TD 9 – Marche simple et indépendance

1 – Petites questions

Soit X, Y, Z des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Supposons que X et Y sont indépendantes. Soit $F\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Montrer que $\mathbb{E}[F(X,Y)] = \mathbb{E}[g(Y)]$, où $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $g(y) = \mathbb{E}[F(X,y)]$ pour $y \in \mathbb{R}$.
2. Supposons que X a pour loi $(1/2)\mathrm{e}^{-x/2}\mathbb{1}_{x\geq 0}\,\mathrm{d}x$, que Y est uniforme sur $[0,2\pi]$ et que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi du couple $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.
3. Soit μ et ν deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Construire explicitement $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, X et Y telles que $P_X = \mu$, $P_Y = \nu$ et X indépendante de Y.
4. Trouver un exemple où X est indépendante de Y, de Z mais pas de (Y,Z).

Corrigé.

1. On écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(X,Y)] &= \int_{\mathbb{R}\times R} F(x,y)P_{(X,Y)}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y) = \int_{\mathbb{R}\times R} F(x,y)P_X(\mathrm{d}x)\otimes P_Y(\mathrm{d}y)\\ &= \int_{\mathbb{R}} P_Y(\mathrm{d}y)\left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)P_X(\mathrm{d}x)\right) = \int_{\mathbb{R}} P_Y(\mathrm{d}y)g(y) = \mathbb{E}[g(Y)].\end{aligned}$$

2. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[F\Big(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y)\Big)\Big] &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(\sqrt{x}\cos(y), \sqrt{x}\sin(y))\mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(x\cos(y), x\sin(y))\mathrm{e}^{-x^2/2}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

en utilisant le changement de varibale $x \mapsto x^2$. Puis d'après la formule du passage en coordonnées polaires, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} f(x\cos(y), x\sin(y))\mathrm{e}^{-x^2/2}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(u,v)\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)/2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

La loi de $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$ est donc $(2\pi)^{-1}\mathrm{e}^{-(u^2+v^2)/2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$. Les variables $\sqrt{X}\cos(Y)$ et $\sqrt{X}\sin(Y)$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Il suffit de prendre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mu\otimes\nu)$, $X\colon (x,y) \mapsto x$ et $Y\colon (x,y) \mapsto y$.
4. On prend X et Y indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et $Z := \mathbb{1}_{X=Y}$. Alors on a

$$\mathbb{P}(Z=1, X=1) = \mathbb{P}(Y=1, X=1) = \mathbb{P}(Y=1)\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(Z=1)\mathbb{P}(X=1),$$

donc X et Z sont indépendantes (ce sont des indicatrices donc ce calcul suffit !). Mais on a

$$\mathbb{P}((Y,Z) = (1,1), X=1) = \mathbb{P}((Y,Z) = (1,1)) \neq \mathbb{P}((Y,Z) = (1,1))\mathbb{P}(X=1),$$

car $(Y,Z) = (1,1) \Rightarrow X = 1$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

2 – Marche aléatoire simple

Exercice 1. (*Nombre de changements de signe*) Soit $(S_k)_{0\le k\le 2n+1}$ une marche aléatoire simple de longueur $2n+1$. On dit qu'il y a un *changement de signe* à l'instant $k\ge 1$ si S_{k-1} et S_{k+1} sont de signes différents (alors $S_k=0$ et k est pair). On note ξ_{2n+1} le nombre de changements de signe qui ont lieu avant l'instant $2n+1$. L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de ξ_{2n+1}.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\xi_{2n+1}=0)=2\mathbb{P}(S_{2n+1}=1)$.
2. On note ξ'_{2n} le nombre de fois que le chemin croise le niveau -1 avant l'instant $2n$. Montrer que ξ_{2n+1} et ξ'_{2n} ont même loi.
3. Montrer que, pour tout $r\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\xi_{2n+1}=r)=2\mathbb{P}(S_{2n+1}=2r+1)$.
4. En déduire que le nombre de changements de signe le plus probable est 0, quelle que soit la longueur de la marche aléatoire considérée.
5. Calculer $\mathbb{E}[\xi_{2n+1}]$ et en donner un équivalent quand $n\to\infty$.

Corrigé.

