre représenté en Figure 1

de la population est strictement positive et on peut s'intéresser au comportement asymptotique de la MAB conditionnellement à la survie.

Exemple 1.1. Un exemple assez général pour la loi de \mathcal{L} est le cas où les sauts sont i.i.d. (indépendants et identiquement distribués) et indépendants de P : on considère $\mathcal{L} = (X_1, \dots, X_P)$ avec P une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles i.i.d. indépendante de P . Certains articles restreignent même la définition de la MAB à ce cas seulement, mais la possible dépendance des X_i entre eux et avec P ne pose souvent aucun problème dans les démonstrations.

1.3 Une hypothèse de base

Dans de nombreux articles, on effectue l'hypothèse suivante sur le processus \mathcal{L} :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{|x|=1} e^{-V(x)} \right] = 1 \text{ et } \mathbb{E} \left[\sum_{|x|=1} V(x) e^{-V(x)} \right] = 0. \quad (*)$$

Cette hypothèse permet d'obtenir une certaine universalité dans les résultats sur la MAB et on peut souvent s'y ramener par un changement linéaire : si $(V(x), x \in \mathbb{T})$ est une MAB quelconque, on pose $\bar{V}(x) = aV(x) + b|x|$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ convenablement choisis pour que $(\bar{V}(x), x \in \mathbb{T})$ vérifie (*). Jaffuel (dans la version arXiv de [15]) établit une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tel couple (a, b) , sous certaines conditions d'intégrabilité pour \mathcal{L} .

Sous cette hypothèse, les individus ont une probabilité strictement positive d'être plus bas que leur parent mais ils ont plutôt tendance à monter, comme l'illustrent les exemples suivants :

Exemple 1.2. Dans le cas de sauts i.i.d. (voir exemple 1.1), si la MAB $(V(x), x \in \mathbb{T})$ vérifie l'hypothèse (*), alors on a $\mathbb{E}[X_1] > 0$. Si l'on tire uniformément un individu parmi la génération n , alors la trajectoire de sa lignée est une marche aléatoire avec sauts de même loi que X_1 , donc avec drift strictement positif.

Exemple 1.3. Soit $(V(x), x \in \mathbb{T})$ la MAB avec sauts i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (loi normale standard). Si $m := \mathbb{E}[P] < \infty$, alors le couple $(a, b) := (\pm\sqrt{2 \log m}, 2 \log m)$ convient pour se ramener à l'hypothèse (*). La MAB $(\bar{V}(x), x \in \mathbb{T})$ ainsi obtenue est celle associée au processus ponctuel $\bar{\mathcal{L}} = (\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_P)$ avec $(\bar{X}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. de loi $\mathcal{N}(2 \log m, 2 \log m)$ indépendantes entre elles et de P . Le drift est $2 \log m > 0$.

2 Propriétés de la marche aléatoire branchante

Nous présentons dans la partie 2.1 un outil fondamental pour l'étude de la marche aléatoire branchante et dans la partie 2.2 les principaux résultats concernant la position de la particule extrême.

2.1 Lemme de regroupement

Considérons une marche aléatoire branchante $(V(x), x \in \mathbb{T})$ vérifiant l'hypothèse (*). Nous allons définir une marche aléatoire centrée $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associée à cette MAB. Pour cela, on pose $S_0 := 0$ et on définit la loi de S_1 par

$$\mathbb{E}[f(S_1)] = \mathbb{E} \left[\sum_{|x|=1} e^{-V(x)} f(V(x)) \right], \quad (2.1)$$

pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. D'après (*), S_1 est bien définie et centrée. On considère alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire de saut de même loi que S_1 .

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de regroupement (*many-to-one* en anglais), qui permet de ramener le calcul de certaines fonctionnelles de la MAB au calcul de fonctionnelles de la marche aléatoire centrée $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Lemme 2.1 (Lemme de regroupement). *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Si g est positive ou si $e^{S_n} g(S_0, \dots, S_n)$ est intégrable, alors*

$$\mathbb{E} \left[\sum_{|x|=n} g(V(x_0), \dots, V(x_n)) \right] = \mathbb{E} \left[e^{S_n} g(S_0, \dots, S_n) \right],$$

où, pour $x \in \mathbb{T}$ tel que $|x| = n$ et $0 \leq i \leq n$, x_i est l'ancêtre de x à la génération i .

