TD 7 – Dualité L^p – L^q et approximations

1 – Espaces L^p et dualité

Exercice 1. (*Séparabilité de $L^p(\Omega)$*) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit $p \in [1,\infty[$.

1. On note $\mathcal{E}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\Omega \to \mathbb{R}$ qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'indicatrices de pavés bornés inclus dans Ω. Montrer que $\mathcal{E}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
2. Montrer que $L^p(\Omega)$ est séparable (c'est-à-dire qu'il contient une partie dénombrable dense).
3. Est-ce que $L^\infty(\Omega)$ est séparable ?

Exercice 2. (*Séquentielle compacité faible-$*$*) Soit $p \in]1,\infty]$, $q \in [1,\infty[$ son exposant conjugué, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et λ la mesure de Lebesgue. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ (c'est-à-dire que la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée).

1. Soit D une partie dénombrable dense de $L^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une extractrice $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $h \in D$, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h \,\mathrm{d}\lambda$ existe dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $g \in L^q(\Omega)$, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda$ existe dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire qu'il existe $f \in L^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible-$*$* dans $L^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, c'est-à-dire :

$$\forall g \in L^q(\Omega), \qquad \int_\Omega f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\lambda.$$

4. Le résultat précédent subsiste-t-il pour $p = 1$?

Exercice 3. (*Petit contre-exemple*) Soient $E = \{a,b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = \infty$. Caractériser $L^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $L^1(\mu)$. Conclure.

2 – Approximations et convolution

Rappels du TD 6. Soit $d \geq 1$ et $f,g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, si la fonction $y \mapsto |f(x-y)g(y)|$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, alors on définit la *convolution* de f et de g en x par

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

On a aussi vu que, si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 4. (*Convolution $L^p - L^1$*) Soit $d \geq 1$ et $p > 1$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 5. (*Approximation de Dirac*) Une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continues bornées est appelée *approximation de Dirac* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

1. Montrer que, si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue bornée et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac, alors $f * \varphi_n \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.

2. (a) Soit $\psi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\psi(x,\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Soit F la fonction définie pour λ-p.t. $x \in X$ par $F(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,y) \, \mathrm{d}y$. Montrer que, pour tout $p \in [1,\infty[$,

$$\|F\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\psi(\cdot,y)\|_p \, \mathrm{d}y.$$

Indication. On pourra s'inspirer de la démonstration de l'inégalité de Minkowski.

   (b) Soit $p \in [1,\infty[$. Montrer que, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac, alors $f * \varphi_n \to f$ dans L^p.

Indication. On pourra utiliser la continuité de l'opérateur de translation montrée au TD 6 : pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $\tau_h f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x-h)$, on a $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.

3. Construire une approximation de Dirac $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que les φ_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

Exercice 6. (*Approximation $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p*) Montrer que pour tout $p \in [1,\infty[$, l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 7. (*Approximation $\mathcal{C}_c^\infty$ de fonctions plateau*) Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset U$. Montrer qu'il existe f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\mathbb{1}_K \leq f \leq \mathbb{1}_U$.

3 – Compléments (hors TD)

Rappels du TD 6. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

et c'est une fonction continue bornée.

Exercice 8. (*Lemme de Riemann-Lebesgue*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\hat{f}(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0.$$

Indication. On pourra utiliser la densité des fonctions en escaliers à support compact dans $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 9. (*Transformation de Fourier et convolution*)

1. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.
2. En déduire que $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution.
3. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Montrer que $\widehat{\varphi_n}$ converge simplement vers 1 quand $n \to \infty$.

Exercice 10. (*Injectivité et inversion de Fourier*)

1. Pour $\sigma > 0$, on définit
$$g_\sigma : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}.$$
En utilisant que $\widehat{g_1}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$ (vu au TD 6), calculer $\widehat{g_\sigma}$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tous $\sigma > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,
$$(g_\sigma * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$
3. (*Injectivité de Fourier*) Montrer que la transformation de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$.
4. (*Formule d'inversion de Fourier*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$
Remarque. L'égalité est vraie partout si et seulement si f est continue.

Exercice 11. (*Espace de Schwartz*) On définit l'*espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,
$$x^n f^{(k)}(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0.$$

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Exprimer $\widehat{f'}$ en fonction de $\hat{f}$.
2. Montrer que la transformation de Fourier est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 12. (*Transformation de Fourier L^2*)

1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} f\hat{g}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g\,\mathrm{d}\lambda.$$
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2.$$
3. Montrer que l'on peut étendre la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ en un automorphisme $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,
$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}f\|_2.$$

Exercice 13. (*Approximations encore*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. À l'aide du théorème de Lusin et du lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telles que $f_n \to f$ λ-p.p. quand $n \to \infty$.
2. À l'aide des résultats précédents du TD, montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telles que $f_n \to f$ λ-p.p. quand $n \to \infty$ et $\|f_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour toute fonction $h \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, les fonctions fh et gh sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et vérifient

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $f = g$ presque partout.

Exercice 15. (★) Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On suppose que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ continue bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Est-ce que l'on a forcément $\mu(A) = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Exercice 16. (★) Trouver un espace topologique X et une mesure μ sur $(X, \mathcal{B}(X))$ de masse totale 1 qui ne soit pas tendue.

Fin