1. On a
$$\#\{\xi_{2n+1}=0\}=\#\{S_1\ge 0,\dots,S_{2n+1}\ge 0\}+\#\{S_1\le 0,\dots,S_{2n+1}\le 0\}=2\#\{S_1\ge 0,\dots,S_{2n+1}\ge 0\},$$
par symétrie. Remarquons alors que
$$\begin{aligned}\#\{S_1>0,\dots,S_{2n+2}>0\}&=\#\{\text{chemins partant de }(1,1)\text{ restant supérieur ou égal à 1 sur }[\![1,2n+2]\!]\}\\&=\#\{S_1\ge 0,\dots,S_{2n+1}\ge 0\}.\end{aligned}$$
Ainsi, on obtient
$$\mathbb{P}(\xi_{2n+1}=0)=\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot 2\cdot 2^{2n+2}\mathbb{P}(S_1>0,\dots,S_{2n+2}>0)=2\mathbb{P}(S_1\ne 0,\dots,S_{2n+2}\ne 0)=2\mathbb{P}(S_{2n+2}=0),$$
par le lemme fondamental. Or on a $\mathbb{P}(S_{2n+2}=0)=\frac{1}{2}(\mathbb{P}(S_{2n+1}=-1)+\mathbb{P}(S_{2n+1}=1))=\mathbb{P}(S_{2n+1}=1)$, donc on obtient le résultat souhaité.
2. On remarque tout d'abord que par symétrie du problème on peut se contenter de compter les chemins passant par $(1,1)$: on a, pour tout $r\in\mathbb{N}$,
$$\#\{\xi_{2n+1}=r\}=\#\{\xi_{2n+1}=r,S_1=1\}+\#\{\xi_{2n+1}=r,S_1=-1\}=2\cdot\#\{\xi_{2n+1}=r,S_1=1\}.$$
Les chemins partant de $(1,1)$ et croisant r fois le niveau 0 avant l'instant $2n+1$ correspondent aux chemins partant de $(0,0)$ et croisant r fois le niveau -1 avant l'instant $2n$ (en ramenant le point de départ de $(1,1)$ à $(0,0)$), on a donc
$$\mathbb{P}(\xi_{2n+1}=r)=\frac{2\cdot\#\{\xi_{2n+1}=r,S_1=1\}}{2^{2n+1}}=\frac{\#\{\xi'_{2n}=r\}}{2^{2n}}=\mathbb{P}(\xi'_{2n}=r),$$
et ainsi ξ_{2n+1} et ξ'_{2n} ont même loi.
3. On procède par récurrence, toujours en travaillant avec ξ'_{2n}. Soit $r\ge 1$, on suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(\xi'_{2n}=r-1)=2\mathbb{P}(S_{2n+1}=2r-1).$$
On note $T_{-2}:=\min\{k\in[\![1,2n]\!]:S_k=-2\}$ le premier instant où la marche touche -2, qui correspond aussi à l'instant suivant la 1[re] traversée du niveau -1. Sur l'événement $\{\xi'_{2n}=r\}$, T_{-2} est

bien défini (et pair et inférieur à $2n$) donc on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi'_{2n}=r) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_{-2}=2k, \xi'_{2n}=r) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_1>-2,\dots,S_{2k-1}>-2, S_{2k}=-2, \xi'_{2n}=r) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2n}} \#\{S_1>-2,\dots,S_{2k-1}>-2, S_{2k}=-2\} \\
&\quad \cdot \#\{\text{chemins partant de } (2k,-2) \text{ croisant } r-1 \text{ fois le niveau } -1 \text{ avant l'instant } 2n\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_1>-2,\dots,S_{2k-1}>-2, S_{2k}=-2)\, \mathbb{P}\left(\xi'_{2n-2k}=r-1\right),
\end{aligned}$$

en effectuant une symétrie par rapport à -1 puis un déplacement du point de départ pour calculer le cardinal du 2^e ensemble. En faisant une symétrie par rapport à 0 pour la 1^{re} probabilité et en utilisant l'hypothèse de récurrence pour la 2^e, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi'_{2n}=r) &= \sum_{k=1}^{n} 2\mathbb{P}(S_1<2,\dots,S_{2k-1}<2, S_{2k}=2)\, \mathbb{P}(S_{2n-2k+1}=2r-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2n}} \#\{S_1<2,\dots,S_{2k-1}<2, S_{2k}=2\} \#\{\text{chemins de } (2k,2) \text{ à } (2n+1,2r+1)\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} 2\mathbb{P}(S_1<2,\dots,S_{2k-1}<2, S_{2k}=2, S_{2n+1}=2r+1) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_2=2k, S_{2n+1}=2r+1) \\
&= 2\mathbb{P}(S_{2n+1}=2r+1),
\end{aligned}$$

où T_2 est le premier instant où la marche touche 2, qui est bien défini (et pair et inférieur à 2n) sur l'événement $\{S_{2n+1}=2r+1\}$.

