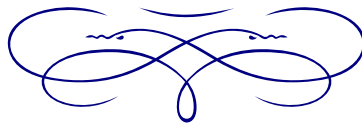


TD 6 – Absolue continuité et intégrales à paramètres



1 – Théorème de Radon-Nikodym et absolue continuité

Exercice 1. (Contre-exemple) Soit μ la mesure de comptage sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à μ .
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\frac{d\lambda}{d\mu} = f$. Conclure.

Corrigé.

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $\mu(A) = 0$. Alors $A = \emptyset$ et donc $\lambda(A) = 0$.
2. Supposons qu'il existe une telle fonction f . Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x\}} f \, d\mu = f(x).$$

Ainsi $f = 0$ puis $\lambda = 0$. Contradiction. La mesure μ n'est pas σ -finie et le théorème de Radon-Nikodym ne s'applique pas.

Exercice 2. (Quantification de l'absolue continuité) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Considérons μ et ν des mesures sur $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \eta \Rightarrow \nu(A) \leq \varepsilon.$$

Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ .

2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie.
Indication. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le lemme de Borel-Cantelli.
3. Que se passe-t-il si ν est infinie ?

Corrigé.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\nu(A) \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\nu(A) = 0$.
2. On suppose que l'assertion n'est pas vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Notons $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$ pour tout $n \geq 1$ et $B = \bigcap_{n \geq 1} B_n$. Alors d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a $\mu(B) = 0$, puis $\nu(B) = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $\nu(B_n) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon$. Et la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. La mesure ν étant finie, on en déduit que

$$\nu(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B_n) \geq \varepsilon,$$

ce qui est contradictoire.

Attention. On ne peut pas dire que μ a une densité par rapport à ν : ν est finie mais μ n'est pas nécessairement σ -finie, donc on ne peut pas utiliser le théorème de Radon-Nikodym.

3. Lorsque ν est infinie, cela n'est plus forcément vrai, même si μ et ν sont σ -finies. Par exemple, en prenant μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et ν la mesure absolument continue par rapport à μ de densité $x \mapsto e^x$. Alors, pour tout $\eta > 0$, on a $\mu([x, x + \eta]) = \eta$ et

$$\nu([x, x + \eta]) = \int_x^{x+\eta} e^x dx = e^{x+\eta} - e^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty,$$

ce qui montre que la quantification de l'absolue continuité est fautive dans ce cas.

2 – Convolution

Exercice 3. (Convolution et régularité) Soit $d \geq 1$ et $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, si la fonction $y \mapsto |f(x - y)g(y)|$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, alors on note

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy,$$

qui est appelée la *convolution* de f et de g en x .

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ et $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. Montrer que $f * \varphi$ est définie partout et est continue bornée sur $\mathbb{R}^d$.
2. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, c'est-à-dire une fonction mesurable de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur tout compact. Soit $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. Montrer que $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ et que, pour tout $p \in \mathbb{N}^d$,

$$\partial_p(f * \varphi) = f * \partial_p \varphi,$$

où, pour $p = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $|p| = p_1 + \dots + p_d$ et

$$\partial_p := \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_d^{p_d}}.$$

Corrigé. Commençons par montrer les théorèmes sur les intégrales à paramètre.

Théorème de continuité. Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et soit (Y, d) un espace métrique. Soit $f: E \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ et $y_0 \in Y$. Supposons que

- ▷ Pour tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est mesurable.
- ▷ Pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est continue en y_0 .
- ▷ Il existe $g: E \rightarrow [0, \infty]$ intégrable telle que

$$\forall y \in Y, \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \quad |f(x, y)| \leq |g(x)|.$$

Alors $F(y) := \int_E f(x, y) d\mu(x)$ est bien définie pour tout $y \in Y$ et F est continue en y_0 .

Démonstration. F est bien définie par le 1^{er} et le 3^e points qui garantissent que pour tout $y \in Y$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable. Soit $(z_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ telle que $z_n \rightarrow y_0$. On a $f(x, z_n) \rightarrow f(x, y_0)$ pour μ -presque tout $x \in E$ par le 2^e point et une domination par g par le 3^e point, donc par convergence dominée on a $F(z_n) \rightarrow F(y_0)$, ce qui montre la continuité de F en y_0 . $\square$

Passons au théorème de dérivation. La version donnée sur la feuille est en fait délicate à démontrer donc on va d'abord voir une version plus facile. La différence se situe dans l'ordre du "pour tout" et du "pour presque tout" dans le 3^e point.

