TD 8 – Lois de variables aléatoires et marche simple

1 – Lois de variables aléatoires

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour $\lambda, \mu > 0$, on se donne (X,Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi

$$\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\,dx\,dy.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X,Y)$.

Corrigé. On remarque que U est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Soit $F\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F(U)] &= \lambda\mu\int_{\mathbb{R}_+^2} F(\min(x,y))e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy\\
&= \lambda\mu\int_{\{0\le x\le y\}} F(x)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy + \lambda\mu\int_{\{0\le y\le x\}} F(y)e^{-(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy\\
&= \lambda\int_0^\infty F(x)e^{-\lambda x}\left(\int_x^\infty \mu e^{-\mu y}\,dy\right)dx + \mu\int_0^\infty F(x)e^{-\mu x}\left(\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y}\,dy\right)dx\\
&= (\lambda+\mu)\int_0^\infty F(x)e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx.
\end{aligned}$$

La variable aléatoire U est donc exponentielle de paramètre $\lambda+\mu$.

Exercice 2. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. (c'est-à-dire $\mathbb{P}$-presque partout). Montrer que X et Y ont la même loi. Que dire de la réciproque ?
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Corrigé.

1. Si $X = Y$ p.s. alors $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(Y)]$ pour toute fonction borélienne $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, ce qui montre que X et Y ont la même loi.
   La réciproque est fausse. Considérons une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (c'est-à-dire de densité $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ par rapport à la mesure de Lebesgue). Posons $Y = -X$. Alors Y est une variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. En effet, soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne, on a
   $$\mathbb{E}[g(Y)] = \int_{-\infty}^\infty g(-x)e^{-x^2/2}\,dx = \int_{-\infty}^\infty g(x)e^{-x^2/2}\,dx.$$
   Donc X et Y ont la même loi mais ne sont pas égales p.s.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

2. (a) Pour toute fonction borélienne $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, la fonction $g \circ f$ est borélienne. Comme X et Y ont la même loi, on a

$$\mathbb{E}[g \circ f(X)] = \mathbb{E}[g \circ f(Y)],$$

ce qui montre que $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.

(b) On reprend les variables X et Y de la question 1. Soit $Z = X$. Alors $XZ = X^2$ et $YZ = -X^2$. La loi de X^2 est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_+$ (différente de la mesure de Dirac δ_0) et la loi de $-X^2$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}_-$ donc XZ et YZ n'ont pas la même loi.

2 – Marche aléatoire simple

Exercice 3. (*Un jeu un peu long*)

1. Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. Montrer que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X \geq i).$$

2. Fermat et Pascal jouent à croix ou pile. Étant bons amis, ils décident de jouer jusqu'à ce que chacun ait retrouvé sa fortune initiale. Combien de fois en moyenne vont-ils lancer la pièce ?

Corrigé.

1. On a, en utilisant Fubini-Tonelli,

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i \geq 1} i\mathbb{P}(X = i) = \sum_{i \geq 1} \sum_{k=1}^{i} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{k \geq 1} \sum_{i=k}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

2. On s'intéresse à l'espérance de T le premier instant de retour en 0, qui est une variable aléatoire à valeur dans les entiers pairs strictement positifs. Pour $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(T \geq 2k+2) = \mathbb{P}(T \geq 2k+1) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2k} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$$

par le lemme fondamental. Or on a

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(T \geq i) = \sum_{k \geq 1} 2\mathbb{P}(T \geq 2k),$$

et la série de terme général $1/\sqrt{k}$ diverge, donc $\mathbb{E}[T] = \infty$.

Exercice 4. (*Théorème du scrutin*)

1. Soit $n, a \in \mathbb{N}^*$ et $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ une marche aléatoire simple symétrique de longueur n. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{n-1} > 0, S_n = a) = \frac{a}{n} \mathbb{P}(S_n = a).$$

2. Lors de l'élection du COF, la ProbabiListe gagne face à la DétermiListe avec 300 voix contre 200. On suppose que le dépouillement a été fait par une seule personne, qui note le score après chaque bulletin de vote ouvert. Avec quelle probabilité la ProbabiListe a-t-elle été en tête tout au long du dépouillement ?

Corrigé.

1. On a

$$\begin{aligned}
&\#\{\text{chemins de } (0,0) \text{ à } (n,a) \text{ ne retouchant pas l'axe des abscisses après le point de départ}\}\\
&= \#\{\text{chemins de } (1,1) \text{ à } (n,a) \text{ ne touchant jamais l'axe des abscisses}\}\\
&= \#\{\text{chemins de } (1,1) \text{ à } (n,a)\} - \#\{\text{chemins de } (1,1) \text{ à } (n,a) \text{ touchant l'axe des abscisses}\}\\
&= \#\{\text{chemins de } (1,1) \text{ à } (n,a)\} - \#\{\text{chemins de } (1,-1) \text{ à } (n,a)\},
\end{aligned}$$

par le principe de réflexion. En notant, $n = p+q$ et $a = p-q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$ (si cela n'est pas possible alors on ne peut pas avoir $S_n = a$ donc le résultat est immédiat), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n = a) &= \frac{1}{2^n}\left(\binom{p+q-1}{p-1} - \binom{p+q-1}{p}\right) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{p}{p+q}\binom{p+q}{p} - \frac{q}{p+q}\binom{p+q}{q}\right)\\
&= \frac{1}{2^n}\frac{p-q}{p+q}\binom{p+q}{p} = \frac{a}{n}\mathbb{P}(S_n = a).
\end{aligned}$$

