

TD 9 – Marche simple et indépendance



1 – Petites questions

Soit X, Y, Z des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Supposons que X et Y sont indépendantes. Soit $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Montrer que $\mathbb{E}[F(X, Y)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, où $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par $g(y) = \mathbb{E}[F(X, y)]$ pour $y \in \mathbb{R}$.
2. Supposons que X a pour loi $(1/2)e^{-x/2}\mathbb{1}_{x \geq 0} dx$, que Y est uniforme sur $[0, 2\pi]$ et que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi du couple $(\sqrt{X} \cos(Y), \sqrt{X} \sin(Y))$.
3. Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Construire explicitement $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, X et Y telles que $P_X = \mu$, $P_Y = \nu$ et X indépendante de Y .
4. Trouver un exemple où X est indépendante de Y , de Z mais pas de (Y, Z) .

2 – Marche aléatoire simple

Exercice 1. (Nombre de changements de signe) Soit $(S_k)_{0 \leq k \leq 2n+1}$ une marche aléatoire simple de longueur $2n+1$. On dit qu'il y a un *changement de signe* à l'instant $k \geq 1$ si S_{k-1} et S_{k+1} sont de signes différents (alors $S_k = 0$ et k est pair). On note ξ_{2n+1} le nombre de changements de signe qui ont lieu avant l'instant $2n+1$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de ξ_{2n+1} .

1. Montrer que $\mathbb{P}(\xi_{2n+1} = 0) = 2\mathbb{P}(S_{2n+1} = 1)$.
2. On note ξ'_{2n} le nombre de fois que le chemin croise le niveau -1 avant l'instant $2n$. Montrer que ξ_{2n+1} et ξ'_{2n} ont même loi.
3. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\xi_{2n+1} = r) = 2\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2r + 1)$.
4. En déduire que le nombre de changements de signe le plus probable est 0, quelle que soit la longueur de la marche aléatoire considérée.
5. Calculer $\mathbb{E}[\xi_{2n+1}]$ et en donner un équivalent quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2. (Un peu de dualité) Soit $(S_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ une marche aléatoire simple de longueur $2n$. On définit l'instant de la 1^{re} visite au point terminal par $T := \min\{k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket : S_k = S_{2n}\}$. Déterminer la loi de T .

3 – Indépendance

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

On suppose que N est indépendante de $(X_n)_{n \geq 1}$. On pose

$$P := \sum_{i=1}^N X_i \quad \text{et} \quad F := N - P = \sum_{i=1}^N (1 - X_i),$$

avec $P = F = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

1. Déterminer la loi du couple (P, N) .
2. En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.



Exercice 4. Soit $p \geq 1$. On considère sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires $U_1, \dots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, p\}$.

1. Trouver la loi de $M_n := \max_{1 \leq k \leq n} U_k$.
2. Montrer la convergence suivante

$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}.$$

4 – Compléments (hors TD)



Exercice 5. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Si deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sont indépendantes et ont un élément commun A , montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$.
2. Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que si $C \in \mathcal{C}$, alors $\mathbb{P}(C) = 0$ ou $\mathbb{P}(C) = 1$. Montrer que si X est $\mathcal{C}$ -mesurable, alors X est constante presque sûrement.

Indication. On pourra introduire la *fonction de répartition* F de X définie par $F: x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$ et considérer $x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\}$.

3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. On suppose que $f(X)$ et X sont indépendantes. Montrer que $f(X)$ est constante presque sûrement.



Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Montrer que les variables aléatoires

$$\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$

sont aussi des gaussiennes centrées réduites indépendantes.



Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N f(X_i) \right] = \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[f(X_1)],$$

où l'on adopte la convention qu'une somme vide est nulle.



Exercice 8.

1. Mathias a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon ?
2. Mathilde a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité qu'elle ait un garçon ?



Exercice 9. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0, 1]$.

1. Construire, à l'aide des événements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \dots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

$$Y_1(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad \{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \dots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$.



