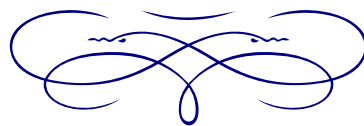


TD 5 – Théorèmes de Fubini et changement de variables



1 – Théorèmes de Fubini

Exercice 1. (Quelque chose d'utile) Sur un espace mesuré σ -fini $(E, \mathcal{A}, \mu)$, on considère $f: (E, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1. Soit $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E g \circ f \, d\mu = \int_0^\infty g'(t) \mu(\{f \geq t\}) \, dt.$$

Indication. On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.

2. Montrer que

$$\int_E f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) \, dt.$$

3. On considère à présent $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et on suppose que μ est finie et qu'il existe $p > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $t > 0$, $\mu(\{|f| \geq t\}) \leq ct^{-p}$. Montrer que $f \in L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $q \in]0, p[$. A-t-on forcément $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$?



Exercice 2. (Intégration par parties) Soit f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrables (i.e. intégrables sur tout compact pour la mesure de Lebesgue). On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_0^x f(t) \, dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^x g(t) \, dt.$$

Montrer que, pour tous $a < b$,

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_a^b F(t)g(t) \, dt + \int_a^b G(t)f(t) \, dt.$$

2 – Changement de variables

Exercice 3. (Changement de variables polaire)

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.$$

2. (Application) Utiliser la fonction $f: (x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ pour calculer $\int_0^\infty e^{-t^2} \, dt$.



Exercice 4. (Changement de variables sphérique)

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\infty f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi.$$

On appelle θ la *longitude* et φ la *latitude*.

2. (Application) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|x\|_2^\alpha$ soit intégrable sur $B(0, 1)$. Et sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, 1)$?



Exercice 5. (Formule des compléments)

1. Calculer la mesure image de la mesure

$$x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{x, y \geq 0\}} dx dy,$$

par l'application $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x + y, x/(x + y))$.

2. En déduire la formule des compléments :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt,$$

où l'on rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $a > 0$ par $\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$.

Remarque. L'intégrale obtenue est généralement notée $B(a, b)$ et la fonction B est appelée la fonction bêta.

3 – Mesure produit



Exercice 6. (Produit de mesures de Lebesgue) Soit $k, l \in \mathbb{N}^*$ et $n := k + l$. On note $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)$ la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$.

1. Est-ce que la mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$, définie sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$ est complète ?
2. Montrer que la mesure de Lebesgue λ_n sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ est égale à la mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$ complétée.

4 – Compléments (hors TD)



Exercice 7. (Mesure de Lebesgue sur la sphère unité) On se place sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue λ_d et de la norme euclidienne. On note $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. (Mesure de Lebesgue sur la sphère unité) Pour $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, on pose

$$\Theta(A) := \{rx : r \in [0, 1] \text{ et } x \in A\} \quad \text{et} \quad \omega_d(A) := d \lambda_d(\Theta(A)).$$

Montrer que ω_d est une mesure finie sur S^{d-1} invariante par isométries vectorielles de $\mathbb{R}^d$.

2. (Changement de variable radial) Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda(x) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(rz) r^{d-1} d\omega_d(z) dr.$$

Indication. On pourra commencer par le cas où $f = \mathbb{1}_B$ avec B de la forme

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : a < \|x\| \leq b \text{ et } \frac{x}{\|x\|} \in A \right\},$$

où A est un borélien de S^{d-1} et $0 < a \leq b$.

3. (*Volume de la boule unité*) En utilisant la fonction $f: x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$, calculer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, en l'exprimant à partir de la fonction Gamma.



Exercice 8. (*Quelques calculs*)

1. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy,$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx.$$

2. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \cos(xy) dy$, et en déduire, pour tout $t > 0$, la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-tx} dx.$$



Exercice 9. (*Quelque chose d'amusant*) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que, pour λ -presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0$.



Exercice 10. (*Intégration par parties pour l'intégrale de Stieljes*) Soit $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions croissantes, continues à droite, bornées telles que $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$. On note dF et dG leurs mesures de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).

1. Montrer que, pour tous $a < b$, on a

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{]a,b]} F(t) dG(t) + \int_{]a,b]} G(t-) dF(t).$$

2. Soit $a < b$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur G et F pour que

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{]a,b]} F(t) dG(t) + \int_{]a,b]} G(t) dF(t),$$

c'est-à-dire pour que l'intégration par parties se passe "normalement".

Remarque. On peut généraliser l'intégrale de Stieljes et l'intégration par partie démontrée à la question 1. aux fonctions F et G continues à droite et à variation finie sur les intervalles bornés (qui sont exactement les fonctions s'écrivant comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite). Les mesures de Stieljes dF et dG sont alors des mesures de Radon signées (qui seront étudiées prochainement dans le cours).



Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} \lambda_n(dx),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.



Exercice 12. Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Montrer que

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\}),$$

où $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.



Exercice 13. Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soit f et g deux fonctions $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f , g et fg sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu.$$



Fin