2. On pose $n = 300 + 200$ et $a = 300 - 200$. La question revient à déterminer la probabilité que $S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0$ sachant que $S_n = a$ qui est égale à

$$\frac{\mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n = a)}{\mathbb{P}(S_n = a)} = \frac{a}{n} = \frac{1}{5}.$$

C'est donc assez peu probable, l'issue du vote n'a donc pas de raison d'être claire dès le début du dépouillement.

3 – Probabilités discrètes

Exercice 5. On répartit au hasard r boules dans n cases. Soit $r_1, \dots, r_n$ des entiers tels que $r_1 + \dots + r_n = r$.

1. Expliciter les espaces de probabilités décrivant cette expérience et calculer la probabilité d'obtenir r_1 boules dans la case $1, \dots, r_n$ boules dans la case n, pour chacun des modèles suivants :
   (a) On suppose que toutes les configurations de boules sont possibles et équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Maxwell-Boltzmann*.
   (b) On suppose que toutes les configurations possibles pour les nombres de boules dans chaque case sont équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Bose-Einstein*.
   (c) On suppose qu'il ne peut y avoir plus d'une boule dans chaque case et que toutes les configurations de boules autorisées sont équiprobables. Cette distribution s'appelle *statistique de Fermi-Dirac*.

   Ces trois modèles sont utilisés en physique statistique (avec des particules à la place des boules), la pertinence d'un modèle est liée au type de particules étudiées et aux résultats expérimentaux.
2. Quelle est la probabilité que parmi r personnes, au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?
3. Supposons que dans une grande ville, il arrive r accidents durant une semaine. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un accident chaque jour de la semaine ?
4. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Combien de dérivées partielles d'ordre r différentes admet-t-elle ?
5. Un livre contient n symboles et il y a r coquilles. Quel modèle choisiriez–vous pour la loi des coquilles ?

Corrigé.

1.(a) On travaille sur $\Omega_{n,r}$ l'ensemble des fonctions de $[\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!]$ muni de la probabilité $\mathbb{P}_{n,r}$ uniforme sur $\Omega_{n,r}$. Alors on a $\#\Omega_{n,r} = n^r$ et la probabilité d'obtenir r_1 boules dans la case 1, $\dots$, r_n boules dans la case n est

$$\mathbb{P}_{n,r}\left(\left\{f : [\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!] \;\middle|\; \forall 1 \leq i \leq n, r_i = \#\left(f^{-1}(\{i\})\right)\right\}\right) = \frac{1}{n^r}\binom{r}{r_1}\binom{r-r_1}{r_2}\cdots\binom{r-r_1-\cdots-r_{n-1}}{r_n}$$
$$= \frac{1}{n^r}\frac{r!}{r_1!\cdots r_n!}.$$

Remarque. On note

$$\binom{r}{r_1,\dots,r_n} := \frac{r!}{r_1!\cdots r_n!}$$

et on l'appelle *coefficient multinomial*. Il intervient en particulier dans la généralisation de la formule du binôme de Newton suivante : pour $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$,

$$(x_1+\cdots+x_n)^r = \sum_{r_1,\dots,r_n\in\mathbb{N} \text{ tels que } r_1+\cdots+r_n=r} \binom{r}{r_1,\dots,r_n} x_1^{r_1}\cdots x_n^{r_n}.$$

(b) On travaille sur l'espace $\Omega_{n,r} := \{(r_1,\dots,r_n) \in \mathbb{N}^n : r_1+\cdots+r_n = r\}$ muni de la probabilité $\mathbb{P}_{n,r}$ uniforme sur $\Omega_{n,r}$. Déteminons $\#\Omega_{n,r}$. Pour cela, on associe chaque élément de $\Omega_{n,r}$ à une partie de $\{1,\dots,r+n-1\}$ à $n-1$ éléments de la manière suivante. On part de $r+n-1$ boules, on en choisit $n-1$ que l'on remplace par des traits : les traits délimitent les urnes dans lesquelles se trouvent les r boules restantes. Voici un exemple avec $n = 6$ et $r = 9$:

$$|\bullet||\bullet\bullet\bullet|\bullet\bullet|\bullet\bullet\bullet \quad \longleftrightarrow \quad (r_1,\dots,r_n) = (0,1,0,3,2,3).$$