4. Par la question 3., on a que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(\mathbb{P}(\xi_{2n+1}=r))_{r\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
5. On a, en utilisant quelques relations sur les coefficients binomiaux dont $q\binom{p}{q}=p\binom{p-1}{q-1}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\xi_{2n+1}] &= \sum_{r=0}^{n} 2\mathbb{P}(S_{2n+1}=2r+1)r = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n} 2\binom{2n+1}{r+n+1} r \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n} 2\binom{2n+1}{r+n+1}(r+n+1) - \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n} 2\binom{2n+1}{r+n+1}(n+1) \\
&= \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n} 2\binom{2n}{r+n} - \frac{n+1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n} 2\binom{2n+1}{r+n+1} \\
&= \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n}\left(\binom{2n}{r+n}+\binom{2n}{n-r}\right) - \frac{n+1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n}\left(\binom{2n+1}{r+n+1}+\binom{2n+1}{n-r}\right) \\
&= \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\left(\binom{2n}{n}+\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\right) - \frac{n+1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} \\
&= \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} + \frac{2n+1}{2} - (n+1) = \frac{2n+1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pour obtenir l'équivalent, on utilise que $\binom{2n}{n} \sim 2^{2n}/\sqrt{\pi n}$, ce qui donne

$$\mathbb{E}[\xi_{2n+1}] \sim \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Ainsi, le nombre moyen de changements de signe ne coit qu'en $\sqrt{n}$ alors que l'on pourrait intuitivement croire qu'il croît linéairement en n.

Exercice 2. (*Un peu de dualité*) Soit $(S_k)_{0\le k\le 2n}$ une marche aléatoire simple de longueur $2n$. On définit l'instant de la 1re visite au point terminal par $T := \min\{k \in [\![0,2n]\!] : S_k = S_{2n}\}$. Déterminer la loi de T.

Corrigé. On remarque tout d'abord que T est pair. Ensuite, on note $(S_i^*)_{0\le i\le 2n}$ la marche duale à $(S_i)_{0\le i\le 2n}$ (on rappelle que $S_i^* = S_{2n} - S_{2n-i}$). Alors on a, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}\{T = 2k\} &= \{S_0 \neq S_{2n}, \dots, S_{2k-1} \neq S_{2n}, S_{2k} = S_{2n}\} \\ &= \{S_{2n}^* \neq 0, \dots, S_{2n-2k+1}^* \neq 0, S_{2n-2k}^* = 0\} \\ &= \{\text{la dernière visite en 0 pour } (S_i^*)_{0\le i\le 2n} \text{ a lieu à l'instant } 2n-2k\}.\end{aligned}$$

Or $(S_i^*)_{0\le i\le 2n}$ a la loi d'une marche aléatoire simple, donc l'instant de dernière visite en 0 pour $(S_i^*)_{0\le i\le 2n}$ suit une loi de l'arcsinus discrète. On en conclut que $2n - T$ suit une loi de l'arcsinus discrète de longueur $2n$ et donc T aussi par symétrie de la loi de l'arcsinus.

3 – Indépendance

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$

On suppose que N est indépendante de $(X_n)_{n\ge 1}$. On pose

$$P := \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{et} \quad F := N - P = \sum_{i=1}^{N} (1 - X_i),$$

avec $P = F = 0$ sur $\{N = 0\}$. Les variables aléatoires P et F représentent respectivement le nombre de piles et de faces dans un jeu de pile ou face de paramètre p à N lancers.

1. Déterminer la loi du couple (P, N).
2. En déduire les lois de P et F et montrer que P et F sont indépendantes.

Corrigé.

1. On a $\mathbb{P}(P = 0, N = 0) = \mathbb{P}(N = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$, et pour $n \ge 1$ et $0 \le k \le n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P = k, N = n) = \mathbb{P}\left(N = n, \sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \mathbb{P}(N = n)\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}.\end{aligned}$$

2. On a pour $k, l \ge 0$,

$$\mathbb{P}(P = k, F = l) = \mathbb{P}(P = k, N = k + l) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^l}{l!}\right).$$

Donc les variables aléatoires P et F sont indépendantes et de lois respectives les lois de Poisson de paramètres λp et $\lambda(1-p)$.

Remarque. On utilise en fait ici le petit résultat suivant. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs respectivement dans des espaces dénombrables I et J telles que pour tous $i \in I$ et $j \in J$, on ait $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_i q_j$. Alors X et Y sont indépendantes et on a, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(X = i) = p_i/c$ où $c := \sum_{i\in I} p_i$ et, pour tout $j \in J$, $\mathbb{P}(Y = j) = cq_j$.

Montrons ce résultat. Soit $j \in J$, on a

$$\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i\in I} p_i q_j = q_j c.$$

Comme $\sum_{j\in J} \mathbb{P}(Y = j) = 1$, on en déduit que $\sum_{j\in J} q_j = 1/c$ Puis de la même manière, on a, pour $i \in I$

$$\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j\in J} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_i \sum_{j\in J} q_j = p_i/c.$$

Alors, l'hypothèse se réécrit $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$ pour tous $i \in I$ et $j \in J$, ce qui montre l'indépendance entre X et Y (car on est sur un espace dénombrable donc les $P_{(X,Y)}(\{(i,j)\})$ caractérisent $P_{(X,Y)}$).

Exercice 4. Soit $p \geq 1$. On considère sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ indépendantes et de loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, p\}$.