Pour démontrer ce lemme, on procède par récurrence, en utilisant (2.1) et la propriété de branchement (c'est-à-dire le fait qu'à un instant fixé, la descendance de chaque individu forme une MAB translatée de la position de cet individu et indépendante des autres).

Ce résultat est fondamental pour l'étude de la MAB. Par exemple, si l'on s'intéresse à un événement de la forme $\{\exists |x| = n : (V(x_0), \dots, V(x_n)) \in A\}$, alors on peut en majorer la probabilité par

$$\mathbb{E} \left[\sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x_0), \dots, V(x_n)) \in A} \right] = \mathbb{E} \left[e^{S_n} \mathbb{1}_{(S_0, \dots, S_n) \in A} \right]$$

et la minorer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz par

$$\mathbb{P} \left(\sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x_0), \dots, V(x_n)) \in A} \geq 1 \right) \geq \frac{\mathbb{E} \left[\left(\sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x_0), \dots, V(x_n)) \in A} \right)^2 \right]}{\mathbb{E} \left[\sum_{|x|=n} \mathbb{1}_{(V(x_0), \dots, V(x_n)) \in A} \right]^2},$$

dont le dénominateur s'estime à l'aide du lemme 2.1 et le numérateur à l'aide d'une version du lemme de regroupement pour les moments d'ordre 2 que nous ne présentons pas ici. On se ramène ainsi à des calculs sur $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on peut utiliser les nombreux résultats concernant les marches aléatoires centrées.

2.2 Comportement asymptotique de la particule extrême

L'étude de la marche aléatoire branchante s'est largement portée sur la position de la particule extrême, c'est-à-dire de la particule la plus basse ou la plus haute de la MAB. Comme nous allons le voir, l'hypothèse (*) garantit des résultats universels pour la particule la plus basse.

Le début de cette étude remonte à Hammersley [13] en 1974, qui s'est intéressé à une loi des grands nombres pour la MAB, suivi ensuite par Kingman [17] et Biggins [8]. Pour une MAB quelconque $(V(x), x \in \mathbb{T})$, ils montrent que s'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[\sum_{|x|=1} e^{-\delta V(x)}] < \infty$, alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que sur l'événement de survie S

$$\frac{1}{n} \min_{|x|=n} V(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \gamma \text{ p.s.}$$

et, par symétrie, s'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[\sum_{|x|=1} e^{\delta V(x)}] < \infty$, alors il existe $\Gamma \in \mathbb{R}$ tel que sur S

$$\frac{1}{n} \max_{|x|=n} V(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Gamma \text{ p.s.},$$

donc sous ces conditions d'intégrabilité, la MAB est asymptotiquement contenue dans le cône formé par les droites de pentes γ et Γ .

Dorénavant, pour étudier plus précisément le comportement de la particule extrême, nous allons supposer que la MAB vérifie l'hypothèse (*). Cette hypothèse garantit l'existence de γ et d'après les résultats de Kingman [17], on a $\gamma = 0$ (c'est-à-dire $\frac{1}{n} \min_{|x|=n} V(x) \rightarrow 0$ p.s.). Mais elle ne fournit aucune information concernant la particule la plus haute. Pour une MAB quelconque, les résultats qui suivent s'appliquent à la particule la plus basse si on peut se ramener à l'hypothèse (*) par un changement linéaire avec $a > 0$ et à la particule la plus haute si $a < 0$.