On en déduit que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$,

$$\#\Omega_{n,r} = \binom{r+n-1}{n-1}.$$

Donc, on obtient

$$\mathbb{P}_{n,r}(\{(r_1,\dots,r_n)\}) = \binom{r+n-1}{n-1}^{-1}.$$

(c) A priori, si l'énoncé est cohérent avec la question 1.(a), on doit différencier les boules et donc travailler sur $\Omega_{n,r} := \{f : [\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!] \mid f \text{ injective}\}$ (à chaque boule on attribue une urne, mais il ne faut pas qu'il y ait 2 boules dans la même urne) muni de la probabilité $\mathbb{P}_{n,r}$ uniforme. Alors on a

$$\#\Omega_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

et la probabilité qui nous intéresse est nulle si l'un des r_i est supérieur à 2 et sinon est égale à

$$\mathbb{P}_{n,r}\left(\left\{f : [\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!] \text{ injective} \;\middle|\; \forall 1 \leq i \leq n, r_i = \#\left(f^{-1}(\{i\})\right)\right\}\right)$$
$$= \frac{(n-r)!}{n!}\#\{f : [\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!] \text{ bijective}\}$$
$$= \frac{(n-r)!r!}{n!}$$

où $I := \{i \in [\![1,n]\!] : r_i = 1\}$ qui est de cardinal r.

Il est intéressant de voir que si on a une approche correspondant plutôt à la question 2.(b), alors ça ne change pas la probabilité qu'on doit calculer : on peut travailler sur l'espace $\Omega_{n,r} := \{(r_1,\dots,r_n) \in \{0,1\}^n : r_1+\cdots+r_n = r\}$ muni de la probabilité $\mathbb{P}_{n,r}$ uniforme sur $\Omega_{n,r}$ et on a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}$,

$$\#\Omega_{n,r} = \binom{n}{r}$$

et donc

$$\mathbb{P}_{n,r}(\{(r_1,\dots,r_n)\}) = \binom{n}{r}^{-1}.$$

2. Cela correspond à la statistique de Maxwell-Boltzmann, avec $n = 365$ (en négligeant le 29 février). Alors la probabilité que parmi r personnes, au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour est égale à

$$1 - \mathbb{P}(\{f : [\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!] \mid \forall i \neq j, f(i) \neq f(j)\}) = 1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-r)}{n^r}.$$

3. C'est encore la statistique de Maxwell-Boltzmann, avec $n = 7$. Alors la probabilité qu'il y ait un accident chaque jour de la semaine est égale à

$$\mathbb{P}(\{f : [\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!] \mid \forall k \in [\![1,n]\!], \exists i \in [\![1,r]\!] : f(i) = k\}) = \frac{S_{r,n}}{n^r}$$

où $S_{r,n}$ est le nombre de surjections de $[\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!]$. Pour calculer $S_{r,n}$, on utilise la formule du crible (voir exercice 3 du DM 3) :

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

On va l'appliquer avec A_i l'ensemble des fonctions de $[\![1,r]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que i n'a pas d'antécédents, en remarquant que $S_{r,n} = (A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\#S_{r,n} = n^r - \#\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= n^r - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \#(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &= n^r - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (n-k)^r = n^r - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^r \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^r.\end{aligned}$$

4. Les dérivées partielles sont les

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_i^{r_i} \cdots \partial x_n^{r_n}},$$

pour $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$ tels que $r_1 + \cdots + r_n = r$ (l'ordre dans le quels on dérive n'importe pas). Il y en a donc un nombre égal au cardinal de l'espace de probabilité associé à la statistique de Bose-Einstein, c'est-à-dire $\binom{r+n-1}{n-1}$.

5. C'est la statistique de Fermi-Dirac.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. (*Tribu engendrée par une variable aléatoire*) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et X une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On note

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

1. Montrer que $\sigma(X)$ est la plus petite tribu $\mathcal{A}$ sur Ω telle que X soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La tribu $\sigma(X)$ est appelée la *tribu engendrée par la variable aléatoire* X.
2. Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui soit $\sigma(X)$-mesurable, i.e. Y est une application mesurable de $(\Omega, \sigma(X))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne telle que $Y = f(X)$.

3. Expliciter $\sigma(X)$ et la loi de X dans les cas suivants (λ est la mesure de Lebesgue) :
   (a) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ et $X(\omega) := 2\omega \mathbb{1}_{[0,1/2]}(\omega) + \mathbb{1}_{]1/2,1]}(\omega)$ pour $\omega \in [0,1]$.
   (b) $X := a\mathbb{1}_A + b\mathbb{1}_B$, où $A, B \in \mathcal{F}$ et $a, b \in \mathbb{R}^*$.
   (c) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) := ([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]), \lambda/2)$ et $X(\omega) := \omega^2$ pour $\omega \in [0,1]$.

Corrigé.