Théorème de dérivation (facile). Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f: E \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que

- ▷ Pour tout $y \in I$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable.

- ▷ Pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur I et on note $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sa dérivée.
- ▷ Il existe $g: E \rightarrow [0, \infty]$ intégrable telle que

$$\text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \quad \forall y \in I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq |g(x)|.$$

Alors $F(y) := \int_E f(x, y) d\mu(x)$ est bien définie pour tout $y \in I$ et F est dérivable sur I de dérivée $F'(y) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x)$.

Démonstration. F est bien définie par le 1^{er} point. Soit $y \in I$ et $h_n \rightarrow 0$ telle que $y + h_n \in I$. On a

$$\frac{F(y + h_n) - F(y)}{h_n} = \int_E \frac{f(x, y + h_n) - f(x, y)}{h_n} d\mu(x).$$

Pour μ -presque tout $x \in E$ (tel que le 2^e point soit vérifié), on a $(f(x, y + h_n) - f(x, y))/h_n \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. De plus, pour μ -presque tout $x \in E$ (tel que le 2^e et le 3^e points soient vérifiés), on sait que $z \mapsto f(x, z)$ est dérivable sur I de dérivée bornée par $g(x)$, donc, par l'inégalité des accroissements finis, on a la domination $|(f(x, y + h_n) - f(x, y))/h_n| \leq g(x)$. Par convergence dominée, on en déduit

$$\frac{F(y + h_n) - F(y)}{h_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x),$$

ce qui conclut la démonstration. □

Théorème de dérivation (difficile). Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f: E \times I \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que

- ▷ Pour tout $y \in I$, $x \mapsto f(x, y)$ est intégrable.
- ▷ Pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur I et on note $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sa dérivée.
- ▷ Il existe $g: E \rightarrow [0, \infty]$ intégrable telle que

$$\forall y \in I, \quad \text{pour } \mu\text{-presque tout } x \in E, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq |g(x)|.$$

Alors $F(y) := \int_E f(x, y) d\mu(x)$ est bien définie pour tout $y \in I$ et F est dérivable sur I de dérivée $F'(y) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x)$.

Démonstration. F est bien définie par le 1^{er} point. Voyons pourquoi la démo précédente ne marche pas. Notons

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{x \in E : x \mapsto f(x, y) \text{ est dérivable sur } I\}, \\ \Omega_y &:= \left\{x \in \Omega : \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq |g(x)|\right\}, \quad \text{pour } y \in I. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\mu(\Omega^c) = 0$ et $\mu(\Omega_y^c) = 0$. On ne peut pas procéder comme le théorème précédent pour la domination, car l'ensemble des x pour lequel on peut majorer $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \right|$ par $g(x)$ pour tout $z \in]y, y + h_n[$ est $\bigcap_{z \in]y, y + h_n[} \Omega_y$ dont le complémentaire n'a pas forcément mesure nulle car l'intersection est indénombrable.

Montrons à présent le résultat en utilisant un théorème non vu en cours, énoncé à la fin de la démonstration. Quitte à restreindre l'intervalle, on peut supposer I borné. Montrons tout d'abord que pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est intégrable sur I . Pour ça, on met des valeurs absolues et on intègre par rapport à y puis par rapport à x :

$$\begin{aligned} \int_E \int_I \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| dy d\mu(x) &= \int_I \int_E \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| d\mu(x) dy \quad (\text{Fubini Tonelli}) \\ &\leq \int_I \int_E g(x) d\mu(x) dy \quad (\text{par le 2^e point}) \\ &= \|g\|_1 \lambda(I) < \infty \quad (\text{car } I \text{ est borné}). \end{aligned}$$

Par Fubini-Lebesgue, on en déduit que, pour μ -presque tout $x \in E$, $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est intégrable sur I . Soit $\Omega' \subset \Omega$ l'ensemble de ces x , qui vérifie $\mu((\Omega')^c) = 0$. Alors, en utilisant le théorème ci-dessous, on a que, pour tout $x \in \Omega'$, pour tout $y \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $y + h \in I$,

$$f(x, y + h) - f(x, y) = \int_y^{y+h} \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) dz.$$