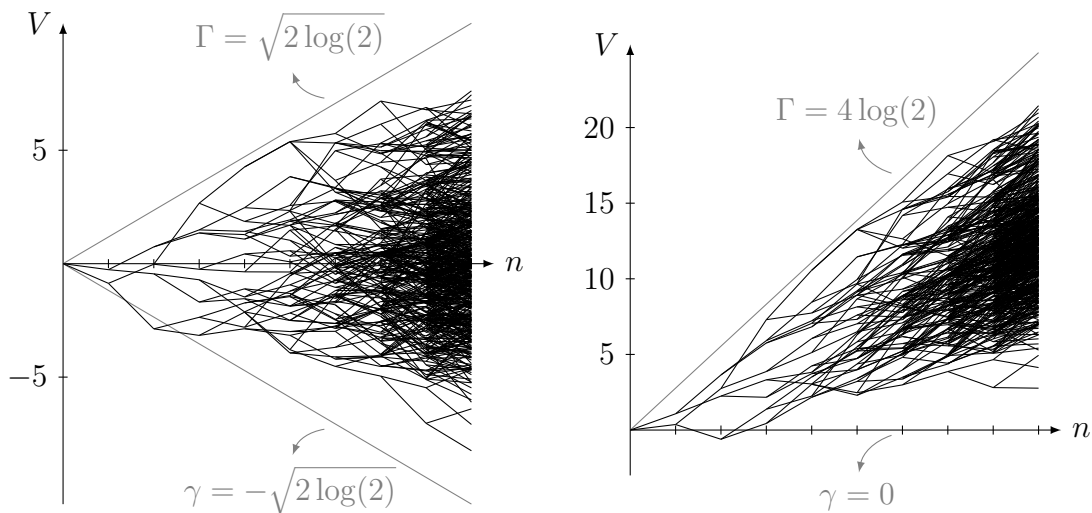


FIGURE 3: Simulation numérique d'une MAB sur 10 générations. À gauche, on a pris $\mathcal{L} = (X_1, X_2)$ avec X_1 et X_2 indépendants de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. À droite, on a représenté la même MAB après la transformation linéaire permettant de se ramener sous l'hypothèse (*): on a donc $\tilde{\mathcal{L}} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ avec \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 indépendants de loi $\mathcal{N}(2 \log 2, 2 \log 2)$ (cf exemple 1.3). Les pentes asymptotiques des particules les plus hautes et les plus basses sont représentées en gris.

L'ordre suivant a été obtenu par Hu et Shi [14] et Aderrio-Berry et Reed [1] (voir aussi Aïdekon et Shi [3] pour une preuve simple) : sous certaines hypothèses d'intégrabilité pour \mathcal{L} , ils montrent la convergence en probabilité, conditionnellement à la survie,

$$\frac{1}{\log n} \min_{|x|=n} V(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{3}{2}.$$

Cependant il n'y a pas convergence p.s. car les fluctuations sont trop grandes : en effet, Hu et Shi [14] montrent également que, conditionnellement à la survie, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \min_{|x|=n} V(x) = \frac{3}{2} \text{ p.s. et } \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \min_{|x|=n} V(x) = \frac{1}{2} \text{ p.s.,}$$

ainsi, même si elle se trouve la plupart du temps au niveau de $\frac{3}{2} \log n$, la particule extrême redescend une infinité de fois jusqu'en $\frac{1}{2} \log n$.

Enfin, Aïdekon [2] a terminé la description du comportement asymptotique de la particule extrême avec le théorème suivant :

Théorème 2.2 (Aïdekon [2], 2013). *Supposons que l'hypothèse (*) soit vérifiée ainsi que certaines conditions d'intégrabilité pour \mathcal{L} . Si la distribution de \mathcal{L} n'est pas contenue dans un réseau (c'est-à-dire qu'il n'existe pas $a, b \in \mathbb{R}$ tel que le support de \mathcal{L} soit inclus dans $a\mathbb{Z} + b$), alors il existe une v.a. réelle Y telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{P} \left(\min_{|x|=n} V(x) - \frac{3}{2} \log n - Y \leq x \mid S \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - e^{-e^x},$$

où S est l'événement de survie de la population.

Ainsi, dans le développement asymptotique de la position de la particule extrême, le terme suivant après le $\frac{3}{2} \log n$ converge en loi vers $Y + Z$ où Z est une v.a. indépendante de Y de fonction de répartition $x \mapsto 1 - e^{-e^x}$ (Z suit l'opposé d'une loi de Gumbel). Y correspond au décalage aléatoire qui a lieu au cours des premiers branchements et Z aux fluctuations autour de la position $\frac{3}{2} \log n + Y$.

3 Les modèles avec sélection

Le modèle précédent pour la marche aléatoire branchante donne lieu à une population qui explose avec le temps : on a vu dans la partie 1.1 que si $\mathbb{E}[P \log P] < \infty$, alors la population de la MAB croît exponentiellement vite sur l'événement de survie. Ceci ne correspond pas à une réalité biologique et, dans cette partie, nous allons voir différents modèles qui introduisent un phénomène de sélection naturelle pour réguler la taille de la population.

