TD 7 – Dualité $L^p - L^q$ et approximations

1 – Espaces L^p et dualité

Exercice 1. (*Séparabilité de $L^p(\Omega)$*) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit $p \in [1, \infty[$.

1. On note $\mathcal{E}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $\Omega \to \mathbb{R}$ qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'indicatrices de pavés bornés inclus dans Ω. Montrer que $\mathcal{E}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
2. Montrer que $L^p(\Omega)$ est séparable (c'est-à-dire qu'il contient une partie dénombrable dense).
3. Est-ce que $L^\infty(\Omega)$ est séparable ?

Corrigé.

1. *Méthode 1 : par les fonctions continues à support compact.* Comme $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, il suffit de montrer que l'on peut approcher $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ dans L^p par des fonctions de $\mathcal{E}(\Omega)$. On considère donc $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, on note $K := \operatorname{supp} f$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $n \geq 1$, on note

$$P_n(x) := \prod_{i=1}^{d} \left[x_i, x_i + \frac{1}{n} \right[,$$

puis $Z_n := \{z \in (1/n)\mathbb{Z}^d : P_n(z) \subset \Omega\}$ et enfin on définit la fonction

$$f_n := \sum_{z \in Z_n} f(z) \mathbb{1}_{P_n(z)}$$

qui appartient bien à $\mathcal{E}(\Omega)$ car Z_n est fini (car K est borné). Montrons que f_n converge simplement vers f. Soit $x \in \Omega$. Pour tout $n \geq 1$, il existe un unique $z_n \in (1/n)\mathbb{Z}^d$ tel que $x \in P_n(z)$. Comme Ω^c est fermé, on a $d_\infty(x, \Omega^c) > 0$ et donc, pour $n > d_\infty(x, \Omega^c)$, on a $P_n(z_n) \subset \Omega$ et ainsi $f_n(x) = f(z_n)$. Or $f(z_n) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ par continuité de f en x, donc $f_n(x) \to f(x)$. En outre, on a la domination

$$|f_n| \leq \|f\|_\infty \mathbb{1}_{K + [0,1]^d} \in L^p(\Omega),$$

donc par convergence dominée (version L^p), on a $f_n \to f$ dans L^p.

Méthode 2 : par les fonctions étagées. Comme l'ensemble des fonctions étagées intégrables sur Ω est dense dans $L^p(\Omega)$, il suffit d'approcher f étagée intégrable par des fonctions en escalier. Comme f est combinaison linéaire d'indicatrices de boréliens de mesure finie, il suffit d'approcher $\mathbb{1}_A$ pour $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ tel que $\lambda(A) < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$A_n := A \cap [-n, n]^d \cap \left\{ x \in \Omega : d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Alors A est l'union croissante des A_n (car Ω est ouvert) et $\lambda(A) = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n)$, donc $\mathbb{1}_{A_n} \to \mathbb{1}_A$ dans L^p. On peut donc se ramener au cas où A est borné et $d(A, \Omega^c) > 0$. Ensuite, par définition de

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

la mesure de Lebesgue, il existe $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de pavés ouverts bornés tels que $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i$ et $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(P_i) \le \lambda(A)+\varepsilon$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda\left(\bigcup_{i=0}^{k} P_i\right) \ge \lambda\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_i\right) - \varepsilon.$$

Quitte à les découper, on peut supposer que les P_i pour $0 \le i \le k$ sont disjoints deux à deux. Puis, quitte à les découper en morceaux de diamètre inférieur à $d(A,\Omega^c)/2$ et à supprimer ceux disjoints de A, on peut supposer que les P_i sont tous inclus dans Ω. On vérifie alors que la fonction

$$\sum_{i=k}^{n} \mathbb{1}_{P_i}$$

approche bien $\mathbb{1}_A$ dans L^p.

2. On définit

$$\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}(\Omega) := \left\{\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{P_i} : n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{Q}, P_i \text{ pavé borné à coordonnées rationnelles}\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}(\Omega)$ est dénombrable et dense dans $\mathcal{E}(\Omega)$ pour la norme $\|-\|_p$ donc dense dans $L^p(\Omega)$ par la question précédente.

3. Non dès que Ω est non vide. Pour le voir, prenons $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$. On considère la famille de fonctions $f_\varepsilon = \mathbb{1}_{B(x,\varepsilon)} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $\varepsilon \in [0,r]$. C'est une famille indénombrable vérifiant

$$\forall \varepsilon,\varepsilon' \in [0,r], \quad \varepsilon \ne \varepsilon' \quad \Rightarrow \quad \|f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}\|_\infty = 1.$$

Cela montre la non-séparabilité de $L^\infty(\Omega)$.

Remarque. Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. On peut vérifier que si E' est séparable, alors E est séparable. Cela montre que $L_1(\Omega) \ne (L^\infty(\Omega))'$.

Exercice 2. (*Séquentielle compacité faible-**) Soit $p \in]1,\infty]$, $q \in [1,\infty[$ son exposant conjugué, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et λ la mesure de Lebesgue. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ (c'est-à-dire que la suite $(\|f_n\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée).