1. La famille $\sigma(X)$ est une tribu : c'est la tribu réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par X (voir TD 1).
   Il est clair que $\sigma(X)$ rend X mesurable (car pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a bien $X^{-1}(B) \in \sigma(X)$). D'autre part, toute tribu rendant X mesurable contient $\sigma(X)$, car elle doit contenir les ensembles de la forme $X^{-1}(B)$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Donc $\sigma(X)$ est bien la plus petite tribu sur Ω rendant X mesurable.
2. La fonction Y est mesurable de $(\Omega, \sigma(X))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, donc il existe $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions étagées (pour $\sigma(X)$) telles que $Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, Y_n est de la forme

$$Y_n = \sum_{i=1}^{k_n} c_{i,n} \mathbb{1}_{X^{-1}(B_{i,n})},$$

   avec $c_{i,n} \in \mathbb{R}$ et $B_{i,n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors, on remarque que $Y_n = f_n \circ X$, où l'on a posé

$$f_n := \sum_{i=1}^{k_n} c_{i,n} \mathbb{1}_{B_{i,n}},$$

   qui est bien une fonction borélienne de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose alors

$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ si la limite existe dans } \mathbb{R}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   La fonction f est mesurable car elle s'écrit

$$f(x) = \mathbb{1}_{-\infty < \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x) < \infty} \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

   et $\liminf_{n\to\infty} f_n$ et $\limsup_{n\to\infty} f_n$ sont mesurables. En outre, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$f_n(X(\omega)) = Y_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} Y(\omega),$$

   donc $Y = f \circ X$.

3.(a) Soit $A \in \mathcal{B}([0,1])$. On a $A = X^{-1}(\frac{1}{2}A) \in \sigma(X)$, car $\frac{1}{2}A \subset [0, \frac{1}{2}]$. Donc $\mathcal{B}([0,1]) \subset \sigma(X)$ et ainsi $\mathcal{B}([0,1]) = \sigma(X)$ (l'inclusion réciproque revient exactement à dire que X est mesurable de $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$). La loi de X est $\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\delta_1$.

   (b) *Cas 1 : $a \neq b$ et $a + b \neq 0$.* Alors X peut prendre uniquement les 4 valeurs distinctes suivantes : 0, a, b et $a+b$. Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par $\mathcal{C} := \{\{0\}, \{a\}, \{b\}, \{a+b\}\} \cup \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0, a, b, a+b\})$, $\sigma(X)$ est engendrée par les images réciproques d'éléments de $\mathcal{C}$. Comme les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0, a, b, a+b\})$ ont pour image réciproque $\varnothing$ et 0, a, b et $a+b$ ont pour images réciproques $A^c \cap B^c$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ et $A \cap B$, on en déduit que

$$\sigma(X) = \{\varnothing, A, B, A^c, B^c, A\cap B, A\cup B, A^c \cap B, A^c \cup B, A \cap B^c, A \cup B^c, A^c \cap B^c, A^c \cup B^c, A\Delta B, (A\Delta B)^c, \Omega\},$$

   où $A\Delta B := A\cup B \setminus A\cap B$ est la différence symétrique entre A et B ($\sigma(X)$ contient les 2^4 ensembles que l'on peut former à partir de la partition à 4 éléments : $A^c \cap B^c$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ et $A \cap B$). La loi de X est

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c)\delta_0 + \mathbb{P}(A \cap B^c)\delta_a + \mathbb{P}(A^c \cap B)\delta_b + \mathbb{P}(A \cap B)\delta_{a+b}.$$

   Cas 2 : $a = b$. Alors, on a $X = a\mathbb{1}_{A\Delta B} + 2a\mathbb{1}_{A\cap B}$. Comme précédemment, $\sigma(X)$ est engendrée par $A^c \cap B^c$, $A\Delta B$, $A \cap B$, donc on obtient

$$\sigma(X) = \{\varnothing, A^c \cap B^c, A\Delta B, A\cap B, A \cup B, A^c \cup B^c, (A\Delta B)^c, \Omega\}.$$

La loi de X est
$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c)\delta_0 + \mathbb{P}(A\Delta B)\delta_a + \mathbb{P}(A\cap B)\delta_{2a}.$$

Cas 3 : $a+b=0$. Alors, on a X ne peut prendre que les 3 valeurs suivantes : 0, a et $-a$, donc $\sigma(X)$ est engendrée par $(A\Delta B)^c$, $A\cap B^c$ et $A^c\cap B$, donc on obtient

$$\sigma(X) = \{\varnothing, (A\Delta B)^c, A\cap B^c, A^c\cap B, A\Delta B, A^c\cup B, A\cap B^b, \Omega\}.$$

La loi de X est
$$\mathbb{P}((A\Delta B)^c)\delta_0 + \mathbb{P}(A\cap B^c)\delta_a + \mathbb{P}(A^c\cap B)\delta_{-a}.$$