1. Trouver la loi de $M_n := \max_{1\leq k\leq n} U_k$.
2. Montrer la convergence suivante
$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} \xrightarrow[p\to\infty]{} \frac{n}{n+1}.$$

Corrigé.

1. Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, on a,
$$\mathbb{P}(M_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k, \ldots, U_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k)\cdots\mathbb{P}(U_n \leq k) = \mathbb{P}(U_1 \leq k)^n = \left(\frac{k}{p}\right)^n.$$
On en déduit la loi de M_n :
$$\mathbb{P}(M_n = k) = \mathbb{P}(M_n \leq k) - \mathbb{P}(M_n \leq k-1) = \frac{k^n - (k-1)^n}{p^n}.$$
2. On a
$$\mathbb{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(M_n \geq k),$$
et donc
$$\frac{\mathbb{E}[M_n]}{p} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(1 - \left(\frac{k-1}{p}\right)^n\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\left(1 - \left(\frac{k}{p}\right)^n\right).$$
On reconnaît une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto 1 - x^n$, dont l'intégrale entre 0 et 1 vaut $n/(n+1)$. D'où le résultat.

Remarque. On peut montrer qu'il y a en fait convergence des fonctions de répartitions des M_n/p quand $p \to \infty$, vers la fonction de répartition de la variable aléatoire X de loi $nx^{n-1}\mathbb{1}_{x\in[0,1]}\,\mathrm{d}x$:

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n}{p} \leq z\right) = \left(\frac{\lfloor zp \rfloor}{p}\right)^n \xrightarrow[p\to\infty]{} z^n = \mathbb{P}(X \leq z).$$

Il sera vu plus tard dans le cours, que cela signifie que M_n/p converge en loi vers X.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$.

1. Si deux tribus $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ sont indépendantes et ont un élément commun A, montrer que $\mathbb{P}(A)=0$ ou $\mathbb{P}(A)=1$.
2. Soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que si $C\in\mathcal{C}$, alors $\mathbb{P}(C)=0$ ou $\mathbb{P}(C)=1$. Montrer que si X est $\mathcal{C}$-mesurable, alors X est constante presque sûrement.
   Indication. On pourra introduire la *fonction de répartition* F de X définie par $F\colon x\mapsto\mathbb{P}(X\le x)$ et considérer $x_0:=\inf\{x\in\mathbb{R}:F(x)=1\}$.
3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne. On suppose que $f(X)$ et X sont indépendantes. Montrer que $f(X)$ est constante presque sûrement.

Corrigé.

1. On a $\mathbb{P}(A\cap A)=\mathbb{P}(A)^2=\mathbb{P}(A)$. D'où $\mathbb{P}(A)=0$ ou $\mathbb{P}(A)=1$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\{X\le x\}\in\mathcal{C}$ et donc $F(x)=\mathbb{P}(X\le x)=0$ ou 1. Comme $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$ et $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$, on a $x_0:=\inf\{x\in\mathbb{R}:F(x)=1\}\in(-\infty,\infty)$. Comme F est croissante, si $a<x_0<b$, on a $F(a)=0$ et $F(b)=1$. En particulier, $\mathbb{P}(x_0-1/n<X\le x_0+1/n)=1$ pour $n\ge1$. Or :
   $$\{x_0\}=\bigcap_{n\ge1}\left]x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right].$$
   Cette intersection étant décroissante et $\mathbb{P}$ étant finie, on a donc
   $$\mathbb{P}(X=x_0)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\left]x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n}\right]\right)=1.$$
   Ainsi, $X=x_0$ p.s.
3. Posons $Y=f(X)$ et notons $\mathcal{C}=\sigma(Y)$. Par hypothèse, les tribus engendrées par Y et X sont indépendantes. Or si $C\in\mathcal{C}$, alors $C\in\sigma(X)$ car f est mesurable. Ainsi, pour tout $C\in\mathcal{C}$, C est indépendant de lui-même, et donc $\mathbb{P}(C)=0$ ou $\mathbb{P}(C)=1$. Le résultat en découle d'après la deuxième question.

Exercice 6. Soient X et Y deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes. Montrer que les variables aléatoires
$$\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\ \text{et}\ \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$$
sont aussi des gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Corrigé. Soient $F,G\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ deux fonctions boréliennes. En remarquant que $(x,y)\mapsto(\frac{x+y}{\sqrt{2}},\frac{x-y}{\sqrt{2}})$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ de jacobien -1, la formule du changement de variable donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)\right]&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}F\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}F\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)G\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}F(x)G(y)\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}}F(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}}G(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ sont des gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[f(X_1)],$$

où l'on adopte la convention qu'une somme vide est nulle.

Corrigé. On a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} f(X_i)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{N=n\}} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{N=n\}} \sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} f(X_i)\right]$$
$$= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N=n) n\mathbb{E}[f(X_1)] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[f(X_1)],$$

où l'on a utilisé que N est indépendante de $(X_1,\ldots,X_n)$.