1. Soit D une partie dénombrable dense de $L^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une extractrice $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $h \in D$, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h \,\mathrm{d}\lambda$ existe dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, pour tout $g \in L^q(\Omega)$, $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda$ existe dans $\mathbb{R}$.
3. En déduire qu'il existe $f \in L^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible-** dans $L^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ vers f, c'est-à-dire :

$$\forall g \in L^q(\Omega), \quad \int_\Omega f_{\varphi(n)} g \,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega f g \,\mathrm{d}\lambda.$$

4. Le résultat précédent subsiste-t-il pour $p = 1$?

Corrigé.

1. On utilise un procédé d'extraction diagonale. On commence par numéroter toutes les fonctions de D : $D = \{h_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Considérons h_0. Par Hölder, la suite

$$\left(\int f_n h_0 \,\mathrm{d}\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est bornée par $\|h_0\|_q \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$, donc, comme il s'agit d'une suite de réels, il existe une extractrice ψ_0 telle que $\int f_{\psi_0(n)} h_0 \, d\lambda$ converge.
Ainsi, par récurrence, on construit une suite d'extractrices $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int f_{\psi_1\circ\cdots\circ\psi_k(n)} h_k \, d\lambda \text{ converge quand } n \to \infty.$$

On définit

$$\varphi(n) := \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_n(n).$$

Alors, pour tout $n > k$, il existe $M \geq n$ tel que $\varphi(m) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k(M)$ et donc $\int f_{\varphi(n)} h_k \, d\lambda$ converge quand $n \to \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2. Le plus simple pour montrer que la suite $\int f_{\varphi(n)} g \, d\lambda$ converge est de montrer qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $h \in D$ telle que $\|g-h\|_q < \varepsilon$. Soient $n, m \geq 0$, on a

$$\begin{aligned}&\left|\int f_{\varphi(n)} g \, d\lambda - \int f_{\varphi(m)} g \, d\lambda\right| \\ &\leq \left|\int f_{\varphi(n)}(g-h) \, d\lambda\right| + \left|\int f_{\varphi(m)}(g-h) \, d\lambda\right| + \left|\int f_{\varphi(n)} h \, d\lambda - \int f_{\varphi(m)} h \, d\lambda\right|.\end{aligned}$$

Par Hölder les deux premiers termes sont inférieurs à $(\sup \|f_n\|_p)\varepsilon$ et comme la suite $\int f_{\varphi(n)} h \, d\lambda$ converge (par la question précédente) elle est de Cauchy, donc il existe n_0 tel que si $n, m > n_0$,

$$\left|\int f_{\varphi(n)} g \, d\lambda - \int f_{\varphi(m)} g \, d\lambda\right| < (2 \sup \|f_n\|_p + 1)\varepsilon,$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy.

3. À la question précédente, on a défini une fonction

$$\Phi : g \in L^q \mapsto \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g \, d\lambda \in \mathbb{R}$$

qui est clairement linéaire. En outre, par Hölder, pour tout $g \in L^q$, $\Phi(g) \leq (\sup \|f_n\|_p)\|g\|_q$ donc Φ est une forme linéaire continue sur L^q. Or $q \in [1, \infty[$, donc le dual topologique de L^q est L^p. Ainsi, il existe $f \in L^p$ telle que

$$\forall g \in L^q(\Omega), \quad \Phi(g) = \int_\Omega f g \, d\lambda,$$

ce qui donne le résultat souhaité.

4. Non, le résultat n'est plus vrai pour $p = 1$: prenons la suite de fonction $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ qui est bien bornée dans L^1, et supposons qu'il existe une extractrice φ et une fonction $f \in L^1$ telle que pour toute fonction $g \in L^\infty$, $\lim \int f_{\varphi(n)} g \, d\lambda = \int f g \, d\lambda$. Regardons des fonctions particulières :
   - ▷ la fonction $g = \mathbb{1}_\mathbb{R}$, montre que $\int_\mathbb{R} f \, d\lambda = 1$;
   - ▷ la suite de fonction $g_k = \mathbb{1}_{[k,k+1]}$, montre que $\int_k^{k+1} f \, d\lambda = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   Ces deux résultats sont contradictoires, ce qui conclut la preuve par l'absurde.

Exercice 3. (*Petit contre-exemple*) Soient $E = \{a, b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = \infty$. Caractériser $L^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $L^1(\mu)$. Conclure.

Corrigé. On a $L^\infty = \{f : E \to \mathbb{R}\}$ et $L^1 = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f(b) = 0\}$. Donc le dual topologique de L^1 est $(L^1)' = \{f \in L^1 \mapsto \alpha f(a) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ (on sait qu'il est de dimension 1).
On voit ici que l'application $g \in L^\infty \mapsto \Phi_g \in (L^1)'$ (où $\Phi_g : f \in L^1 \mapsto \int_E f g d\mu$) est surjective mais pas injective. La mesure μ n'est pas σ-finie et le théorème de dualité (avec $p = 1$ et $q = +\infty$) ne s'applique pas dans ce cas.