On veut s'en servir pour dominer $(f(x, y + h) - f(x, y))/h$ mais il y a toujours une quantité indéterminable de z en jeu donc il faut ruser. On définit

$$\begin{aligned} A &:= \left\{ (x, z) \in E \times I : \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \right| > g(x) \right\} \\ A^x &:= \left\{ z \in I : \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \right| > g(x) \right\}, \quad \text{pour } x \in E \\ A_z &:= \left\{ x \in E : \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \right| > g(x) \right\}, \quad \text{pour } z \in I. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a $\mu(A_z) = \mu(\Omega_z^c) = 0$ et donc, par Fubini-Tonelli,

$$\int_E \lambda(A^x) d\mu(x) = \int_E \int_I \mathbb{1}_{(x,z) \in A} dy d\mu(x) = \int_I \int_E \mathbb{1}_{(x,z) \in A} d\mu(x) dz = \int_I \mu(A_z) dz = 0.$$

On en déduit que pour μ -presque tout $x \in E$, $\lambda(A^x) = 0$: notons Ω'' l'ensemble de ces x , qui vérifie $\mu((\Omega'')^c) = 0$. Pour $x \in \Omega''$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \right| \leq g(x)$ pour λ -presque tout $z \in I$. Donc pour $x \in \Omega' \cap \Omega''$, on a

$$\left| \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \right| \leq \frac{1}{h} \int_y^{y+h} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, z) \right| dz \leq \frac{1}{h} \int_y^{y+h} g(x) dz = g(x).$$

Ceci montre la domination car $\mu((\Omega' \cap \Omega'')^c) = 0$ et le reste fonctionne comme pour la version facile du théorème. $\square$

Théorème. Soit $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $[a, b]$. Supposons que f' est intégrable sur $[a, b]$. Alors, on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(z) dz$.

Démonstration. Voir le Théorème 7.21 dans le livre *Real and complex analysis* de Rudin, disponible à la bibliothèque. Ce n'est pas un résultat facile, contrairement au cas particulier où f' est bornée, qui a été traité au TD 3.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)\varphi(y)| dy \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |f(z)| dz < \infty,$$

avec le changement de variable $y \rightarrow x - z$. Donc la fonction $y \mapsto |f(x - y)\varphi(y)|$ est intégrable et $f * \varphi$ est bien définie en x . En outre, on a

$$f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)\varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(x - z) dz$$

et on a

- ▷ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $z \mapsto f(z)\varphi(x - z)$ est mesurable,
- ▷ pour λ -presque tout $z \in \mathbb{R}^d$, on a $f(z) < \infty$ car f intégrable, donc $x \mapsto f(z)\varphi(x - z)$ est continue.
- ▷ pour tous $x, z \in \mathbb{R}^d$, $|f(z)\varphi(x - z)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(z)|$ et $|f|$ est intégrable.

Donc, par théorème de continuité sous l'intégrale, on a $f * \varphi$ continue.

2. On pose $K := \text{supp} \varphi$ qui est compact. On remarque que φ est bornée ainsi que toutes ses dérivées car elles sont toutes continue sur K donc bornées dessus et nulles en dehors. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)\varphi(y)| dy \leq \|\varphi\|_\infty \int_K |f(x-y)| dy = \|\varphi\|_\infty \int_{x-K} |f(z)| dz < \infty,$$

car $x-K$ est compact donc f est intégrable sur $x-K$. Donc $f * \varphi$ est bien définie en x .

Soit $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On note e_i le i^{e} vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. On a toujours $f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(x-z) dz$ et, à présent :

- ▷ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $z \mapsto f(z)\varphi(x-z)$ est intégrable,
- ▷ pour λ -presque tout $z \in \mathbb{R}^d$, on a $f(z) < \infty$ et alors $t \mapsto f(z)\varphi(x_0 + te_i - z)$ est dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée

$$f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0 + te_i - z).$$

- ▷ pour tous $z \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [-1, 1]$, on a

$$\left| f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0 + te_i - z) \right| \leq \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_\infty |t| \mathbb{1}_{x_0 - z \in K'} |f(z)|,$$

où $K' := K + \{se_i : s \in [-1, 1]\}$, et $|f| \mathbb{1}_{x_0 - K'}$ est intégrable car $x_0 - K'$ est compact.