On associe la position d'une particule à sa capacité à se reproduire (appelée *valeur sélective* en biologie), en supposant que plus un individu est bas, plus sa valeur sélective est grande (on fait ce choix car on va travailler sous l'hypothèse (*) qui ne permet d'avoir des résultats universels que pour les particules basses). Cela revient à supposer que la valeur sélective d'un individu reste constante au cours de sa vie mais qu'elle subit un drift aléatoire lors de la transmission à ses enfants, dû au brassage génétique qui a lieu pendant la reproduction.

La sélection naturelle a pour effet l’extinction des lignées des particules n’ayant pas une valeur sélective suffisamment élevée, c’est-à-dire des particules trop hautes dans la MAB. Dans les trois parties qui suivent, nous allons voir trois manières différentes de choisir quelles particules meurent sous l’effet de la sélection naturelle.

3.1 Sélection par une droite

Dans cette partie, on suppose que les particules sont tuées quand elles touchent ou passent au-dessus d’une droite Δ d’équation $y = \mu x + \lambda$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$. On considère une MAB $(V(x), x \in \mathbb{T})$ vérifiant l’hypothèse (*) et on note \mathbb{T}_Δ le sous-arbre de \mathbb{T} obtenu en supprimant chaque nœud dont l’un des ancêtres (y compris ce nœud) est au-dessus de Δ . Ainsi la MAB avec sélection par la droite Δ est $(V(x), x \in \mathbb{T}_\Delta)$.

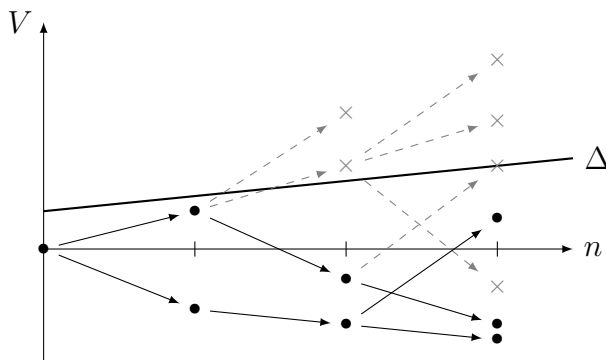


FIGURE 4: Réalisation d’une MAB avec sélection par la droite Δ sur 4 générations. Les individus marqués d’un \bullet sont vivants et appartiennent à \mathbb{T}_Δ , ceux marqués d’un \times sont morts (ils appartiennent à $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_\Delta$).

On s’intéresse à la probabilité de survie de la population notée $\rho(\mu, \lambda)$. Si $\mu \leq 0$, alors on a extinction p.s. pour la MAB avec sélection, car on a vu dans la partie 2.2 que $\min_{|x|=n, x \in \mathbb{T}} V(x)$ tend vers l’infini p.s. quand n tend vers l’infini (sur l’événement de survie de la MAB sans sélection). Comme $\min_{|x|=n, x \in \mathbb{T}} V(x)$ ne croît qu’en $\log n$, on peut espérer que la probabilité de survie soit strictement positive dans le cas $\mu > 0$. C’est effectivement le cas : Biggins, Lubachevsky, Shwartz et Weiss [9] ont montré en 1991 que $\rho(\mu, \lambda) > 0$ si et seulement si $\mu > 0$.

Cependant, si l’on considère $\mu > 0$ fixé, la population explose de nouveau quand n tend vers l’infini et le phénomène de sélection perd un peu de son sens. On s’intéresse donc au cas *presque critique* où μ tend vers 0 tout en restant strictement positif. Gantert, Hu et Shi [12] ont étudié le comportement asymptotique de la probabilité de survie $\rho(\mu, \lambda)$ quand μ tend vers 0 :

Théorème 3.1 (Gantert, Hu et Shi [12], 2011). *Supposons que l’hypothèse (*) soit vérifiée ainsi que certaines conditions d’intégrabilité pour \mathcal{L} . Pour $\lambda > 0$ fixé, on a l’équivalent suivant*

$$\log \rho(\mu, \lambda) \underset{\mu \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{\pi \sigma}{\sqrt{2\mu}},$$

où $\sigma^2 := \mathbb{E} \left[\sum_{|x|=1, x \in \mathbb{T}} V(x)^2 e^{-V(x)} \right] < \infty$.