Exercice 8.

1. Mathias a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité qu'il ait un garçon ?
2. Mathilde a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité qu'elle ait un garçon ?

Corrigé. Une famille de deux enfants peut se représenter par (a_1, a_2) où a_i est f (fille) ou g (garçon) suivant que le i-ième enfant est une fille ou un garçon. Tous les couples (a_1, a_2) sont équiprobables. Posons donc $\Omega = \{(f,g),(f,f),(g,g),(g,f)\}$ muni de $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme.

1. On sait qu'un enfant est une fille on cherche donc $\mathbb{P}(E|A)$ avec $E = \{(f,g),(g,f),(g,g)\}$ et $A = \{(f,g),(f,f),(g,f)\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(E|A) = 2/3$.
2. On cherche désormais $P(F|B)$ où $F = \{(g,g),(g,f)\}$ et $B = \{(f,f),(g,f)\}$. On trouve alors $\mathbb{P}(F|B) = 1/2$.

Exercice 9. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes uniformes sur $[0,1]$.

1. Construire, à l'aide des évènements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \cdots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

   $$Y_1(\omega) \leq \cdots \leq Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad \{Y_1(\omega), \ldots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)\}$$

   pour presque tout $\omega \in \Omega$.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \ldots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \ldots, Y_{n-1}/Y_n)$.

Corrigé.

1. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On peut définir pour presque tout $\omega \in \Omega$,

   $$Y_i(\omega) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} X_{\sigma_i}(\omega) \mathbb{1}_{\{X_{\sigma_1}(\omega) < \cdots < X_{\sigma_n}(\omega)\}}.$$

   En effet, la mesure de Lebesgue des hyperplans de $\mathbb{R}^n$ où deux coordonnées sont égales est nulle. Ainsi, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont bien définies.

2. Soit $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y_1,\dots,Y_n)] &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\int_{\{0\le x_{\sigma_1}<\dots<x_{\sigma_n}\le 1\}} f(x_{\sigma_1},\dots,x_{\sigma_n})\,\mathrm{d}x_1\cdots dx_n\\ &= n!\int_{\{0\le x_1<\dots<x_n\le 1\}} f(x_1,\dots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\cdots dx_n.\end{aligned}$$

La loi de $(Y_1,\dots,Y_n)$ est donc

$$n!\mathbb{1}_{\{0\le x_1<\dots<x_n\le 1\}}\,\mathrm{d}x_1\cdots dx_n.$$

Soit maintenant $g\colon]0,1[^{n-1}\to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y_1}{Y_2},\dots,\frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right] = n!\int_{\{0<x_1<\dots<x_n<1\}} g\left(\frac{x_1}{x_2},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)\mathrm{d}x_1\cdots dx_n.$$

Et $\phi\colon (x_1,\dots,x_n)\in\{0<x_1<\dots<x_n<1\}\mapsto \left(\frac{x_1}{x_2},\dots,\frac{x_{n-1}}{x_n},x_n\right)\in]0,1[^n$ est un C^1-difféomorphisme de jacobien égal à $(x_2\cdots x_n)^{-1}$. Ainsi, d'après la formule de changements de variables puis le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g\left(\frac{Y_1}{Y_2},\dots,\frac{Y_{n-1}}{Y_n}\right)\right] &= n!\int_{]0,1[^n} g(u_1,\dots,u_{n-1})u_2u_3^2\cdots u_{n-1}^{n-2}u_n^{n-1}\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_n\\ &= (n-1)!\int_{]0,1[^{n-1}} g(u_1,\dots,u_{n-1})u_2u_3^2\cdots u_{n-1}^{n-2}\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}.\end{aligned}$$

Donc la loi de $(Y_1/Y_2,\dots,Y_{n-1}/Y_n)$ est

$$(n-1)!u_2u_3^2\cdots u_{n-1}^{n-2}\mathbb{1}_{]0,1[^{n-1}}(u_1,\dots,u_{n-1})\,\mathrm{d}u_1\cdots\mathrm{d}u_{n-1}.$$

Remarque. Les variables aléatoires $Y_1/Y_2,\dots,Y_{n-1}/Y_n$ sont indépendantes, et chaque Y_i/Y_{i+1} a pour loi $iy^{i-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(y)\,\mathrm{d}y$.

Exercice 10. On note $X_1,\dots,X_{2n}\in\{-1,1\}$ les sauts d'une marche aléatoire simple $(S_k)_{0\le k\le 2n}$.

