TD 8 – Lois de variables aléatoires et marche simple

1 – Lois de variables aléatoires

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour $\lambda, \mu > 0$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi

$$\lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y)\, dx\, dy.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

Exercice 2. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. (c'est-à-dire $\mathbb{P}$-presque partout). Montrer que X et Y ont la même loi. Que dire de la réciproque ?
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

2 – Marche aléatoire simple

Exercice 3. (*Un jeu un peu long*)

1. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X \geq i).$$

2. Fermat et Pascal jouent à croix ou pile. Étant bons amis, ils décident de jouer jusqu'à ce que chacun ait retrouvé sa fortune initiale. Combien de fois en moyenne vont-ils lancer la pièce ?

Exercice 4. (*Théorème du scrutin*)

1. Soit $n, a \in \mathbb{N}^*$ et $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ une marche aléatoire simple symétrique de longueur n. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = a) = \frac{a}{n} \mathbb{P}(S_n = a).$$

2. Lors de l'élection du COF, la ProbabiListe gagne face à la DétermiListe avec 300 voix contre 200. On suppose que le dépouillement a été fait par une seule personne, qui note le score après chaque bulletin de vote ouvert. Avec quelle probabilité la ProbabiListe a-t-elle été en tête tout au long du dépouillement ?

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3 – Probabilités discrètes

Exercice 5. On répartit au hasard r boules dans n cases. Soit $r_1, \dots, r_n$ des entiers tels que $r_1 + \cdots + r_n = r$.

1. Expliciter les espaces de probabilités décrivant cette expérience et calculer la probabilité d'obtenir r_1 boules dans la case $1, \dots, r_n$ boules dans la case n, pour chacun des modèles suivants :
   (a) On suppose que toutes les configurations de boules sont possibles et équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Maxwell-Boltzmann*.
   (b) On suppose que toutes les configurations possibles pour les nombres de boules dans chaque case sont équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Bose-Einstein*.
   (c) On suppose qu'il ne peut y avoir plus d'une boule dans chaque case et que toutes les configurations de boules autorisées sont équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Fermi-Dirac*.

   Ces trois modèles sont utilisés en physique statistique (avec des particules à la place des boules), la pertinence d'un modèle est liée au type de particules étudiées et aux résultats expérimentaux.
2. Quelle est la probabilité que parmi r personnes, au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?
3. Supposons que dans une grande ville, il arrive r accidents durant une semaine. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un accident chaque jour de la semaine ?
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Combien de dérivées partielles d'ordre r différentes admet-t-elle ?
5. Un livre contient n symboles et il y a r coquilles. Quel modèle choisiriez–vous pour la loi des coquilles ?

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. (*Tribu engendrée par une variable aléatoire*) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

1. Montrer que $\sigma(X)$ est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ sur Ω telle que X soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La tribu $\sigma(X)$ est appelée la *tribu engendrée par la variable aléatoire* X.
2. Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui soit $\sigma(X)$-mesurable, i.e. Y est une application mesurable de $(\Omega, \sigma(X))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $Y = f(X)$.
3. Expliciter $\sigma(X)$ et la loi de X dans les cas suivants (λ est la mesure de Lebesgue) :
   (a) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et $X(\omega) := 2\omega \mathbb{1}_{[0,1/2]}(\omega) + \mathbb{1}_{]1/2,1]}(\omega)$ pour $\omega \in [0,1]$.
   (b) $X := a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_B$, où $A, B \in \mathcal{F}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$.
   (c) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := ([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \lambda/2)$ et $X(\omega) := \omega^2$ pour $\omega \in [0,1]$.

Exercice 7. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1, 0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

Exercice 8. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Exercice 9. On considère un jeu de 52 cartes bien mélangé, posé face caché sur une table. On retourne une à une les cartes jusqu'à trouver un as. Combien de cartes aura-t-on vu en moyenne ?

Exercice 10. (*Réflexions multiples*) Soit $(S_k)_{0\le k\le n}$ une marche aléatoire simple symétrique d'horizon $n \ge 1$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on note $\tau_x := \min\{k \in [\![0,n]\!] : S_k = x\}$, où par convention $\min \varnothing = \infty$.