Une étude approfondie du cas presque critique a été effectuée par Berestycki, Berestycki et Schweinsberg [7, 6] pour le mouvement brownien branchant, qui est un analogue en temps continu de la MAB. Ils montrent la convergence du nombre d'individus et de leur généalogie après un changement d'échelle adapté. Mais ces questions restent ouvertes dans le cas de la MAB.

3.2 La N -marche aléatoire branchante

Dans cette partie, on suppose que la sélection naturelle a pour effet d'éliminer les individus les moins compétitifs dès que la population dépasse une taille N fixée. On considère une MAB $(V(x), x \in \mathbb{T})$ vérifiant l'hypothèse $(*)$ et on note \mathbb{T}_N le sous-arbre de \mathbb{T} obtenu par le procédé suivant initié à la racine : la génération $n + 1$ de \mathbb{T}_N est formée des N individus les plus bas parmi les enfants de la génération n de \mathbb{T}_N (ou de tous les individus s'il y en a moins que N). Alors $(V(x), x \in \mathbb{T}_N)$ est appelé la N -marche aléatoire branchante. Ce modèle a été introduit par Brunet, Derrida, Mueller et Munier d'abord dans [11] puis plus précisément dans [10], pour approcher le comportement des équations de diffusion avec bruit.

Si $\mathbb{P}(P = 0) > 0$, alors il y a extinction p.s. de la N -MAB : en effet à chaque génération, la population s'éteint avec probabilité au moins $\mathbb{P}(P = 0)^N$ indépendamment de ce qui précède. On supposera donc dans la suite que $\mathbb{P}(P = 0) = 0$ et alors il y a survie p.s. pour la N -MAB.

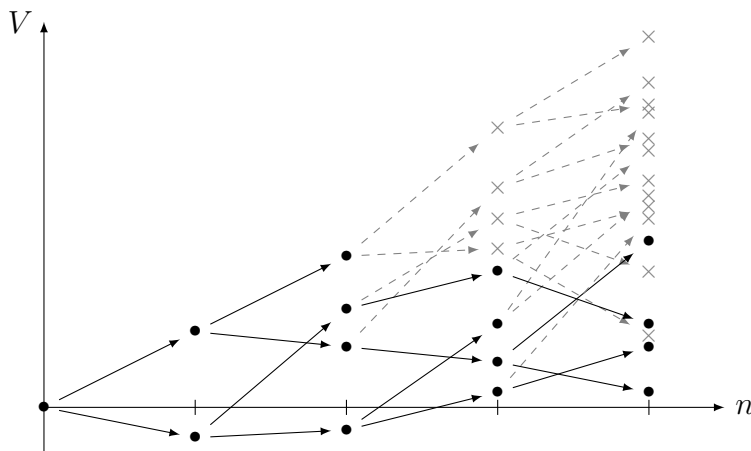


FIGURE 5: Réalisation d'une N -MAB avec $N = 4$ sur 5 générations. Les individus marqués d'un \bullet sont vivants et appartiennent à \mathbb{T}_N , ceux marqués d'un \times sont morts (ils appartiennent à $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_N$).

La N -MAB diffère de la MAB standard et de la MAB avec sélection par une droite à cause du fait suivant : dans la N -MAB, à une génération donnée, les particules présentes n'ont pas des descendance qui se comportent indépendamment les unes des autres. Cette différence rend l'étude de la N -MAB plus difficile que celle des deux modèles précédents.

On s'intéresse au comportement asymptotique de $\min_{|x|=n, x \in \mathbb{T}_N} V(x)$, c'est-à-dire de la position de la particule la plus basse de la N -MAB : on se demande à quel point les individus sélectionnés sont proches des meilleurs individus de la MAB sans

sélection. On obtient assez facilement (voir Bérard et Gouéré [5]) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \min_{|x|=n, x \in \mathbb{T}_N} V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{|x|=n, x \in \mathbb{T}_N} V(x) =: v_N \text{ p.s.,}$$

c'est-à-dire que toutes les particules de la N -MAB se déplacent à une même vitesse v_N , qui est en fait strictement positive. Dans le cas de la MAB sans sélection, on a vu dans la partie 2.2 que $\frac{1}{n} \min_{|x|=n, x \in \mathbb{T}} V(x)$ tend vers 0. La différence de valeur sélective entre les meilleurs individus à la génération n de la N -MAB et ceux de la MAB sans sélection est donc linéaire en n et on peut espérer que quand N tend vers l'infini (donc quand on diminue l'effet de la sélection), cette différence disparaît, c'est-à-dire que v_N tend vers 0.