1. On définit $X_1' := X_{2n}$, $X_k' := X_{k-1}$ pour $k\in[\![2,2n]\!]$ et $S_k' := \sum_{i=1}^k X_i'$ pour $k\in[\![0,2n]\!]$. Montrer que $(S_k')_{0\le k\le 2n}$ est une marche aléatoire simple, qui a même point terminal que $(S_k)_{0\le k\le 2n}$.
2. On note T l'instant où la marche $(S_k)_{0\le k\le 2n-1}$ atteint son maximum (si le maximum est atteint en plusieurs instants, T est choisi uniformément parmi ceux-là). Montrer que, pour $k\in[\![0,2n-1]\!]$,

$$\mathbb{P}(T=k,S_{2n}=0) = \frac{1}{2n}\mathbb{P}(S_{2n}=0),$$

c'est-à-dire que la loi de T sachant que $S_{2n}=0$ est la loi uniforme sur $[\![0,2n-1]\!]$.

Corrigé.

1. On note φ la fonction qui à un chemin s associe le chemin s' obtenu en appliquant le cycle $(1,\dots,2n)$ aux incréments de s (c'est la fonction telle que $S'=\varphi(S)$ est une bijection car on a $\varphi^n = \mathrm{id}$. Donc φ préserve la mesure uniforme sur l'ensemble des chemins de longueur $2n$ partant de 0. Or la loi de $S'=\varphi(S)$ est la mesure image par φ de la loi de S, c'est-à-dire la loi uniforme. Donc S' a même loi que S. Il est clair que $S_n = S_n'$.
2. On considère l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des chemins de longueur $2n$ se terminant en 0. La restriction de φ à $\mathcal{C}_0$ défini une bijection de $\mathcal{C}_0\to\mathcal{C}_0$.

   Soit $s\in\mathcal{C}_0$. Remarquons que $\max_{0\le k\le 2n-1} s_k = \max_{0\le k\le 2n} s_k$ (car $s_n = 0\le s_0$) et on le note dorénavant $\max s$. On note $s' := \varphi(s)$, $I := \{k\in[\![0,2n-1]\!] : s_k = \max s\}$ et I' défini de la même manière pour s'. On note θ la permutation circulaire $(0,\dots,2n-1)$ (c'est-à-dire $\theta(k)=k+1$ sauf $\theta(2n-1)=0$). Montrons que $I'=\theta(I)$.

Cas 1 : $s_{2n-1}=1$. Alors $s_{2n}-s_{2n-1}=-1$ et $\max s'=\max s-1$. En outre, s' atteint son maximum en tout point de $I+1$ et éventuellement en 0 (si et seulement si $\max s=1$). Ainsi, pour $k\in[\![0,2n-2]\!]$, on a $k\in I$ si et seulement si $k+1\in I$. Si $\max s\geq 2$, alors $0\notin I'$ et $2n-1\notin I$: ainsi $I'=\theta(I)$. Si $\max s=1$, alors $0\in I'$ et $2n-1\in I$: ainsi $I'=\theta(I)$. Enfin $\max s=0$ n'est pas possible car $s_{2n-1}=1$.

Cas 2 : $s_{2n-1}=-1$. On procède de même, mais c'est encore plus simple car on ne peut pas avoir $2n-1\in I$ ni $0\in I'$ (car $\max s'=\max s+1\geq 1$).

Comme $I'=\theta(I)$ pour tout $s\in\mathcal{C}_0$, on a

$$\mathbb{P}(T=k,S_{2n}=0)=\mathbb{P}(T'=\theta(k),S'_{2n}=0)=\mathbb{P}(T=\theta(k),S_{2n}=0)$$

car S et S' ont même loi. Ainsi, on obtient

$$\mathbb{P}(T=k,S_{2n}=0)=\frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{2n-1}\mathbb{P}\Big(T=\theta^i(k),S_{2n}=0\Big)=\frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{2n-1}\mathbb{P}(T=j,S_{2n}=0)=\frac{1}{2n}\mathbb{P}(S_{2n}=0),$$

en utilisant que $\{\theta^i(k):i\in[\![0,2n-1]\!]\}=[\![0,2n-1]\!]$.

Exercice 11. (*Convolution de mesures finies*) Soit μ,ν des mesures finies sur $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. La *convolution* de μ et de ν, notée $\mu*\nu$, est la mesure sur $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ définie par : pour toute fonction mesurable positive F sur $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} F\,\mathrm{d}(\mu*\nu):=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}F(x+y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

1. Montrer que $\mu*\nu$ est bien définie et que c'est une mesure finie, dont on explicitera la masse totale.
2. Soit μ,ν,ρ trois mesures finies sur $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Montrer les points suivants
   (a) $\mu*\delta_0=\mu$;
   (b) $\mu*\nu=\nu*\mu$;
   (c) $(\mu*\nu)*\rho=\mu*(\nu*\rho)$.
3. (*Convolution et indépendance*) Soit X et Y des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ indépendantes.
   (a) Montrer que la loi de $X+Y$ est P_X*P_Y.
   (b) Supposons que X a une densité p_X et Y a une densité p_Y. Montrer que $X+Y$ a pour densité p_X*p_Y (au sens de la convolution de deux fonctions L^1).