2 – Approximations et convolution

Rappels du TD 6. Soit $d \geq 1$ et $f, g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, si la fonction $y \mapsto |f(x-y)g(y)|$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, alors on définit la *convolution* de f et de g en x par

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

On a aussi vu que, si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 4. (*Convolution $L^p - L^1$*) Soit $d \geq 1$ et $p > 1$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Corrigé. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. On a, en remarquant que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1 + |a|^p$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p |g(y)|\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)|\,\mathrm{d}y + \|g\|_1 .$$

Pour montrer que cette dernière intégrale est finie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on va l'intégrer par rapport à x :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x-y)|\,\mathrm{d}x |f(y)|^p\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \|g\|_1 \, |f(y)|^p\,\mathrm{d}y = \|g\|_1 \, \|f\|_p^p < \infty.$$

On en déduit que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p |g(x-y)|\,\mathrm{d}y < \infty$$

et donc $f * g$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 5. (*Approximation de Dirac*) Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continues bornées est appelée *approximation de Dirac* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$, et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

1. Montrer que, si $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue bornée et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac, alors $f * \varphi_n \to f$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.
2. (a) Soit $\psi \colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\psi(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Soit F la fonction définie pour λ-p.t. $x \in X$ par $F(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,y)\,\mathrm{d}y$. Montrer que, pour tout $p \in [1, \infty[$,
$$\|F\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\psi(\cdot, y)\|_p \,\mathrm{d}y.$$
Indication. On pourra s'inspirer de la démonstration de l'inégalité de Minkowski.
   (b) Soit $p \in [1, \infty[$. Montrer que, si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac, alors $f * \varphi_n \to f$ dans L^p.
   Indication. On pourra utiliser la continuité de l'opérateur de translation montrée au TD 6 : pour $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $\tau_h f \colon x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x-h)$, on a $\|\tau_h f - f\|_p \to 0$ quand $h \to 0$.
3. Construire une approximation de Dirac $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les φ_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

Corrigé.

1. On sait que $f * \varphi_n$ est défini sur tout $\mathbb{R}^d$ car f est bornée et φ_n est intégrable (voir la question 1. de l'exercice 4 du TD 6).
   Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et $x \in K$. Comme $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n \, \mathrm{d}\lambda = 1$, on a

$$\begin{aligned}
|f * \varphi_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) \varphi_n(y) \, \mathrm{d}y \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| \varphi_n(y) \, \mathrm{d}y \\
&\leq \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)| \varphi_n(y) \, \mathrm{d}y + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y) \, \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

   pour tout $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$. Comme $K + \overline{B}(0,1)$ est compact, f est uniformément continue dessus et donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tous $x, z \in K + \overline{B}(0,1)$ tels que $\|x - z\| \leq \varepsilon$, on ait $|f(z) - f(x)| \leq \eta$. Ainsi pour $x \in K$ et $y \in B(0,\varepsilon)$, on a $|f(x-y) - f(x)| \leq \eta$ et donc

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in K} |f * \varphi_n(x) - f(x)| &\leq \eta \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y) \, \mathrm{d}y + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y) \, \mathrm{d}y \\
&\leq \eta + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y) \, \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

   En utilisant que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac, on obtient

$$\limsup_{n \to \infty} \sup_{x \in K} |f * \varphi_n(x) - f(x)| \leq \eta$$

   et, en faisant tendre η vers 0, on a

$$\limsup_{n \to \infty} \sup_{x \in K} |f * \varphi_n(x) - f(x)| = 0,$$

   ce qui veut exactement dire que $f * \varphi_n \to f$ uniformément sur K.

2. (a) On note $F_n := (|F| \wedge n) \mathbb{1}_{[-n,n]^d}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)^p \, \mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)^{p-1} |F(x)| \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)^{p-1} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(x,y)| \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)^{p-1} |\varphi(x,y)| \, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \qquad \text{(Fubini-Tonnelli)} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)^p \, \mathrm{d}x \right)^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi(\cdot,y)\|_{L^p(\mu)} \, \mathrm{d}y \qquad \text{(Hölder).}
\end{aligned}$$

   Or $\int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)^p \, \mathrm{d}x < \infty$. On en déduit que (on voit ici l'intérêt d'introduire F_n, sinon on n'aurait pas pu diviser par une quantitié pouvant être infinie) :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\varphi(\cdot,y)\|_{L^p(\mu)} \, \mathrm{d}y.$$

   Mais la suite de fonctions $(F_n^p)_{n \geq 1}$ est croissante et tend λ-p.p. vers $|F|^p$. D'après le théorème de convergence monotone, il vient :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^d} \|\varphi(\cdot,y)\|_{L^p(\mu)} \, \mathrm{d}y.$$

(b) Remarquons tout d'abord que $f * \varphi_n$ est définie presque partout sur $\mathbb{R}^d$ par l'exercice 4. On applique ensuite l'inégalité de la question 2.(a) à $\psi(x,y) := (f(x-y) - f(x))\varphi_n(y)$ qui est bien intégrable en y pour λ-p.t. $x \in \mathbb{R}^d$ (toujours par l'exercice 4). En outre, on a $F = f * \varphi_n - f$, et on obtient

$$\|f * \varphi_n - f\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |(f(x-y) - f(x))\varphi_n(y)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \mathrm{d}y$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\tau_y f(x) - f(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p} \varphi_n(y) \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \|\tau_y f - f\|_p \varphi_n(y) \,\mathrm{d}y$$

où τ_y est l'opérateur de translation. Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * \varphi_n - f|^p \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} (\|\tau_y f\|_p + \|f\|_p)\varphi_n(y) \,\mathrm{d}y + \sup_{h \in B(0,\varepsilon)} \|\tau_h f - f\|_p \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y) \,\mathrm{d}y$$
$$\leq 2\|f\|_p \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n(y) \,\mathrm{d}y + \sup_{h \in B(0,\varepsilon)} \|\tau_h f - f\|_p \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0,$$

en utilisant que $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac et la continuité en 0 de l'opérateur de translation.