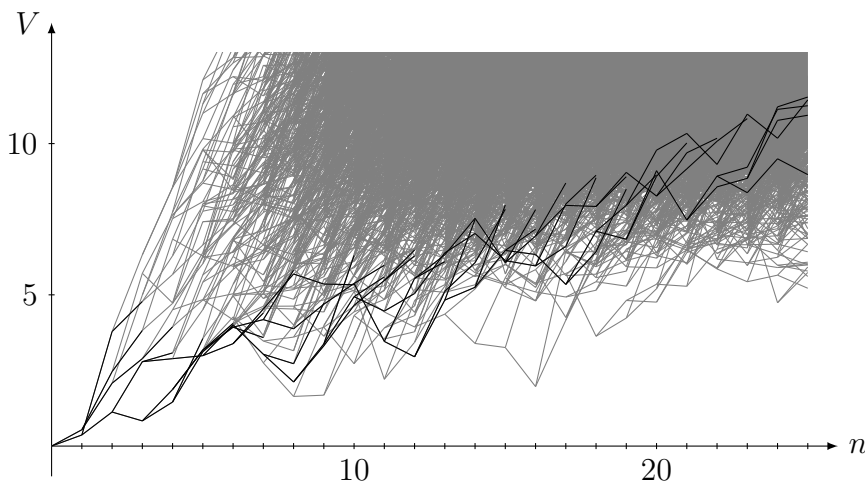


FIGURE 6: Simulation numérique d'une MAB sur 26 générations, représentée en gris. La N -MAB associée avec $N = 5$ est représentée en noir. On a pris $\mathcal{L} = (X_1, X_2)$ avec X_1 et X_2 indépendants de loi $\mathcal{N}(2 \log 2, 2 \log 2)$, qui vérifie l'hypothèse (*). On constate que les individus de la N -MAB ne font rapidement plus partie des meilleurs individus de la MAB sans sélection.

On s'intéresse donc maintenant au comportement de v_N quand N tend vers l'infini. Brunet, Derrida, Mueller et Munier [11] ont conjecturé à l'aide d'arguments heuristiques que, quand N tend vers l'infini,

$$v_N = \frac{\pi^2 \sigma^2}{2(\log N)^2} \left(1 - \frac{6 \log \log N}{\log N} (1 + o(1)) \right), \quad (3.1)$$

où comme précédemment $\sigma^2 := \mathbb{E} \left[\sum_{|x|=1, x \in \mathbb{T}} V(x)^2 e^{-V(x)} \right]$. On peut remarquer que le deuxième terme a un caractère universel car seule la constante mise en facteur dépend du choix de \mathcal{L} (ainsi que du fait de se placer sous l'hypothèse (*)). Le premier terme a été démontré rigoureusement par Bérard et Gouéré [5] dans le cas d'une reproduction binaire :

Théorème 3.2 (Bérard et Gouéré [5], 2010). *Supposons que l'hypothèse (*) soit vérifiée ainsi que certaines conditions d'intégrabilité pour \mathcal{L} . Supposons en outre que $P \equiv 2$. Alors on a l'équivalent suivant*

$$v_N \underset{N \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi^2 \sigma^2}{2(\log N)^2},$$

où $\sigma^2 := \mathbb{E} \left[\sum_{|x|=1, x \in \mathbb{T}} V(x)^2 e^{-V(x)} \right] < \infty$.

La démonstration de Bérard et Gouéré repose en grande partie sur l'estimée de la probabilité de survie de la MAB dans le cas presque critique par Gantert, Hu et Shi [12] (voir le théorème 3.1). Ils considèrent, sans perte de généralité, une N -MAB issue de N particules en 0 à l'instant 0 et leur argument repose sur la remarque suivante : le fait que la N -MAB se déplace à une vitesse plus petite que μ est à peu près équivalent au fait que l'une des N particules initiales donne naissance à une lignée qui reste en-dessous d'une droite de pente μ . Le deuxième événement a lieu avec probabilité $1 - (1 - \rho(\mu, \lambda))^N$. En utilisant le théorème 3.1, on voit que le plus petit μ tel que cette probabilité soit proche de 1 est $\mu \simeq \frac{\pi^2 \sigma^2}{2(\log N)^2}$.