Donc, par théorème de dérivation sous l'intégrale, $t \mapsto f * \varphi(x_0 + te_i)$ est dérivable en 0, de dérivée

$$\frac{\partial(f * \varphi)}{\partial x_i}(x_0) = \frac{d}{dt}(f * \varphi(x_0 + te_i)) \Big|_{t=0} = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_0 - z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_0 - y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) dy = \left(f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)(x_0).$$

On a donc $\frac{\partial(f * \varphi)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ sur $\mathbb{R}^d$, et $f * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ est continue par un raisonnement similaire à la question 1 (mais en travaillant sur un compact). Ainsi $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$.

On procède ensuite par récurrence. Supposons que $f * \varphi$ soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}^d$ et que pour $p \in \mathbb{N}^d$ tel que $|p| = k$, on ait $\partial_p(f * \varphi) = f * \partial_p \varphi$. Alors, pour chaque $p \in \mathbb{N}^d$ tel que $|p| = k$, on a $\partial_p \varphi$ qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, donc, par ce qui précède, $f * \partial_p \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^d$, donc $f * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. En outre, pour $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$,

$$\frac{\partial(f * \partial_p \varphi)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial(\partial_p \varphi)}{\partial x_i}.$$

ce qui donne $\partial_{p'}(f * \varphi) = f * \partial_{p'} \varphi$ pour $p' = (p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + 1, p_{i+1}, \dots, p_n)$. Ceci conclut la démonstration.



Exercice 4. (Convolution de fonctions L^1)

1. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)^2 &\longrightarrow L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda) \\ (f, g) &\longmapsto f * g \end{aligned}$$

est bien définie et montrer que, pour $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g d\lambda.$$

2. Montrer que le produit de convolution munit $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ d'une structure de $\mathbb{R}$ -algèbre associative et commutative.

3. Montrer que $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ n'est pas une algèbre unitaire.

Indication. On pourra considérer la fonction indicatrice d'un pavé.

Corrigé.

1. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. On pose $F(x, y) := f(x - y)g(y)$ qui est mesurable. Par le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{R}^d)^2} |F| d(\lambda \otimes \lambda) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)g(y)| dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| dx \right) |g(y)| dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \right) |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

donc F est intégrable pour $\lambda \otimes \lambda$. Par le théorème de Fubini-Lebesgue, on obtient que, pour λ -p.t. $x \in \mathbb{R}^d$, $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable et la fonction $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy$ est λ -intégrable, c'est-à-dire $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Et en outre, toujours par Fubini-Lebesgue, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f * g d\lambda = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda \int_{\mathbb{R}^d} g d\lambda,$$

en procédant de la même manière dans le calcul.

Remarque. On a ainsi $\|f * g\|_1 \leq \| |f| * |g| \|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.

2. On a montré que le produit de convolution est bien défini de $L^1 \times L^1$ dans L^1 . La bilinéarité est immédiate et munit $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ d'une structure de $\mathbb{R}$ -algèbre.

Montrons la commutativité. Soit $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$, on a pour presque tout x (pour les x tels que $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable)

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) dy = g * f(x),$$

grâce au changement de variable $y \rightarrow x - y$. Donc $f * g = g * f$ presque partout.

Montrons l'associativité. Soit $f, g, h \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$. Pour λ -presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, les fonctions $y \mapsto (|f| * |g|)(x - y)h(y)$ et $y \mapsto (f * h)(x - y)g(y)$ sont intégrables par la question 1. On considère un tel x , alors $y \mapsto (f * g)(x - y)h(y)$ est aussi intégrable et $(f * g) * h(x)$ et $(f * h) * g(x)$ sont bien définis. Alors, on a

$$\begin{aligned} (f * g) * h(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y - z)g(z) dz \right) h(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x - y - z)h(y) dy \right) g(z) dz = (f * h) * g(x), \end{aligned}$$

en appliquant le théorème de Fubini-Lebesgue à la fonction $(y, z) \mapsto f(x - y - z)g(z)h(y)$, qui est intégrable car

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y - z)g(z)h(y)| dz \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} (|f| * |g|)(x - y) |h(y)| dy < \infty,$$

car $y \mapsto (|f| * |g|)(x - y)h(y)$ est intégrable, par choix de x . On a donc $(f * g) * h = (f * h) * g$ presque partout. En combinant cette formule avec la commutativité on obtient

$$(f * g) * h = (f * h) * g = (h * f) * g = (h * g) * f = f * (g * h)$$

presque partout, ce qui montre l'associativité.