3. On construit d'abord $\varphi \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \,\mathrm{d}\lambda = 1$. On pose

$$\theta \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-1/x^2} \mathbb{1}_{x>0},$$

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$, car toutes les dérivées à droite en 0 sont nulles. On pose alors $\psi \colon x \in \mathbb{R} \mapsto \theta(1-x)\theta(1+x)$ qui est non nulle, positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et de support $[-1,1]$ compact. On pose alors $\Phi \colon x \in \mathbb{R}^d \mapsto \psi(x_1^2 + \cdots + x_d^2)$ qui est positive $\mathcal{C}^\infty$ à support compact $\overline{B}(0,1)$ et d'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ finie et strictement positive. Enfin, on pose

$$\varphi := \frac{\Phi}{\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x) \,\mathrm{d}x},$$

qui vérifie les propriétés souhaitées.

Ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Alors φ_n est positive de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact $\overline{B}(0, 1/n)$ et d'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_n(x) \,\mathrm{d}x = 1$. Enfin, pour $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)} \varphi_n \,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

dès que $n \geq \varepsilon^{-1}$. Ainsi, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de Dirac telle que les φ_n soient de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact.

Remarque. Il est intéressant d'avoir une approximation de Dirac de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact pour avoir le plus de régularité possible après convolution par φ_n. Il est aussi parfois pratique de considérer une approximation de Dirac spécifiquement construite par "scaling" d'une seule fonction comme fait ici ($\varphi_n(x) := n\varphi(nx)$).

Exercice 6. (*Approximation $\mathcal{C}_c^\infty$ dans L^p*) Montrer que pour tout $p \in [1, \infty[$, l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Corrigé. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Par convergence dominée, on a $\mathbb{1}_{[-k,k]^d} f \to f$ dans L^p quand $k \to \infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - \mathbb{1}_{[-k,k]^d} f\|_p \leq \varepsilon/2$. On pose $K := [-k,k]^d$.

Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'approximation de Dirac construite dans la question 3. de l'exercice 5. Comme $\mathbb{1}_K f \in L^1_{\mathrm{loc}}$ et les φ_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, on sait par l'exercice 4 du TD 6 que $(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n$ est défini partout et est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Montrons que $(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n$ est à support compact. On pose $K_n := \mathrm{supp}\varphi_n$ qui est compact. On a

$$(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_K(x-y) f(x-y)\varphi_n(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_n(y)\mathbb{1}_{(x-K)\cap K_n}(y)\,\mathrm{d}y$$

On remarque alors que

$$(x-K)\cap K_n \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists k \in K, \exists k' \in K_n : x-k = k' \Leftrightarrow x \in K + K_n$$

et donc $\mathrm{supp}((\mathbb{1}_K f) * \varphi_n) \subset K + K_n$ qui est compact. Donc $(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Enfin, comme $\mathbb{1}_K f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, par la question 2. de l'exercice 5, on obtient que $(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n \to \mathbb{1}_K f$ dans L^p. Donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n - \mathbb{1}_K f\| \leq \varepsilon/2$, et ainsi $\|(\mathbb{1}_K f) * \varphi_n - f\| \leq \varepsilon$: on a approché f dans L^p par une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.
Remarque. Cela ne constitue pas une nouvelle preuve du fait que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $p \in [1, \infty[$, car, si l'on remonte les exercices jusqu'au TD 6, on voit que l'on a utilisé ce résultat pour montrer la continuité de l'opérateur de translation.

Exercice 7. (*Approximation $\mathcal{C}_c^\infty$ de fonctions plateau*) Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset U$. Montrer qu'il existe f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $\mathbb{1}_K \leq f \leq \mathbb{1}_U$.

Corrigé. Puisque K est un compact, $d(K, U^c) = c > 0$. Soit ϕ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support inclus dans $[-c/3, c/3]^d$ et d'intégrale 1 (voir la question 3 de l'exercice 5 pour la construction d'une telle fonction), alors on peut prendre

$$f := \mathbb{1}_{K+[-c/3,c/3]^d} * \phi.$$

En effet, l'écriture

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K+[-c/3,c/3]^d}(x-u)\phi(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[-c/3,c/3]^d} \mathbb{1}_{K+[-c/3,c/3]^d}(x-u)\phi(u)\,\mathrm{d}u$$

montre aisément que $f(x) = 1$ si $x \in K$ et $f(x) = 0$ si $x \in U^c$. En outre, il est clair que f est à valeurs dans $[0,1]$ et, par la question 2 de l'exercice 3 du TD 6, on voit également que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (car $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$).

3 – Compléments (hors TD)

Rappels du TD 6. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

et c'est une fonction continue bornée.

Exercice 8. (*Lemme de Riemann-Lebesgue*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\hat{f}(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0.$$

Indication. On pourra utiliser la densité des fonctions en escaliers à support compact dans $L^1(\mathbb{R})$.