Le deuxième terme de (3.1) est actuellement toujours un problème ouvert pour la N -MAB. D'autres questions concernant la généalogie de la population sont également toujours ouvertes. Brunet, Derrida, Mueller et Munier [10] ont conjecturé que pour deux individus tirés uniformément dans la population de la N -MAB à une génération donnée, le temps qui les sépare de leur plus proche ancêtre est en $(\log N)^3$. On pense également obtenir pour la généalogie de cette population des résultats de convergence similaires à ceux obtenus par Berestycki, Berestycki et Schweinsberg [7] pour le mouvement brownien branchant avec sélection par une droite dans le cas presque critique.

3.3 La L -marche aléatoire branchante

Dans cette partie, on introduit une variante à la N -MAB où, au lieu de limiter la taille de la population, on limite les différences de valeurs sélectives possibles : dès qu'une particule a une valeur sélective à une distance au moins L de la meilleure particule, elle meurt. On considère une MAB $(V(x), x \in \mathbb{T})$ vérifiant l'hypothèse (*) et on note \mathbb{T}_L le sous-arbre de \mathbb{T} obtenu par le procédé suivant initié à la racine : la génération $n + 1$ de \mathbb{T}_L est formée des individus parmi les enfants de la génération n de \mathbb{T}_L qui sont à une distance inférieure ou égale à L du plus bas d'entre eux. Alors $(V(x), x \in \mathbb{T}_L)$ est appelé la *L -marche aléatoire branchante*. Tout comme la N -MAB, ce modèle a été introduit par Brunet, Derrida, Mueller et Munier [11]. On suppose également que $\mathbb{P}(P = 0) = 0$ pour éviter d'avoir p.s. extinction.

Ce modèle n'a pas encore été étudié dans la littérature mathématique, mais on peut se poser les mêmes questions que pour la N -MAB : à quelle vitesse se déplace la population et comment se comporte cette vitesse quand L tend vers l'infini ? On espère avoir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \min_{|x|=n, x \in \mathbb{T}_L} V(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \max_{|x|=n, x \in \mathbb{T}_L} V(x) =: v_L \text{ p.s.},$$

où $v_L > 0$ tend vers 0 quand L tend vers l'infini. Cependant les arguments simples utilisés par Bérard et Gouéré [5] pour obtenir le résultat analogue pour la N -MAB ne fonctionnent plus ici et même ce premier résultat ne semble pas immédiat.

Brunet, Derrida, Mueller et Munier [11] ont conjecturé que la N -MAB et la L -MAB devraient avoir un comportement similaire avec la correspondance $L = \log N + 3 \log \log N$. Concernant le comportement de v_L quand L tend vers l'infini (en supposant que v_L est bien défini), on peut donc effectuer la conjecture suivante :

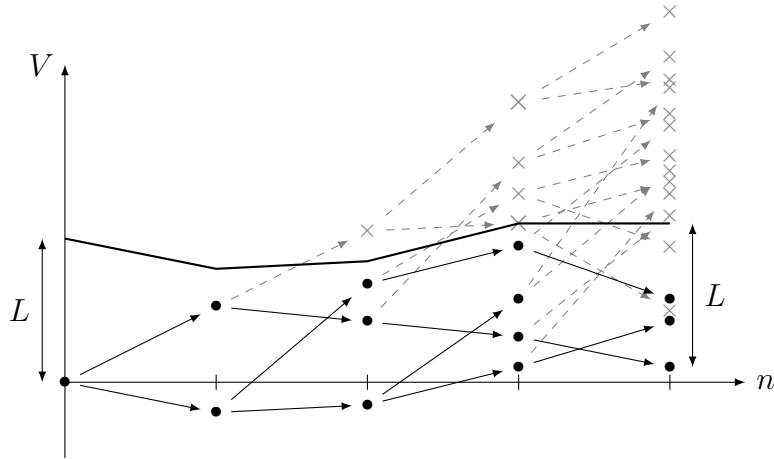


FIGURE 7: Réalisation d'une L -MAB sur 5 générations. Les individus marqués d'un \bullet sont vivants et appartiennent à \mathbb{T}_L , ceux marqués d'un \times sont morts (ils appartiennent à $\mathbb{T} \setminus \mathbb{T}_L$). La barrière tueuse est tracée en gras.