(c) Pour $A \in \mathcal{B}([-1,1])$, on a $X^{-1}(A) = A\cup(-A)$, donc

$$\sigma(X) = \{A\cup(-A) : A\in\mathcal{B}([-1,1])\},$$

qui est aussi l'ensemble des boréliens de $[-1,1]$ symétriques par rapport à 0. Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ boréliennes, on a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{-1}^{1} f(\omega^2)\frac{\mathrm{d}\omega}{2} = \int_0^1 f(\omega^2)\,\mathrm{d}\omega = \int_0^1 f(x)\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$$

donc X a pour loi $(2\sqrt{x})^{-1}\mathbb{1}_{x\in]0,1]}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1,0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2,\pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

Corrigé. Le point d'impact du rayon lumineux sur l'axe des ordonnées est $Y=\tan(t)$. Or $\phi : t\in\,]-\pi/2,\pi/2[\,\mapsto \tan(t)\in\mathbb{R}$ est un C^1-difféomorphisme de Jacobien $1+\tan^2(t)$. Donc, pour $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ borélienne, on a, d'après la formule du changement de variables,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(\tan(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\frac{dy}{1+y^2}.$$

La variable aléatoire Y suit donc la loi de Cauchy.

Exercice 8. Sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Corrigé. Soit $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. On a par symétrie

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{1}{N^2}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} F\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}_+^*} F\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x.$$

Et $x\in\mathbb{R}_+^*\mapsto x^{-2}\in\mathbb{R}_+^*$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de Jacobien $-2x^{-3}$ donc d'après la formule du changement de variables, on a

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} F\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} F(u)\mathrm{e}^{-1/(2u)}(2u^{3/2})^{-1}\,\mathrm{d}u.$$

Donc la loi de $1/N^2$ est $\frac{1}{\sqrt{2\pi u^3}}\mathrm{e}^{-1/(2u)}\mathbb{1}_{\{u>0\}}\,\mathrm{d}u$.

Exercice 9. On considère un jeu de 52 cartes bien mélangé, posé face caché sur une table. On retourne une à une les cartes jusqu'à trouver un as. Combien de cartes aura-t-on vu en moyenne ?

Corrigé. On note $n = 52$. On travaille sur $(\mathcal{S}_n, \mathcal{P}(\mathcal{S}_n))$ muni de $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme et on peut considérer que les as sont représentées par 1,2,3 et 4. Soit X la variable aléatoire définie par

$$X(\sigma) = \inf\{i \in [\![1,52]\!] : \sigma(i) \le 4\} \le 48,$$

qui est le premier instant où l'on retourne un as. Pour $k \in [\![1,47]\!]$, on considère l'événement $A_k := \{X > k\} = \{\sigma \in \mathcal{S}_{52} : X(\sigma) > k\}$. Alors on a

$$\#A_k = (n-4)(n-4-1)\cdots(n-4-(k-1))(n-k)\cdots(n-(n-1)) = \frac{(n-4)!}{(n-4-k)!}(n-k)!,$$

car pour $\sigma(1)$ jusqu'à $\sigma(k)$ on doit choisir parmi $[\![5,n]\!]$, puis on choisit ce que l'on veut. On en déduit que (en utilisant la question 1. de l'exercice 3 et le fait que $\mathbb{P}(X > k) = 0$ si $k \ge n-4$)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k\ge1}\mathbb{P}(X \ge k) = \sum_{k=0}^{n-5}\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{n!}\frac{(n-4)!}{(n-4-k)!}(n-k)! = \frac{(n-4)!}{n!}4!\sum_{k=0}^{n-5}\binom{n-k}{n-k-4}\\ &= \frac{(n-4)!4!}{n!}\sum_{i=5}^{n}\binom{i}{4}.\end{aligned}$$

Mais on a, pour $p \in \mathbb{N}^*$, par la relation du triangle de Pascal,

$$\sum_{i=p}^{n}\binom{i}{p} = \sum_{i=p}^{n}\binom{i+1}{p+1} - \binom{i}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \frac{1}{5!}(n+1)n(n-1)\cdots(n-(p-1)) - 0.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \frac{(n-4)!4!}{n!}\left(\sum_{i=4}^{n}\binom{i}{4} - 1\right) = \frac{4!}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\left(\frac{1}{5!}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) - 1\right)\\ &= \frac{(n+1)}{5} - \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{(n-4)(n^4-n^3+n^2+9n+30)}{5n(n-1)(n-2)(n-3)},\end{aligned}$$

selon la forme que l'on préfère. On peut ensuite s'amuser à calculer avec $n = 52$.

Exercice 10. (*Réflexions multiples*) Soit $(S_k)_{0\le k\le n}$ une marche aléatoire simple symétrique d'horizon $n \ge 1$. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on note $\tau_x := \min\{k \in [\![0,n]\!] : S_k = x\}$, où par convention $\min\varnothing = \infty$.

1. Soit $b \ge 1$ et $c > -b$. Déterminer $\mathbb{P}(S_n = c, S_0 > -b, \dots, S_n > -b)$.
2. Soit $a, b \ge 1$ et $-b < c < a$. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k > -b) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2a+2b+c}{2}}\right).$$

3. (✯) Soit $a, b \ge 1$ et $-b < c < a$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que

$$\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a = \tau_{-b} = \infty) = \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\right).$$

Corrigé.