Corrigé. Je rédigerai un corrigé prochainement, si vous avez un problème sur cet exercice vous pouvez m'envoyer un mail.

Exercice 12. (*Théorèmes limites*) Soit $(S_k)_{0\leq k\leq n}$ une marche aléatoire simple de longueur n.

1. (*Théorème local limite*) Soit $\varepsilon>0$. Montrer que, quand $n\to\infty$, on a, uniformément en $a\in\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}(S_n=a)=\left(\frac{2\mathrm{e}^{-a^2/2n}}{\sqrt{2\pi n}}+O\Big(n^{\varepsilon-\frac{3}{2}}\Big)\right)\mathbb{1}_{a\in n+2\mathbb{Z}}.$$

   Avertissement. C'est assez calculatoire.

2. (*Théorème central limite*) Soit $x < y$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [x,y]\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}z.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'exercice 1, déterminer la limite, quand $n \to \infty$, de la probabilité qu'il y ait au moins $x\sqrt{n}$ changements de signes avant l'instant $2n+1$.

Corrigé.

1. Soit a et n de même parité, on suppose tout d'abord que $|a| \leq n^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ que l'on choisira plus tard, de sorte que $a/n \to 0$, $n-a \to \infty$ et $n+a \to \infty$. On rappelle la version suivante de la formule de Stirling :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

On obtient, uniformément en $a \in n + 2\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = a) &= \frac{1}{2^n}\binom{n}{(n-a)/2} \\
&= \frac{1}{2^n}\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\sqrt{\pi(n-a)}\left(\frac{n-a}{2\mathrm{e}}\right)^{(n-a)/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n-n^\alpha}\right)\right)\sqrt{\pi(n+a)}\left(\frac{n+a}{2\mathrm{e}}\right)^{(n+a)/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n-n^\alpha}\right)\right)} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{n}{n^2-a^2}}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-(n-a)/2}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-(n+a)/2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or, on a, toujours uniformément en $a \in n + 2\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-(n+a)/2} &= \exp\left(-\frac{n+a}{2}\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\right) = \exp\left(-\frac{n+a}{2}\left(\frac{a}{n}-\frac{a^2}{2n^2}+\frac{a^3}{3n^3}+O\left(\frac{a^4}{n^4}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left(a+\frac{a^2}{n}-\frac{a^2}{2n}-\frac{a^3}{2n}+\frac{a^3}{3n^2}+O\left(n^{4\alpha-3}\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4n}+\frac{a^3}{4n}-\frac{a^3}{6n^2}+O\left(n^{4\alpha-3}\right)\right),
\end{aligned}$$

donc, les termes d'ordre impair en a se simplifiant, on obtient

$$\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-(n-a)/2}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{-(n+a)/2} = \exp\left(-\frac{a^2}{2n}+O\left(n^{4\alpha-3}\right)\right) = \mathrm{e}^{-a^2/2n}\left(1+O\left(n^{4\alpha-3}\right)\right).$$

D'autre part, on a

$$\sqrt{\frac{n}{n^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\left(\frac{a}{n}\right)^2\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{n^{2\alpha}}{n^2}\right)\right)$$

et donc en regroupant tout on en arrive à

$$\mathbb{P}(S_n = a) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-a^2/2n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(n^{2\alpha-2}\right)+O\left(n^{4\alpha-3}\right)\right).$$

On choisit alors $\alpha = 1/2 + \varepsilon/4$. On a ainsi, pour tout $|a| \leq n^\alpha$ de même parité que n,

$$\left|\mathbb{P}(S_n = a) - \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-a^2/2n}\right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-a^2/2n}\frac{C}{n^{1-\varepsilon}} \leq \frac{C'}{n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}},$$

avec C et C' des constantes. D'autre part, pour tout $a > n^\alpha$ de même parité que n (le cas $a < -n^\alpha$ en découle par symétrie), on a, en utilisant la décroissance de $a \mapsto \mathbb{P}(S_n = a)$ est décroissant sur les entiers positifs a de même parité que n,

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}(S_n = a) - \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-a^2/2n}\right| &\leq \mathbb{P}(S_n = a) + \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-a^2/2n} \leq \mathbb{P}(S_n = \lfloor n^\alpha \rfloor) + \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-n^{2\alpha}/2n} \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-(\lfloor n^\alpha \rfloor - 1)^2/2n} + \frac{C'}{n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}} + \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-n^{\varepsilon/2}/2},\end{aligned}$$

en appliquant le résultat précédent à $a = \lfloor n^\alpha \rfloor$ ou $a = \lfloor n^\alpha \rfloor - 1$ selon la parité de n. Comme $\mathrm{e}^{-(\lfloor n^\alpha \rfloor - 1)^2/2n}$ et $\mathrm{e}^{-n^{\varepsilon/2}/2}$ décroissent plus vite que tout polynôme en n, on en conclut que, pour tout $a > n^\alpha$ de même parité que n,

$$\left|\mathbb{P}(S_n = a) - \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\mathrm{e}^{-a^2/2n}\right| \leq \frac{C''}{n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}},$$

avec C'' une constante. Cela montre le théorème local limite.

