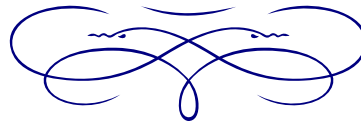




TD 6 – Absolue continuité et intégrales à paramètres



1 – Théorème de Radon-Nikodym et absolue continuité

Exercice 1. (*Contre-exemple*) Soit μ la mesure de comptage sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à μ .
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\frac{d\lambda}{d\mu} = f$. Conclure.



Exercice 2. (*Quantification de l'absolue continuité*) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Considérons μ et ν des mesures sur $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \eta \Rightarrow \nu(A) \leq \varepsilon.$$

Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ .

2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.

Indication. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Borel-Cantelli.

3. Que se passe-t-il si ν est infinie ?

2 – Convolution

Exercice 3. (*Convolution et régularité*) Soit $d \geq 1$ et $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, si la fonction $y \mapsto |f(x-y)g(y)|$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, alors on note

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy,$$

qui est appelée la *convolution* de f et de g en x .

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. Montrer que $f * \varphi$ est définie partout et est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$.
2. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, c'est-à-dire une fonction mesurable de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur tout compact. Soit $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ à support compact. Montrer que $f * \varphi$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial_p(f * \varphi) = f * \partial_p \varphi,$$

où, pour $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $|p| = p_1 + \dots + p_d$ et

$$\partial_p := \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_d^{p_d}}.$$



Exercice 4. (Convolution de fonctions L^1)

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)^2 &\longrightarrow L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) \\ (f, g) &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

est bien définie et montrer que, pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g \, d\lambda.$$

2. Montrer que le produit de convolution munit $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ d'une structure de $\mathbb{R}$ -algèbre associative et commutative.
3. Montrer que $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ n'est pas une algèbre unitaire.
Indication. On pourra considérer la fonction indicatrice d'un pavé.

3 – Opérateur de translation

Exercice 5. (Continuité de l'opérateur de translation) Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et $f : (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f : x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x - h)$.

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
2. On suppose $p < \infty$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.
 - (a) Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.
 - (b) Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 2^{1/p} \|f\|_p$ quand $|h| \rightarrow \infty$.*Indication.* On pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.
3. Que deviennent les résultats de la question 2. si $p = \infty$?
4. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lambda(A) > 0$. Montrer que $A - A := \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. (Transformation de Fourier) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. (Transformée de Fourier d'une gaussienne) On considère la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

- (a) Montrer que $\xi \hat{f}(\xi) + \hat{f}'(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
- (b) Calculer $\hat{f}$.

Exercice 7. (*Le retour du diable*) Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ l'escalier du diable défini dans l'exercice 7 du TD 3. On note df la mesure de Stieljes associée à f , qui est une mesure sur $[0, 1]$ (voir l'exercice 2 du DM 2, on prolonge f par 0 sur $] -\infty, 0[$ et par 1 sur $]1, \infty[$ pour se ramener à une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses souhaitées).

1. Montrer que df est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. La mesure df a-t-elle des atomes ?



Exercice 8. (*Fonctions à variation finie*) Soit une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (a) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
 - (b) Il existe une mesure signée μ sur $[a, b]$ telle que $f(x) = \mu([a, x])$ pour tout $x \in [a, b]$.
 - (c) f est continue à droite et à *variation finie*, c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante

$$\sup_{n \geq 2, a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$

Indication. On pourra utiliser l'existence de la mesure de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).

2. Donner un exemple de fonction continue de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.



Exercice 9. Soit $f: (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour $x \geq 0$,

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2} dt.$$

2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \rightarrow \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.



Exercice 10. (*L'espace des mesures complexes*) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On note $\mathcal{M}$ l'espace des mesures complexes sur $(E, \mathcal{A})$. Pour $\mu \in \mathcal{M}$, on pose

$$\|\mu\| := |\mu|(E),$$

où $|\mu|$ est la variation totale de μ . Montrer que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.



Fin