1. On a

$$\begin{aligned}
&\#\{S_n = c, S_0 > -b, \dots, S_n > -b\} \\
&= \#\{\text{chemins de } (0,b) \text{ à } (n, c+b) \text{ ne touchant pas } 0\} \\
&= \#\{\text{chemins de } (0,b) \text{ à } (n, c+b)\} - \#\{\text{chemins de } (0,b) \text{ à } (n, c+b) \text{ touchant } 0\} \\
&= \#\{\text{chemins de } (0,b) \text{ à } (n, c+b)\} - \#\{\text{chemins de } (0,-b) \text{ à } (n, c+b)\},
\end{aligned}$$

par le principe de réflexion. On obtient ainsi

$$\mathbb{P}(S_n = c, S_0 > -b, \dots, S_n > -b) = \mathbb{P}(S_n = c) - \mathbb{P}(S_n = a+2b) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+c+2b}{2}}\right).$$

2. En reflétant le chemin à partir de l'instant τ_a, par rapport à l'axe horizontal de niveau a on a

$$\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k > -b) = \mathbb{P}(S_n = 2a - c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k < 2a + b).$$

On remarque que avant l'instant τ_a, la trajectoire est forcément $< 2a+b$, puis que si $S_n = 2a - c$ alors on a forcément $\tau_a < n$. Cela donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a < n, \forall k \in [\![\tau_a, n]\!], S_k > -b) &= \mathbb{P}(S_n = 2a - c, \forall k \in [\![0, n]\!], S_k < 2a + b) \\
&= \mathbb{P}(S_n = c - 2a, \forall k \in [\![0, n]\!], S_k > -(2a + b)) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+c-2a}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2a+2b+c}{2}}\right) = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2a+2b+c}{2}}\right),
\end{aligned}$$

en utilisant la question 1.

3. Cette question est assez lourde à rédiger, et bien plus claire avec un dessin. On s'intéresse à la probabilité complémentaire, c'est-à-dire qu'une trajectoire touche le niveau a ou le niveau $-b$ avant de finir en c. On décompose en fonction du nombre de fois que cette trajectoire travers la bande $[-b, a]$. Puis en partant de l'extrémité on utilise des réflexions par rapport au niveau a et $-b$ alternativement de la fin de la trajectoire, jusqu'à arriver à quelque chose de calculable (c'est-à-dire de la forme de la question 1.).
On commence par remarquer que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a = \tau_{-b} = \infty) &= \mathbb{P}(S_n = c) - \mathbb{P}(S_n = c, \tau_a < \infty \text{ ou } \tau_{-b} < \infty) \\
&= \mathbb{P}(S_n = c) - \mathbb{P}(S_n = c, \text{ le niveau } a \text{ est touché en dernier}) \\
&\quad - \mathbb{P}(S_n = c, \text{ le niveau } b \text{ est touché en dernier}).,
\end{aligned}$$

en séparant en fonction de laquelle des deux "barrières" en a et $-b$ a été touchée en dernier.
On va se concentrer sur le cas où on touche a en dernier, l'autre s'obtenant par symétrie. On va séparer en fonction du nombre de traversée de la bande $[-b, a]$. Pour cela, on pose $T_1 := \tau_a$ puis pour $k \geq 1$,

$$U_k := \inf\{i \geq T_k : S_i = -b\} \quad \text{et} \quad T_{k+1} := \inf\{i \geq U_k : S_i = a\}.$$

Les instants U_k correspondent à la fin d'une traversée de la bande de a vers $-b$ et les instants T_k (pour $k \geq 2$) correspondent à la fin d'une traversée de la bande de $-b$ vers a. On remarque que $T_1 \leq U_1 \leq T_2 \leq U_2 \leq \dots$, où les inégalités sont en fait strictes jusqu'à ce que les instants soient infinis. On a alors

$$\mathbb{P}(S_n = c, \text{ le niveau } a \text{ est touché en dernier}) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(S_n = c, T_k \leq n \text{ et } U_k = \infty).$$

Soit $k \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = c, T_k \leq n, U_k = \infty) &= \mathbb{P}(S_n = c, T_k \leq n, \forall i \in [\![T_k, n]\!], S_i > -b) \\
&= \mathbb{P}(S_n = 2a - c, T_k \leq n, \forall i \in [\![T_k, n]\!], S_i < 2a + b), \qquad (1)
\end{aligned}$$

par réflexion de la trajectoire entre les instant T_k et n par rapport au niveau a (comme à la question 2.).
Dans le but de procéder par récurrence, on va montrer que, pour tous $j \geq 2$ et $y > x > a$, on a

$$\mathbb{P}\Big(S_n = x, T_j \leq n, \forall i \in [\![T_j, n]\!], S_i < y\Big) = \mathbb{P}\Big(S_n = 2(a+b)+x, T_{j-1} \leq n, \forall i \in [\![T_{j-1}, n]\!], S_i < 2(a+b)+y\Big) \tag{2}$$