3. Supposons qu'un élément neutre $u \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ pour le produit de convolution existe. On pose $P := [0, 1]^d$. Alors, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{1}_P * u(x)$ est bien définie et $\mathbb{1}_P * u(x) = \mathbb{1}_P(x)$. En outre, pour un tel x , on a

$$\mathbb{1}_P * u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_P(x-y)u(y)dy = \int_{P_x} u(y)dy,$$

où $P_x := \prod_{i=1}^d [x_i - 1, x_i]$ pour $x \in \mathbb{R}^d$. On a donc $\mathbb{1}_P = f$ presque partout, où l'on pose

$$f: x \in \mathbb{R}^d \mapsto \int_{P_x} u(y)dy.$$

Comme u est intégrable, la fonction f est continue (elle est même uniformément continue par uniforme continuité de l'intégrale : voir l'exercice 1 du TD 2).

Comme $\mathbb{1}_P = f$ presque partout, on a $\lambda(f^{-1}([0, 1])) = \lambda((\mathbb{1}_P)^{-1}([0, 1])) = \lambda(\emptyset) = 0$ et, en outre, f prend les valeurs 0 et 1. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, $f^{-1}([0, 1])$ est non vide. Or c'est un ouvert par continuité de f , donc $\lambda(f^{-1}([0, 1])) > 0$. C'est absurde.

3 – Opérateur de translation

Exercice 5. (Continuité de l'opérateur de translation) Soit $h \in \mathbb{R}^d$ et $f: (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f: x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x-h)$.

- Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
- On suppose $p < \infty$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda)$.
 - Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.
 - Montrer que $\|\tau_h f - f\|_p \rightarrow 2^{1/p} \|f\|_p$ quand $|h| \rightarrow \infty$.

Indication. On pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.
- Que deviennent les résultats de la question 2. si $p = \infty$?
- Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\lambda(A) > 0$. Montrer que $A - A := \{x - y : x, y \in A\}$ contient un voisinage de 0.

Corrigé.

- Pour $p = \infty$ c'est clair, et, pour $p < \infty$, il suffit de faire un changement de variable $x \mapsto x - h$.
- Soit f une fonction continue à support compact K . Montrons (a) et (b) pour f .
 - La fonction f est donc uniformément continue. On a, pour tout $\|h\| < 1$,

$$\|\tau_h f - f\|_p^p \leq \lambda(K + B(0, 1)) \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p,$$

et $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x+h) - f(x)|^p \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ (une autre possibilité est d'utiliser le théorème de convergence dominée).

- Soit h tel que $\|h\| > \text{diam}(K)$. Alors les supports de $\tau_h f$ et f sont disjoints. On a donc

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p^p &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p dx \\ &= \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \mathbb{1}_{\{x \in \text{supp}(f)\}} dx + \int_E |\tau_h f(x) - f(x)|^p \mathbb{1}_{\{x \in \text{supp}(\tau_h f)\}} dx \\ &= \|f\|_p^p + \|\tau_h f\|_p^p = 2\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Soit maintenant $f \in L^p$ et $\varepsilon > 0$. On peut trouver une fonction g continue à support compact telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $h \geq 0$,

$$\|\tau_h g - g\|_p - \|\tau_h g - \tau_h f\|_p - \|g - f\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq \|\tau_h g - g\|_p + \|\tau_h f - \tau_h g\|_p + \|g - f\|_p,$$

c'est à dire

$$-2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p \leq \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon + \|\tau_h g - g\|_p.$$

Ainsi, on a

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p \leq 2\varepsilon,$$

et

$$2^{1/p} \|f\|_p - (2 + 2^{1/p})\varepsilon \leq \liminf_{|h| \rightarrow \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq \limsup_{|h| \rightarrow \infty} \|\tau_h f - f\|_p \leq (2 + 2^{1/p})\varepsilon + 2^{1/p} \|f\|_p.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que f vérifie (a) et (b).