Exercice 10. On note $X_1, \dots, X_{2n} \in \{-1, 1\}$ les sauts d'une marche aléatoire simple $(S_k)_{0 \leq k \leq 2n}$.

1. On définit $X'_1 := X_{2n}$, $X'_k := X_{k-1}$ pour $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$ et $S'_k := \sum_{i=1}^k X'_i$ pour $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$. Montrer que $(S'_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ est une marche aléatoire simple, qui a même point terminal que $(S_k)_{0 \leq k \leq 2n}$.
2. On note T l'instant où la marche $(S_k)_{0 \leq k \leq 2n-1}$ atteint son maximum (si le maximum est atteint en plusieurs instants, T est choisi uniformément parmi ceux-là). Montrer que, pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(T = k, S_{2n} = 0) = \frac{1}{2n} \mathbb{P}(S_{2n} = 0),$$

c'est-à-dire que la loi de T sachant que $S_{2n} = 0$ est la loi uniforme sur $\llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$.



Exercice 11. (*Convolution de mesures finies*) Soit μ, ν des mesures finies sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. La *convolution* de μ et de ν , notée $\mu * \nu$, est la mesure sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ définie par : pour toute fonction mesurable positive F sur $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F d(\mu * \nu) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(x+y) d\nu(y) d\mu(x).$$

1. Montrer que $\mu * \nu$ est bien définie et que c'est une mesure finie, dont on explicitera la masse totale.
2. Soit μ, ν, ρ trois mesures finies sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Montrer les points suivants
 - (a) $\mu * \delta_0 = \mu$;
 - (b) $\mu * \nu = \nu * \mu$;
 - (c) $(\mu * \nu) * \rho = \mu * (\nu * \rho)$.
3. (*Convolution et indépendance*) Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indépendantes.
 - (a) Montrer que la loi de $X + Y$ est $P_X * P_Y$.
 - (b) Supposons que X a une densité p_X et Y a une densité p_Y . Montrer que $X + Y$ a pour densité $p_X * p_Y$ (au sens de la convolution de deux fonctions L^1).



Exercice 12. (Théorèmes limites) Soit $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ une marche aléatoire simple de longueur n .

1. (Théorème local limite) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, quand $n \rightarrow \infty$, on a, uniformément en $a \in \mathbb{Z}$,

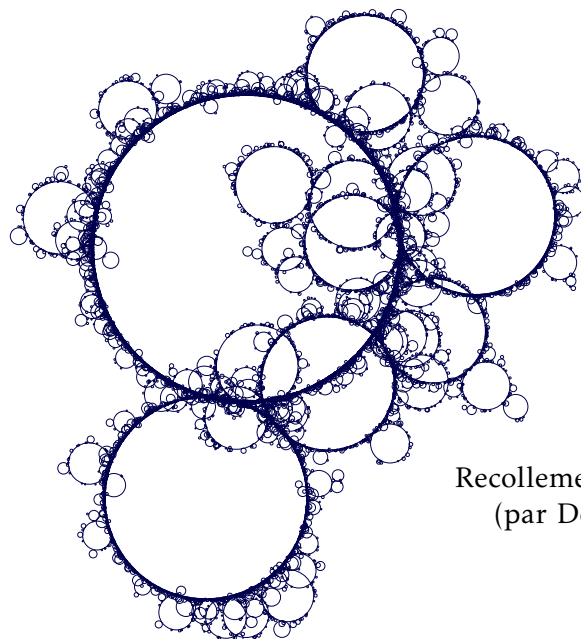
$$\mathbb{P}(S_n = a) = \left(\frac{2e^{-a^2/2n}}{\sqrt{2\pi n}} + O\left(n^{\varepsilon - \frac{3}{2}}\right) \right) 1_{a \in n+2\mathbb{Z}}.$$

Avertissement. C'est assez calculatoire.

2. (Théorème central limite) Soit $x < y$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [x, y]\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_x^y \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'exercice 1, déterminer la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de la probabilité qu'il y ait au moins $x\sqrt{n}$ changements de signes avant l'instant $2n+1$.



Recollement aléatoire de cercles
(par Delphin Sénizergues)