Corrigé. Soit $\varepsilon > 0$. Soit g une fonction en escalier à support compact telle que $\|f-g\|_1 \leq \varepsilon$. Quitte à modifier les bornes des intervalles (ce qui ne change pas $\|f-g\|_1$), on peut supposer que g est de la forme

$$g = \sum_{k=1}^{n} c_i \mathbb{1}_{[a_i, b_i[},$$

avec $n \geq 1$, $c_i \in \mathbb{R}$ et $a_i < b_i$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} c_i \int_{a_i}^{b_i} \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} c_i \frac{\mathrm{e}^{-i\xi a_i} - \mathrm{e}^{-i\xi b_i}}{i\xi} \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, on a

$$\limsup_{|\xi|\to\infty} \left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \limsup_{|\xi|\to\infty} \left(|\hat{g}(\xi)| + \left|\widehat{f-g}(\xi)\right|\right) \leq 0 + \|f-g\|_1 \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat souhaité.

Exercice 9. (*Transformation de Fourier et convolution*)

1. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.
2. En déduire que $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour la convolution.
3. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac. Montrer que $\widehat{\varphi_n}$ converge simplement vers 1 quand $n \to \infty$.

Corrigé.

1. Par définition on a

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-i(x-y)\xi} \mathrm{e}^{-iy\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y.$$

   Puisque $\int\int |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty$, le théorème de Fubini s'applique et le changement de variable $x - y = z$ donne le résultat escompté.
2. Si $e \in L^1$ est un élément neutre pour la convolution alors pour tous $f \in L^1$ et $\xi \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\xi)\hat{e}(\xi) = \widehat{f * e}(\xi) = \hat{f}(\xi).$$

   Or, par le TD 3, il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f}(\xi) > 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ (en prenant la gaussienne). On en déduit donc que $\hat{e}(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Cela contredit le lemme de Riemann-Lebesgue (exercice 8).
3. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)(\mathrm{e}^{-i\xi x} - 1)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\left|\mathrm{e}^{-i\xi x} - 1\right|\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_n(x)|\xi|\varepsilon\,\mathrm{d}x + \int_{B(0,\varepsilon)^c} \varphi_n(x)2\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

   pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\widehat{\varphi_n}(\xi) - 1\right| \leq |\xi|\varepsilon,$$

   ce qui conclut avec $\varepsilon \to 0$.

Exercice 10. (*Injectivité et inversion de Fourier*)

1. Pour $\sigma > 0$, on définit

$$g_\sigma : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}.$$

   En utilisant que $\widehat{g_1}(\xi) = \mathrm{e}^{-\xi^2/2}$ (vu au TD 6), calculer $\widehat{g_\sigma}$.

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tous $\sigma > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(g_\sigma * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

3. (*Injectivité de Fourier*) Montrer que la transformation de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$.
4. (*Formule d'inversion de Fourier*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Remarque. L'égalité est vraie partout si et seulement si f est continue.

Corrigé.

1. Pour $\sigma > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{g_\sigma}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-i\xi\sigma y}\,\mathrm{d}y = \widehat{g_1}(\sigma\xi) = \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{1/\sigma}(\xi),$$

avec le changement de variable $y = x/\sigma$.

2. Pour $\sigma > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant la question 1.,

$$\begin{aligned}
(g_\sigma * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2\sigma^2} f(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \widehat{g_{1/\sigma}}(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-iy\xi}\,\mathrm{d}\xi \right) f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y) \mathrm{e}^{-i(x-y)(-\xi)}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\xi) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini-Lebesgue, car on a bien $\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-iy\xi} f(x-y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}\,\mathrm{d}\xi < \infty$.

3. Soit $f, h \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $\hat{f} = \hat{h}$. Alors, par la question 2., pour tout $\sigma > 0$, on a $g_\sigma * f = g_\sigma * h$. Or, il est aisé de vérifier que $(g_\sigma)_{\sigma>0}$ est une approximation de Dirac (quand $\sigma \to 0$). Comme $f \in L^1$, on a $g_\sigma * f \to f$ dans L^1 quand $\sigma \to 0$, par l'exercice 5 du TD 7. De même, $g_\sigma * f = g_\sigma * h \to h$ dans L^1 et donc $f = h$ dans L^1.

4. Par la question 2. de nouveau, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(g_\sigma * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

par convergence dominée (la convergence λ-p.p. est claire et on domine par $|\hat{f}| \in L^1$). Ainsi, $g_\sigma * f$ converge vers f dans L^1 et vers $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ simplement donc les deux limites coïncident presque partout (cf petite question 3. du TD 4).

On peut écrire cela sous la forme plus synthétique : pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x)$.

Exercice 11. (*Espace de Schwartz*) On définit l'*espace de Schwartz* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$x^n f^{(k)}(x) \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0.$$

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Exprimer $\widehat{f'}$ en fonction de $\hat{f}$.
2. Montrer que la transformation de Fourier est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Corrigé.

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Comme $f' \in L^1$, on a, par convergence dominée (domination par $|f'|$),

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(\xi) &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-i\xi x} f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left[\mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\right]_{-n}^{n} + \int_{-n}^{n} i\xi \mathrm{e}^{-i\xi x} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-i\xi n} f(n) - \mathrm{e}^{i\xi n} f(-n) + i\xi \hat{f}(\xi).\end{aligned}$$

Montrons à présent que $f(n) \to 0$ quand $n \to \infty$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y)\,\mathrm{d}y \xrightarrow[x\to\infty]{} \int_0^\infty f'(y)\,\mathrm{d}y,$$

donc f admet une limite en $+\infty$. Mais si cette limite est non nulle, cela contredit l'intégrabilité de f donc cette limite est 0. Ainsi, $f(n) \to 0$ et de même $f(-n) \to 0$. En revenant au premier calcul, on obtient $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$.

2. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrons que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Montrons par récurrence que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On considère l'hypothèse de récurrence

$$\mathcal{H}_k : \hat{f} \text{ est } k \text{ fois dérivable et } \hat{f}^{(k)} = (-i)^k \widehat{x^k f},$$

où $\widehat{x^k f}$ est la transformée de Fourier de $x \mapsto x^k f(x)$. L'hypothèse $\mathcal{H}_0$ est clairement vraie. Supposons $\mathcal{H}_k$ vraie. Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $x \mapsto x \cdot x^k f(x)$ est intégrable et donc par la question 2. de l'exercice **??**, $\widehat{x^k f}$ est dérivable donc $\hat{f}$ est $k+1$ fois dérivable et

$$\hat{f}^{(k+1)} = (-i)^k \widehat{x^k f}' = (-i)^{k+1} \widehat{x^{k+1} f},$$

donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.
Montrons à présent que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\hat{f}^{(k)}$ décroît plus que polynomialement en l'infini. Par ce qui précède, il suffit de le montrer pour $\widehat{g_k}$ où $g_k \colon x \mapsto x^k f(x)$. Il est clair que $g_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car toutes ses dérivées sont une somme de produits entre un polynome et une dérivée de f. En particulier toutes ses dérivées sont dans L^1, donc en itérant la question précédente, on a, pour tous $n \geq 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{g_k^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \widehat{g_k}(\xi).$$

Comme la transformée de Fourier d'une fonction L^1 est bornée, on en déduit que pour tout $n \geq 0$,

$$\xi \mapsto |\xi|^n \widehat{g_k}(\xi) \text{ est bornée.}$$

Mais, en l'appliquant à $n+1$, cela nous donne

$$|\xi|^n \widehat{g_k}(\xi) \xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\widehat{g_k}$ et donc $\hat{f}^{(k)}$ décroissent plus que polynomialement en l'infini. Cela montre que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La transformation de Fourier définit bien une application $\widehat{\cdot} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
Il est clair que $\widehat{\cdot}$ est linéaire. En outre, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, on a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, donc, par la formule d'inversion de Fourier, on a $f(x) = ((\widehat{\cdot})^2 f)(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $(\widehat{\cdot})^4 = \mathrm{id}$ et donc $\widehat{\cdot}$ est inversible : c'est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 12. (*Transformation de Fourier L^2*)

1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} f\hat{g}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g\,\mathrm{d}\lambda.$$
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que
$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2.$$
3. Montrer que l'on peut étendre la transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ en un automorphisme $\mathcal{F} \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,
$$\|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{F}f\|_2.$$

Corrigé.

1. On a, en appliquant le théorème de Fubini-Lebesgue à $(x,\xi) \mapsto f(\xi)g(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}$ qui est intégrable pour $\lambda \otimes \lambda$,
$$\int_{\mathbb{R}} f\hat{g}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} g(x)\left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \hat{f} g\,\mathrm{d}\lambda.$$
2. On applique la question précédente à $g = \bar{\hat{f}}$. Ainsi, on obtient
$$\|\hat{f}\|_2 = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}\bar{\hat{f}}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f\hat{\bar{\hat{f}}}\,\mathrm{d}\lambda.$$
Or, pour $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\hat{\bar{\hat{f}}}(x) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\hat{f}}(\xi)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \overline{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi} = \overline{2\pi f(x)},$$
presque partout, d'après la formule d'inversion de Fourier. On a donc $\|\hat{f}\|_2 = 2\pi\int_{\mathbb{R}} f\bar{f}\,\mathrm{d}\lambda = 2\pi\|f\|_2$.
3. On remarque tout d'abord que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ car $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ l'est (cf exercice 6 du TD 7) et est inclus dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Alors, pour $n, m \in \mathbb{N}$, on a $f_n - f_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ et donc $\widehat{f_n - f_m} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ (par la question 2. de l'exercice 11) et ainsi, par la question précédente, on a
$$\|\widehat{f_n} - \widehat{f_m}\|_2 = \|\widehat{f_n - f_m}\|_2 = 2\pi\|f_n - f_m\|_2.$$
Donc la suite $(\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ donc converge dans L^2 (par complétude) vers une limite $h \in L^2(\mathbb{R})$.
Vérifions que cette fonction h ne dépend pas de la suite choisie pour approcher f. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $g_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. On a, en appliquant la question précédente à $g_n - f_n$,
$$\|\widehat{g_n} - h\|_2 \le \|\widehat{g_n} - \widehat{f_n}\|_2 + \|\widehat{f_n} - h\|_2 = \|\widehat{g_n - f_n}\|_2 + \|\widehat{f_n} - h\|_2 = 2\pi\|g_n - f_n\|_2 + \|\widehat{f_n} - h\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
Donc $(\widehat{g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi dans L^2 vers $h \in L^2(\mathbb{R})$. On peut donc poser $\mathcal{F}f := h$ et cela définit une application $\mathcal{F} \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$.
La linéarité de $\mathcal{F}$ est immédiate et on constate aussi que
$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \lim_{n\to\infty}\|\widehat{f_n}\|_2 = \lim_{n\to\infty} 2\pi\|f_n\|_2 = 2\pi\|f\|_2.$$
Montrons que $\mathcal{F}$ est un automorphisme. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\mathbb{R})$, on a, par définition $\widehat{f_n} \to \mathcal{F}f$ dans $L^2(\mathbb{R})$. Or $\widehat{f_n} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc
$$\widehat{\widehat{f_n}} \to \mathcal{F}\mathcal{F}f,$$