3. Dans le cas où $p = +\infty$, les résultats ne sont plus vrais. En effet, en posant $f = \mathbb{1}_{[0,1]^d}$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 1$ pour tout $h \in \mathbb{R}$ donc $\|\tau_h f - f\|_\infty \not\rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. De même en posant $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d}$ on a $\|\tau_h g - g\|_\infty = 0$ et donc $\|\tau_h g - g\|_\infty \not\rightarrow 2^{1/p}$ quand $|h| \rightarrow \infty$.
4. Notons $A_n = A \cap B(0, n)$. Alors $\lambda(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n)$. Il existe donc $n \geq 0$ tel que $\lambda(A_n) > 0$. On peut donc supposer que A est borné, de mesure strictement positive. Alors $f = \mathbb{1}_A$ est dans L^1 . On a

$$\tau_h f - f = \mathbb{1}_{A \Delta (A+h)},$$

où Δ désigne la différence symétrique ($A \Delta B := (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$). Donc

$$\|\mathbb{1}_{A \Delta (A+h)}\|_1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \text{ ie } \lambda(A \Delta (A+h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

En particulier, $\lambda(A \cap (A+h)^c) \rightarrow 0$ donc $\lambda(A \cap (A+h)) \rightarrow \lambda(A)$. Donc il existe $r > 0$ tel que $\lambda(A \cap (A+h)) > 0$ pour tout $h \in B(0, r)$. En particulier, $A \cap (A+h) \neq \emptyset$. Donc il existe $x, y \in A$ tels que $x = y + h$ et donc $h = x - y$. On a donc montré que $B(0, r) \subset A - A$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. (Transformation de Fourier) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $\hat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto xf(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée.
3. (Transformée de Fourier d'une gaussienne) On considère la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

- (a) Montrer que $\xi \hat{f}(\xi) + \hat{f}'(\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
- (b) Calculer $\hat{f}$.

Corrigé.

1. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres, dont les hypothèses sont vérifiées :

- ▷ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)e^{-i\xi x}$ est mesurable ;
- ▷ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (i.e. pour x tel que $|f(x)| < \infty$), $\xi \mapsto f(x)e^{-i\xi x}$ est continue ;
- ▷ pour tous $\xi, x \in \mathbb{R}$, $|f(x)e^{-i\xi x}| \leq |f(x)|$ et f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\hat{f}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. En outre, il est clair que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1 < \infty$ donc $\hat{f}$ est bornée.

2. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, dont les hypothèses sont vérifiées :

- ▷ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)e^{-i\xi x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$;
- ▷ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ (i.e. pour x tel que $|f(x)| < \infty$), $\xi \mapsto f(x)e^{-i\xi x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\xi \mapsto -ixf(x)e^{-i\xi x}$;
- ▷ pour tous $\xi, x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} (f(x)e^{-i\xi x}) \right| \leq |xf(x)|$$

et la fonction $x \mapsto |xf(x)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} -ixf(x)e^{-i\xi x} dx = -i \cdot \widehat{xf}(x)(\xi).$$

3.(a) Il est clair que $x \mapsto xf(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{f}$ est dérivable et, pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}(\xi \hat{f}(\xi) + \hat{f}'(\xi)) &= \int_{\mathbb{R}} (\xi - ix)e^{-x^2/2} e^{-i\xi x} dx = -ie^{\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} (x + i\xi)e^{-(x+i\xi)^2/2} dx \\ &= ie^{\xi^2/2} \left[e^{-(x+i\xi)^2/2} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

(b) On veut résoudre l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre $y' + xy = 0$. Une solution évidente est $x \mapsto e^{-x^2/2}$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\hat{f}(\xi) = ce^{-\xi^2/2}$. En outre, on a

$$c = \hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 1,$$

donc on en conclut que $\hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$.



Exercice 7. (*Le retour du diable*) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ l'escalier du diable défini dans l'exercice 7 du TD 3. On note df la mesure de Stieljes associée à f , qui est une mesure sur $[0, 1]$ (voir l'exercice 2 du DM 2, on prolonge f par 0 sur $] -\infty, 0[$ et par 1 sur $]1, \infty[$ pour se ramener à une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses souhaitées).

1. Montrer que df est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue.
2. La mesure df a-t-elle des atomes ?

Corrigé.