Conjecture 3.3. *Supposons que l'hypothèse (*) soit vérifiée ainsi que certaines conditions d'intégrabilité pour \mathcal{L} . Alors on a l'équivalent suivant*

$$v_L \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\pi^2 \sigma^2}{2L^2},$$

où $\sigma^2 := \mathbb{E} \left[\sum_{|x|=1, x \in \mathbb{T}} V(x)^2 e^{-V(x)} \right] < \infty$.

Une première piste pour la démonstration de ce résultat est de comparer la L -MAB à une MAB avec sélection par une droite : si pendant un certain temps le minimum de la L -MAB reste en-dessous d'une droite Δ , alors, pendant toute cette durée, la L -MAB a moins de particules que la MAB avec sélection par la droite $\Delta + (0, L)$. On se ramène ainsi à des questions sur la MAB avec sélection par une droite dans le cas presque critique, qui est un modèle plus manipulable car on a alors une indépendance entre les descendance des particules d'une même génération.

Références

- [1] L. ADDARIO-BERRY et B. REED – « Minima in branching random walks », *Ann. Probab.* **37** (2009), no. 3, p. 1044–1079.
- [2] E. AIDÉKON – « Convergence in law of the minimum of a branching random walk », *Ann. Probab.* **41** (2013), no. 3A, p. 1362–1426.
- [3] E. AIDÉKON et Z. SHI – « Weak convergence for the minimal position in a branching random walk : A simple proof », *Periodica Mathematica Hungarica* **61** (2010), no. 1-2, p. 43–54.
- [4] K. ATHREYA et P. NEY – *Branching process*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Series, vol. 196, Springer Berlin Heidelberg, 1972.

- [5] J. BÉRARD et J.-B. GOUÉRE – « Brunet-derrida behavior of branching-selection particle systems on the line », *Communications in Mathematical Physics* **298** (2010), no. 2, p. 323–342 (English).
- [6] J. BERESTYCKI, N. BERESTYCKI et J. SCHWEINSBERG – « Survival of near-critical branching brownian motion », *J. Phys. Stat.* **143** (2011), no. 5, p. 833–854.
- [7] — , « The genealogy of branching brownian motion with absorption », *Ann. Probab.* **41** (2013), no. 2, p. 527–618.
- [8] J. D. BIGGINS – « The first- and last-birth problems for a multitype age-dependent branching process », *Advances in Applied Probability* **8** (1976), no. 3, p. 446–459 (English).
- [9] J. D. BIGGINS, B. D. LUBACHEVSKY, A. SHWARTZ et A. WEISS – « A branching random walk with a barrier », *Ann. Appl. Probab.* **1** (1991), no. 4, p. 573–581.
- [10] E. BRUNET, B. DERRIDA, A. H. MUELLER et S. MUNIER – « Noisy traveling waves : Effect of selection on genealogies », *EPL (Europhysics Letters)* **76** (2006), no. 1, p. 1.
- [11] E. BRUNET, B. DERRIDA, A. H. MUELLER et S. MUNIER – « Phenomenological theory giving the full statistics of the position of fluctuating pulled fronts », *Phys. Rev. E* **73** (2006), p. 056126.
- [12] N. GANTERT, Y. HU et Z. SHI – « Asymptotics for the survival probability in a killed branching random walk », *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **47** (2011), no. 1, p. 111–129.
- [13] J. M. HAMMERSLEY – « Postulates for subadditive processes », *Ann. Probab.* **2** (1974), no. 4, p. 652–680.
- [14] Y. HU et Z. SHI – « Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polymers on disordered trees », *Ann. Probab.* **37** (2009), no. 2, p. 742–789.
- [15] B. JAFFUEL – « The critical barrier for the survival of branching random walk with absorption », (2009), [arXiv:0911.2227v1](https://arxiv.org/abs/0911.2227v1) [math.PR].
- [16] H. KESTEN et B. P. STIGUM – « A limit theorem for multidimensional Galton-Watson processes », *Ann. Math. Statist.* **37** (1966), no. 5, p. 1211–1223.
- [17] J. F. C. KINGMAN – « The first birth problem for an age-dependent branching process », *Ann. Probab.* **3** (1975), no. 5, p. 790–801.
- [18] P. E. NEY – « Generalized branching processes I : Existence and uniqueness theorems », *Illinois J. Math.* **8** (1964), no. 2, p. 316–331.