1. Soit $b \ge 1$ et $c > -b$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = c, S_0 > -b, \dots, S_n > -b)$.
2. Soit $a, b \ge 1$ et $-b < c < a$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(S_n = c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k > -b\right) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2a+2b+c}{2}}\right).$$

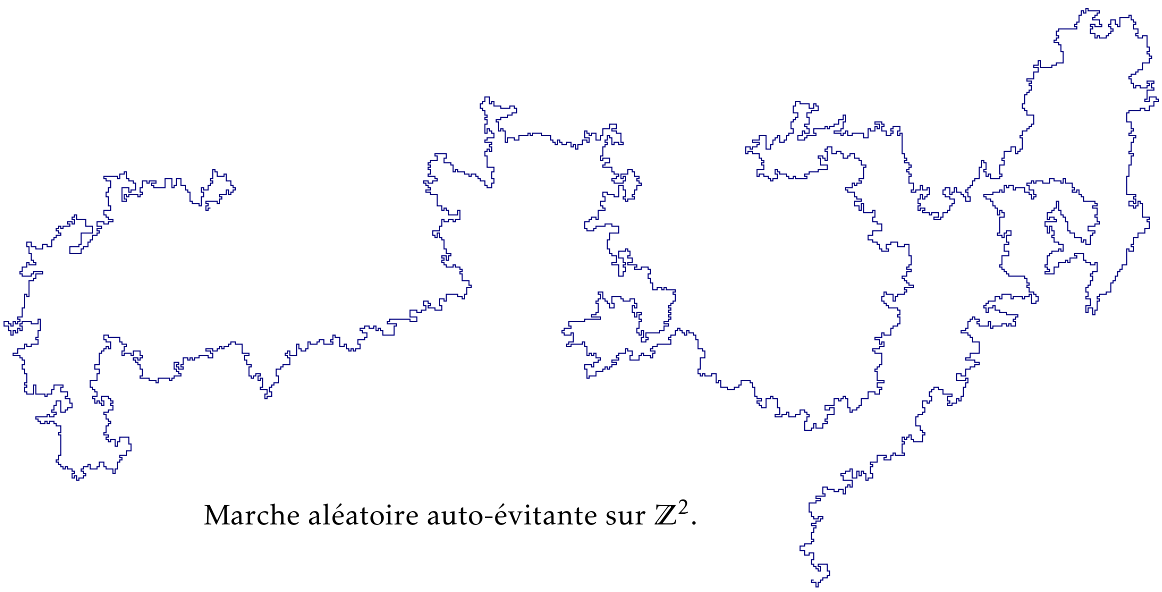
3. (★) Soit $a, b \ge 1$ et $-b < c < a$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que

$$\mathbb{P}\left(S_n = c, \tau_a = \tau_{-b} = \infty\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\right).$$

Exercice 11. (*Marche aléatoire auto-évitante*)

1. Soit $(a_n)_{n\ge0}$ une suite de nombres réels vérifiant $a_{m+n} \le a_m + a_n$ pour tous entiers $m, n \ge 0$. Montrer que la suite $(a_n/n)_{n\ge1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf_{n\ge1} a_n/n$.
2. Un chemin auto-évitant de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite de points distincts $A_0, A_1, \dots, A_n$ à coordonnées entières où A_0 est l'origine et tels que la distance entre A_i et A_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \le i \le n-1$. Soit a_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $a_n^{1/n}$ converge lorsque $n \to \infty$ vers un réel positif noté c et que $2 \le c \le 3$.

Remarque. Le réel c est appelé *constante de connectivité du réseau* $\mathbb{Z}^2$. On ne connaît pas sa valeur exacte. Hugo Duminil-Copin et Stanislav Smirnov ont montré en 2012 que la constante de connectivité du réseau hexagonal vaut $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, résolvant ainsi une conjecture formulée 30 ans plus tôt en physique théorique par Nienhuis.



Marche aléatoire auto-évitante sur $\mathbb{Z}^2$.