1. Le support de la mesure df est l'ensemble de Cantor triadique K_3 , qui est de mesure de Lebesgue nulle. Ainsi df et la mesure de Lebesgue sont étrangères.
2. La mesure df n'a pas d'atomes, car la fonction croissante f est continue.



Exercice 8. (*Fonctions à variation finie*) Soit une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
 (b) Il existe une mesure signée μ sur $[a, b]$ telle que $f(x) = \mu([a, x])$ pour tout $x \in [a, b]$.
 (c) f est continue à droite et à *variation finie*, c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante

$$\sup_{n \geq 2, a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$

Indication. On pourra utiliser l'existence de la mesure de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).

2. Donner un exemple de fonction continue de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.

Corrigé.

1. (a) $\Rightarrow$ (b) : On suppose que $f = g - h + f(a)$ avec g et h croissantes, continues à droite et $g(a) = h(a) = 0$. Soit ν_g (resp. ν_h) la mesure de Stieljes associée à g (resp. h). Posons

$$\mu = \nu_g - \nu_h + f(a)\delta_a.$$

Alors μ est une mesure signée sur $[a, b]$ telle que $f(x) = \mu([a, x])$ pour tout $x \in [a, b]$.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Il est évident que f est continue à droite. Soient $n \geq 2$ et $a_1, \dots, a_n$ vérifiant $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq b$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n-1} |\mu([a_{i-1}, a_i])| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\mu|([a_{i-1}, a_i]) \leq |\mu|([a, b]).$$

Donc f est à variation bornée.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Pour tout $x \in [a, b]$, posons

$$V(x) := \sup_{n \geq 2, a \leq a_1 < \dots < a_n \leq x} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$

Alors V est croissante. On peut donc définir pour tout $x \in [a, b]$,

$$g(x) := \lim_{y \downarrow x} V(y).$$

Ainsi, g est croissante et continue à droite. Posons $h = g - f$. Alors h est continue à droite. Montrons que h est croissante. Soient $a \leq x < y \leq b$ et $\varepsilon > 0$. Pour tous $n \geq 2$ et $a \leq a_1 < \dots < a_n \leq x$, on a

$$\begin{aligned} V(y + \varepsilon) - f(y + \varepsilon) &\geq |f(y + \varepsilon) - f(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(y + \varepsilon) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(x) \\ &\geq V(x) - f(x). \end{aligned}$$

Donc, $h(y + \varepsilon) \geq h(x)$ puis en faisant tendre ε vers 0 on obtient $h(y) \geq h(x)$.

2. La fonction $f : x \in]0, 1] \mapsto x \cos(1/x)$, prolongée par continuité en 0 n'est pas à variation bornée : considérer la subdivision

$$0 < \frac{1}{n\pi} < \dots < \frac{1}{3\pi} < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1,$$

qui donne une variation qui tend vers l'infini quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 9. Soit $f: (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ en posant, pour $x \geq 0$,

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2} dt.$$

2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \rightarrow \infty$.
3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Corrigé.

1. On pose $g(x, t) = \arctan(xf(t))/(1+t^2)$ pour $x \geq 0$ et $t \geq 0$. Alors pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est continue. De plus pour tout $x \geq 0$ la fonction $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable et $|g(x, t)| \leq \pi/(2(1+t^2))$. Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers $+\infty$. Alors $g(x_n, t) \rightarrow \pi/(2(1+t^2)) \mathbb{1}_{\{f(t) \neq 0\}}$ pour tout $t \geq 0$. La domination utilisée à la question précédente permet d'utiliser le théorème de convergence dominée et d'obtenir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)} \mathbb{1}_{\{f(t) \neq 0\}} dt.$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)} \mathbb{1}_{\{f(t) \neq 0\}} dt.$$

3. Pour tout $t \geq 0$ la fonction $x \mapsto g(x, t)$ est dérivable de dérivée

$$\frac{\partial g(x, t)}{\partial x} = \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}.$$

Soit $a > 0$. Pour tout $x \geq a$ on a

$$\left| \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)} \right| \leq \frac{1}{a(1+t^2)}.$$

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$, elle est donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. On va montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ est intégrable. Supposons que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ soit intégrable. Alors pour tout $x \geq 0$ on a

$$\left| \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)} \right| \leq \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$. Supposons maintenant que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ ne soit pas intégrable. Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0. Alors pour tout $t \geq 0$,

$$\frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$

Donc d'après le lemme de Fatou,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)} dt = \infty.$$

Ainsi $F(x_n)/x_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 10. (L'espace des mesures complexes) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On note $\mathcal{M}$ l'espace des mesures complexes sur $(E, \mathcal{A})$. Pour $\mu \in \mathcal{M}$, on pose

$$\|\mu\| := |\mu|(E),$$

où $|\mu|$ est la variation totale de μ . Montrer que $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.