2. On note I l'ensemble des entiers appartenant à $[x\sqrt{n}, y\sqrt{n}]$ et de même parité que n. On a

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in [x, y]\right) = \sum_{a \in I} \mathbb{P}(S_n = a) = O\left(\frac{\#I}{n^{\frac{3}{2}-\varepsilon}}\right) + \sum_{a \in I} \frac{2\mathrm{e}^{-a^2/2n}}{\sqrt{2\pi n}},$$

en utilisant la question précédente avec uniformité en a. On choisit $\varepsilon < 1$ de sorte que $\#I/n^{\frac{3}{2}-\varepsilon} \to 0$ car $\#I \sim (y-x)\sqrt{n}/2$. Enfin, en notant $f : z \mapsto \mathrm{e}^{-z^2/2}/\sqrt{2\pi}$, on remarque que la dernière somme sur $a \in I$ est une somme de Riemann pour f sur $[x, y]$ avec pour pas de subdivision $2/\sqrt{n}$ (seuls les deux segments extrémaux sont de longueur différente mais leur contribution est négligeable) : ainsi on obtient

$$\sum_{a \in I} \frac{2\mathrm{e}^{-a^2/2n}}{\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_x^y f(z)\,\mathrm{d}z$$

Cela montre le théorème central limite

Remarque. Pour une marche aléatoire quelconque, avec des sauts de variance finie, le théorème central limite sera démontré dans le cours, d'une manière moins douloureuse qu'ici. Cependant, le théorème local limite dans ce cadre de généralité est lui plus difficile à démontrer et ne sera pas vu dans le cadre de ce cours (en outre, on ne peut pas avoir un terme correctif aussi précis).

3. Montrons tout d'abord que le théorème central limite peut aussi s'écrire

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}z.$$

Par symétrie, on a

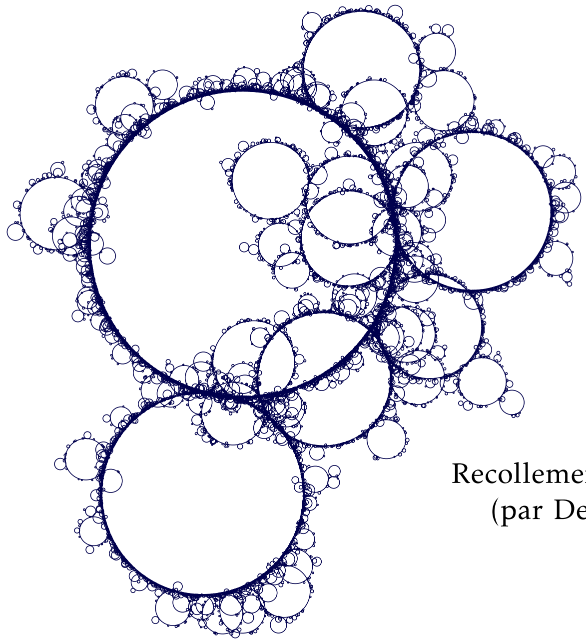
$$\begin{aligned}\left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq x\right) - \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}z\right| &= \frac{1}{2}\left|\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq x\right) - \int_{]-\infty,x]\cup[x,\infty[} \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}z\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left(1 - \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{\sqrt{n}} \geq x\right)\right) - \left(1 - \int_{]-\infty,x]\cup[x,\infty[} \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}z\right)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \in]-x, x[\right) - \int_{-x}^x \frac{\mathrm{e}^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}z\right| \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

par la question précédente, car on a $\mathbb{P}(S_n = x\sqrt{n}) = \mathbb{P}(S_n = -x\sqrt{n}) \to 0$ (par le théorème local limite par exemple, ou par le théorème central limite appliqué à $x = y$).

On note ξ_{2n+1} le nombre de changements de signe qui ont lieu avant l'instant $2n+1$ et on rappelle que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\xi_{2n+1} = r) = 2\mathbb{P}(S_{2n+1} = 2r+1)$ (cf exercice 1). Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\xi_{2n+1} \geq x\sqrt{n}\right) = 2\mathbb{P}\left(S_{2n+1} \geq 2x\sqrt{n}+1\right) = 2\mathbb{P}\left(\frac{S_{2n+1}}{\sqrt{2n+1}} \geq \frac{2x\sqrt{n}+1}{\sqrt{2n+1}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\int_x^\infty \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dz,$$

en utilisant la nouvelle version du théorème central limite montrée juste avant.



Recollement aléatoire de cercles
(par Delphin Sénizergues)