toujours par définition de $\mathcal{F}$. En itérant ce procédé, on obtient $(\widehat{\cdot})^4 f_n \to \mathcal{F}^4 f$, mais on a vu dans l'exercice 11 que $(\widehat{\cdot})^4 = \mathrm{id}$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (conséquence de la formule d'inversion de Fourier). Par unicité de la limite dans L^2, on obtient $\mathcal{F}^4 f = f$ presque partout. Ainsi, $\mathcal{F}^4 = \mathrm{id}$ et $\mathcal{F}$ est inversible.

Enfin, si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, vérifions que $\mathcal{F} f = \hat{f}$. On a vu dans l'exercice 6 du TD 7 que, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de Dirac de classe C^∞ à support compact, il existe $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $f_n := (f\mathbb{1}_{K_n}) * \varphi_n \to f$ dans L^2 et $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors par défnition, on a $\widehat{f_n} \to \mathcal{F} f$ dans L^2. D'autre part, on a

$$\widehat{f_n}(\xi) = \widehat{f\mathbb{1}_{K_n}}(\xi)\widehat{\varphi_n}(\xi),$$

par l'exercice 9. On a, par convergence dominée (domination par $|f| \in L^1$),

$$\widehat{f\mathbb{1}_{K_n}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{K_n}(x) f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \hat{f}(\xi).$$

En outre, on sait par l'exercice 9, que $\widehat{\varphi_n}(\xi) \to 1$ donc on obtient que $\widehat{f_n}$ converge simplement vers $\hat{f}$. Ainsi $\mathcal{F} = \hat{f}$ presque partout (cf petite question 3. du TD 4).

Exercice 13. (*Approximations encore*) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

1. À l'aide du théorème de Lusin et du lemme de Borel-Cantelli, montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telles que $f_n \to f$ λ-p.p. quand $n \to \infty$.
2. À l'aide des résultats précédents du TD, montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}^d$ telles que $f_n \to f$ λ-p.p. quand $n \to \infty$ et $\|f_n\|_\infty \le \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme f est intégrable, il existe K_n un compact de $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\int_{K_n^c} |f|\,\mathrm{d}\lambda \le \frac{1}{2^n}.$$

D'autre part, K_n est de mesure finie et $f\mathbb{1}_{K_n}$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$ nulle en dehors de K_n. Donc, d'après le théorème de Lusin, il existe $f_n \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue à support compact telle que

$$\lambda(\{f_n \neq f\mathbb{1}_{K_n}\}) \le \frac{1}{2^n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\lambda(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le \lambda(\{|f_n - f\mathbb{1}_{K_n}| + |f\mathbb{1}_{K_n} - f| > \varepsilon\}) \le \lambda(\{f_n \neq f\mathbb{1}_{K_n}\}) + \lambda(\{|f\mathbb{1}_{K_n} - f| > \varepsilon\}).$$

Or par l'inégalité de Markov, on a

$$\lambda(\{|f\mathbb{1}_{K_n} - f| > \varepsilon\}) = \lambda(\{|f|\mathbb{1}_{K_n^c} > \varepsilon\}) \le \frac{\int_{K_n^c} |f|\,\mathrm{d}\lambda}{\varepsilon} \le \frac{1}{\varepsilon 2^n}.$$

On a donc montré que

$$\lambda(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \le \frac{1}{2^n} + \frac{1}{\varepsilon 2^n},$$

qui est une suite sommable en n. Donc, par le lemme de Borel-Cantelli,

$$\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} \{|f_n - f| > \varepsilon\}\right) = 0,$$

c'est-à-dire,
$$\lambda\left(\left\{\limsup_{n\to\infty}|f_n-f|>\varepsilon\right\}\right)=0.$$
Enfin, on en déduit que
$$\lambda\left(\left\{\limsup_{n\to\infty}|f_n-f|>0\right\}\right)=\lambda\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\limsup_{n\to\infty}|f_n-f|>\frac{1}{k}\right\}\right)\le\sum_{k\in\mathbb{N}}\lambda\left(\left\{\limsup_{n\to\infty}|f_n-f|>\frac{1}{k}\right\}\right)=0,$$
c'est-à-dire $f_n\to f$ λ-p.p.

2. On a montré que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ à l'exercice 6. Il existe donc une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n\to f$ dans L^1. Elle admet donc une sous-suite convergeant λ-p.p. vers f d'après la petite question 2 du TD 4.
Pour avoir la borne $\|f_n\|_\infty\le\|f\|_\infty$, on utilise que, toujours par l'exercice 6, on peut prendre f_n de la forme $f_n=(f\mathbb{1}_{K_n}*\varphi_n)$ avec K_n compact et φ_n positive d'intégrale 1. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, on a
$$|f_n(x)|\le\int_{\mathbb{R}^d}\|f\|_\infty\,\varphi(y)\,\mathrm{d}y=\|f\|_\infty$$
c'est-à-dire $\|f_n\|_\infty\le\|f\|_\infty$.