Pour cela, on commence par remarquer que, sur l'événement $\{T_j \leq n\}$, on a $U_j \leq n$ et $\forall i \in [\![U_j, T_j]\!]$, $S_i \leq a < y$. Réciproquement, sur $\{U_j \leq n, S_n = x\}$, on a $T_j \leq n$ car $x > a$. Cela nous assure que

$$\mathbb{P}\Big(S_n = x, T_j \leq n, \forall i \in [\![T_j, n]\!], S_i < y\Big) = \mathbb{P}\Big(S_n = x, U_j \leq n, \forall i \in [\![S_j, n]\!], S_i < y\Big).$$

On effectue alors une réflexion de la trajectoire entre les instant S_j et n par rapport au niveau $-b$, ce qui donne

$$\mathbb{P}\Big(S_n = x, U_j \leq n, \forall i \in [\![S_j, n]\!], S_i < y\Big) = \mathbb{P}\Big(S_n = -2b-x, U_j \leq n, \forall i \in [\![S_j, n]\!], S_i > -2b-y\Big).$$

Puis par des arguments similaires sur ce qui a lieu entre les instants T_{j-1} et U_j et en effectuant réflexion de la trajectoire entre les instant T_{j-1} et n par rapport au niveau a, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(S_n = -2b-x, U_j \leq n, \forall i \in [\![S_j, n]\!], S_i > -2b-y\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(S_n = -2b-x, T_{j-1} \leq n, \forall i \in [\![T_{j-1}, n]\!], S_i > -2b-y\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(S_n = 2a-(-2b-x), T_{j-1} \leq n, \forall i \in [\![T_{j-1}, n]\!], S_i < 2a-(-2b-y)\Big),
\end{aligned}$$

et cela montre (2).
On revient à (1). En utilisant $k-1$ fois (2), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_n = 2a-c, T_k \leq n, \forall i \in [\![T_k, n]\!], S_i < 2a+b) \\
&= \mathbb{P}(S_n = 2(k-1)(a+b)+2a-c, T_1 \leq n, \forall i \in [\![T_1, n]\!], S_i < 2(k-1)(a+b)+2a+b).
\end{aligned}$$

Comme $T_1 = \tau_a$, on a, par la fin du calcul de la question 2.,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_n = 2(k-1)(a+b)+2a-c, T_1 \leq n, \forall i \in [\![T_1, n]\!], S_i < 2(k-1)(a+b)+2a+b) \\
&= \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{\frac{n+2(k-1)(a+b)+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2[2(k-1)(a+b)+2a+b]-[2(k-1)(a+b)+2a-c]}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Finalement, on a montré que

$$\mathbb{P}(S_n = c, \text{ le niveau } a \text{ est touché en dernier}) = \frac{1}{2^n}\sum_{k\geq 1}\left(\binom{n}{\frac{n+2(k-1)(a+b)+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}}\right)$$

et par symétrie, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n = c, \text{ le niveau } b \text{ est touché en dernier}) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k\geq 1}\left(\binom{n}{\frac{n+2(k-1)(a+b)+2b+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)-c}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k\leq -1}\left(\binom{n}{\frac{n-2k(a+b)-2a+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n-2k(a+b)-c}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k\leq -1}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}}\right),
\end{aligned}$$

en utilisant que $(S_k)_{0\leq k\leq n}$ et $(-S_k)_{0\leq k\leq n}$ ont même loi, puis en changeant k en $-k$.

Enfin, en revenant à la première égalité, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_n = c, \tau_a = \tau_b = \infty)\\
&= \mathbb{P}(S_n = c) + \frac{1}{2^n}\sum_{k\geq 1}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2(k-1)(a+b)+2a-c}{2}}\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k\leq -1}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\right)\\
&= \mathbb{P}(S_n = c) + \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \frac{1}{2^n}\sum_{k\geq 0}\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}} - \frac{1}{2^n}\sum_{k\leq -1}\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\\
&= \frac{1}{2^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+c}{2}} - \binom{n}{\frac{n+2k(a+b)+2a-c}{2}}\right),
\end{aligned}$$

en changeant k en $k-1$, puis en remarquant que $\mathbb{P}(S_n = c) = 2^{-n}\binom{n}{(n+c)/2}$ est exactement le terme manquant à la somme sur $k \in \mathbb{Z}^*$

Exercice 11. (*Marche aléatoire auto-évitante*)

1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels vérifiant $a_{m+n} \leq a_m + a_n$ pour tous entiers $m, n \geq 0$. Montrer que la suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers $\inf_{n\geq 1} a_n/n$.
2. Un chemin auto-évitant de longueur n de $\mathbb{Z}^2$ est une suite de points distincts $A_0, A_1, \ldots, A_n$ à coordonnées entières où A_0 est l'origine et tels que la distance entre A_i et A_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Soit a_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n de $\mathbb{Z}^2$. Montrer que $a_n^{1/n}$ converge lorsque $n \to \infty$ vers un réel positif noté c et que $2 \leq c \leq 3$.