Corrigé. On vérifie assez aisément que $\mathcal{M}$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et que $\|\cdot\|$ est bien une norme. Montrons la complétude : soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$.

Étape 1. Pour tout borélien $A \in \mathcal{A}$ et $n, p \in \mathbb{N}$, on a $|\mu_n(A) - \mu_p(A)| \leq \|\mu_n - \mu_p\|$, ce qui implique que la suite $(\mu_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$, et converge donc vers une limite notée $\mu(A)$.

Étape 2. Montrons que μ est une mesure complexe sur $(E, \mathcal{A})$. Prouvons tout d'abord que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)| : A \in \mathcal{A}\} = 0. \quad (1)$$

À cet effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \varepsilon$ pour tous $n, k \geq n_0$. Soit $A \in \mathcal{A}$. On choisit $k > n_0$ tel que $|\mu(A) - \mu_k(A)| < \varepsilon$. Alors pour $n > n_0$:

$$|\mu(A) - \mu_n(A)| \leq |\mu(A) - \mu_k(A)| + |\mu_k(A) - \mu_n(A)| \leq \varepsilon + \|\mu_k - \mu_n\| \leq 2\varepsilon,$$

ce qui prouve (1).

Ensuite, les mesures μ_n sont en particulier finiment additives, ce qui implique aisément que μ est finiment additive. Montrons maintenant que μ est σ -additive. Soit $(A_i)_{i \geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables disjoints et $\varepsilon > 0$. D'après (1), il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)| : A \in \mathcal{A}\} \leq \varepsilon.$$

On choisit ensuite $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left| \mu_n \left(\bigcup_{i \geq k+1} A_i \right) \right| \leq \varepsilon.$$

En particulier, ceci implique que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left| \mu \left(\bigcup_{i \geq k+1} A_i \right) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Par additivité (finie) de μ , on obtient finalement, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left| \mu \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i \right) - \sum_{i=1}^k \mu(A_i) \right| = \left| \mu \left(\bigcup_{i \geq k+1} A_i \right) \right| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la σ -additivité de μ en découle, ce qui prouve que μ est une mesure.

Étape 3. On vérifie que $\|\mu_n - \mu\| \rightarrow 0$. On rappelle que

$$\|\mu_n - \mu\| = \sup \left\{ \sum_{i \geq 1} |(\mu_n - \mu)(E_i)| : (E_i)_{i \geq 1} \text{ partition de } E \right\}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geq n$, $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \varepsilon$. Soit $(E_i)_{i \geq 1}$ une partition de E , la série

$$\sum_{i \geq 1} |(\mu_n - \mu)(E_i)|$$

est finie (car $\mu_n - \mu$ est bien une mesure complexe) donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{i \geq N+1} |(\mu_n - \mu)(E_i)| \leq \varepsilon$$

Alors, on a, pour tout $k \geq n$,

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 1} |(\mu_n - \mu)(E_i)| &\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^N |(\mu_n - \mu)(E_i)| \leq \varepsilon + \sum_{i=1}^N |(\mu_n - \mu_k)(E_i)| + \sum_{i=1}^N |(\mu_k - \mu)(E_i)| \\ &\leq \varepsilon + \|\mu_n - \mu_k\| + N \sup\{|\mu(A) - \mu_k(A)| : A \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

Comme $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \varepsilon$, on obtient, en faisant tendre k vers l'infini et en utilisant (1),

$$\sum_{i \geq 1} |(\mu_n - \mu)(E_i)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour toute partition $(E_i)_{i \geq 1}$, on en déduit que $\|\mu_n - \mu\| \leq 2\varepsilon$ et donc que, pour tout $k \geq n$, $\|\mu_k - \mu\| \leq 3\varepsilon$. On a donc montré que $\|\mu_n - \mu\| \rightarrow 0$.



Fin