Exercice 14. Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour toute fonction $h\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, les fonctions fh et gh sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et vérifient
$$\int_{\mathbb{R}}f(x)h(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}g(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que $f=g$ presque partout.

Corrigé. Pour tout choix de $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{]a,b[}$ est dans $L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\lambda)$. Donc (par l'exercice 6), il existe une suite $(h_n)_{n\ge1}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que $h_n\to\mathbb{1}_{]a,b[}$ λ-p.p. lorsque $n\to\infty$. Avec notre hypothèse et la convergence dominée, cela implique que
$$\int f\mathbb{1}_{]a,b[}\,\mathrm{d}\lambda=\int g\mathbb{1}_{]a,b[}\,\mathrm{d}\lambda.$$
Donc on conclut par l'exercice 3 du TD 3.

Exercice 15. (✩) Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. On suppose que, pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ continue bornée,
$$\int_{\mathbb{R}}f(x)\mu(\mathrm{d}x)=\int_{\mathbb{R}}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
Est-ce que l'on a forcément $\mu(A)=\int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Corrigé. Montrons que c'est vrai si la mesure μ est finie sur tous les compacts (ce qui revient à dire que g est localement intégrable). Soit $a<b$ deux réels. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction affine par morceaux sur $\mathbb{R}$ interpolant $(a-n^{-1},0)$, $(a,1)$, $(b,1)$ et $(b+n^{-1},0)$. Comme f_n est continue bornée, on a
$$\int f_n(x)\mu(\mathrm{d}x)=\int f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$
En outre, f_n converge simplement vers $\mathbb{1}_{[a,b]}$ quand $n\to\infty$ et est dominée par $\mathbb{1}_{[a-1,b+1]}$ qui est intégrable pour μ et pour $g\cdot\lambda$, donc en passant à limite dans l'égalité précédente grâce au théorème de convergence dominée, on obtient
$$\mu([a,b])=g\cdot\lambda([a,b]).$$

Ainsi, μ et $g \cdot \lambda$ coïncident sur $\mathcal{C}$ la famille des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et est stable par intersection finie. En outre, on a $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$, où $[-n, n] \in \mathcal{C}$ et $\mu([-n, n]) < \infty$. Donc, par le théorème d'unicité pour les mesures σ-finies, on a $\mu = g \cdot \lambda$.
En revanche, si on ne fait aucune hypothèse sur μ, le résultat tombe en défaut, comme le montre le contre-exemple suivant (dû à Omar Mohsen). On commence par construire une fonction positive mesurable g d'intégrale infinie (pour la mesure de Lebesgue) sur tout intervalle ouvert. Soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une énumération des rationnels, et considérons la fonction mesurable

$$h(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{x - r_n}} \mathbb{1}_{0 < x - r_n < 1}.$$

Posons $g = h^2$. On vérifie que h est intégrable, ce qui implique $h < \infty$ p.p. et donc $g < \infty$ p.p. En revanche, on vérifie que pour tous $a < b$:

$$\int_{]a,b[} g(x)\,\mathrm{d}x = \infty.$$

Soit alors μ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$, de sorte que pour tous $a < b$:

$$\infty = \mu(]a, b[) = \int_{]a,b[} g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Maintenant, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue bornée, écrivons f comme limite croissante de fonctions en escalier :

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n2^n}^{n2^n} \inf_{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[} f \cdot \mathbb{1}_{]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}.$$

Le théorème de convergence monotone et (1) fournissent

$$\int f(x)\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x) g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cependant, on a

$$1 = \mu(\{0\}) \neq \int_{\{0\}} g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

donc il n'est pas vrai que $\mu(A) = \int_A g(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 16. (✵) Trouver un espace topologique X et une mesure μ sur $(X, \mathcal{B}(X))$ de masse totale 1 qui ne soit pas tendue.

Corrigé. Soit X un ensemble non dénombrable, qu'on munit de la topologie co-dénombrable τ_x (les ouverts sont $\varnothing$ et les sous-ensembles $B \subset X$ pour lesquels B^c est dénombrable). La tribu borélienne de X est alors constituée par les éléments B tels que B ou B^c soit dénombrable (en effet, on vérifie aisément que ces éléments forment une tribu).
Remarquons tout de suite que si $B \subset X$ est infini, alors B n'est pas compact. En effet, soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de B, posons $A := \{a_1, a_2, \ldots\}$ et $B_n := A^c \cup \{a_1, \ldots, a_n\}$. Alors $\cup_{n\geq 1} B_n$ est un recouvrement ouvert de B duquel on ne peut pas extraire un recouvrement fini.
Soit μ la mesure définie sur (X, τ_X) par :

$$\mu(B) = \begin{cases} 0 & \text{si } B \text{ est dénombrable} \\ 1 & \text{si } B^c \text{ est dénombrable.} \end{cases}$$

Vérifions que μ est une mesure. À cet effet, considérons une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de sous-ensembles disjoints de X et posons $B := \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Si tous les B_n sont dénombrables, $\mu(B_n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et $\mu(B) =$

0, donc on a bien $\mu(B) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n)$. Si un des B_n est de complémentaire dénombrable, tous les autres sont dénombrables car ils sont disjoints (s'en convaincre). Dans ce cas, on a bien aussi $\mu(B) = \sum_{n\geq 1} \mu(B_n)$.
Il est clair en revanche que μ n'est pas tendue car d'après ce qu'on a vu précédemment les compacts ont mesure nulle.

Fin