Remarque. Le réel c est appelé *constante de connectivité du réseau* $\mathbb{Z}^2$. On ne connaît pas sa valeur exacte. Hugo Duminil-Copin et Stanislav Smirnov ont montré en 2012 que la constante de connectivité du réseau hexagonal vaut $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, résolvant ainsi une conjecture formulée 30 ans plus tôt en physique théorique par Nienhuis.

Corrigé.

1. Soit $q > 0$ fixé et n un entier vérifiant $n \geq q$. Soit $n = k_n q + r_n$ ($k_n \geq 1$ et $0 \leq r_n \leq q-1$) la division euclidienne de n par q. En écrivant $a_n = a_{(k_n-1)q+q+r_n} \leq (k_n-1)a_q + a_{q+r_n}$, il vient

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{k_n-1}{n}a_q + \frac{a_{q+r_n}}{n} = \frac{q(k_n-1)}{n}\cdot\frac{a_q}{q} + \frac{a_{q+r_n}}{n} \leq \frac{n-r_n-q}{n}\cdot\frac{a_q}{q} + \frac{1}{n}\max_{0\leq i\leq q-1}\frac{a_{q+i}}{n}.$$

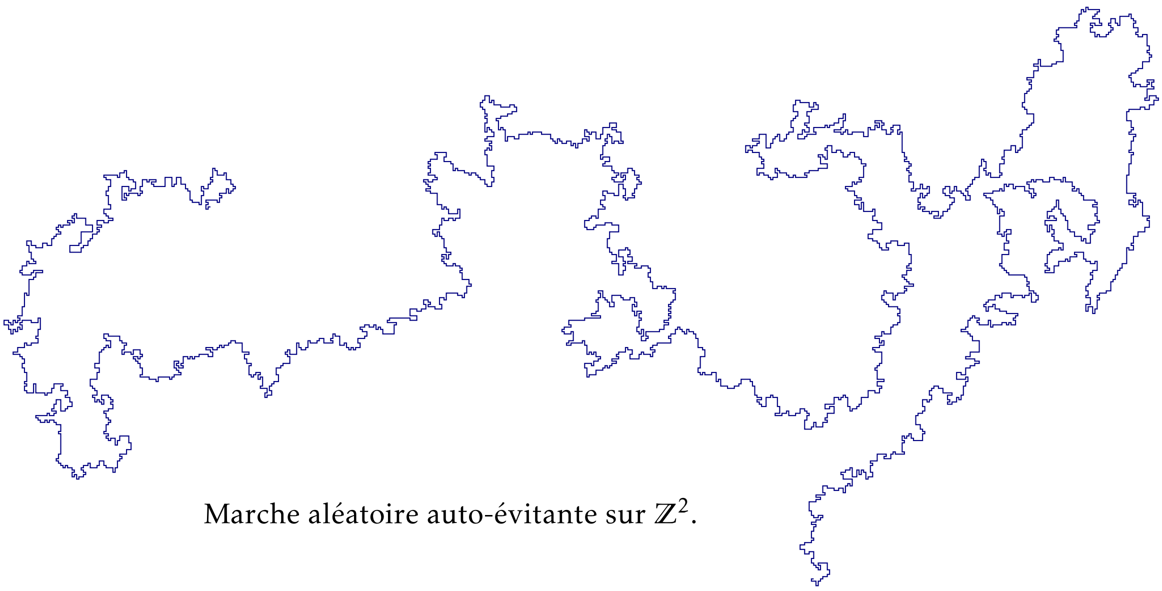
   Comme $0 \leq r_n \leq q-1$, $(n-r_n-q)/n \to 1$, et donc

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \leq \frac{q_q}{q}.$$

   Ceci étant vrai pour tout entier $q \geq 1$, on en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \leq \inf_{n\geq 1}\frac{a_n}{n}.$$

   Comme on a clairement $\inf_{n\geq 1}\frac{a_n}{n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$, on a bien égalité.
2. Un chemin auto-évitant de longueur $m+n$ est la concaténation de deux chemins auto-évitants de longueurs respectives m et n. Donc $a_{m+n} \leq a_m a_n$. On peut donc appliquer la première question à la suite $\ln(a_n)$, ce qui implique que $a_n^{1/n}$ converge vers un réel positif c. En faisant des pas vers le haut ou la droite uniquement on voit que $2^n \leq a_n$ et comme on ne peut pas revenir en arrière on a $a_n \leq 4\cdot 3^{n-1}$, ce qui prouve que $2 \leq c \leq 3$. On peut obtenir des inégalités strictes, trouvez deux encadrements meilleurs !



Marche aléatoire auto-évitante sur $\mathbb{Z}^2$.