

TD 5 – Théorèmes de Fubini et changement de variables



1 – Théorèmes de Fubini

Exercice 1. (Quelque chose d'utile) Sur un espace mesuré σ -fini $(E, \mathcal{A}, \mu)$, on considère $f: (E, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable.

1. Soit $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_E g \circ f \, d\mu = \int_0^\infty g'(t) \mu(\{f \geq t\}) \, dt.$$

Indication. On pourra écrire $g(f(t))$ comme une intégrale.

2. Montrer que

$$\int_E f \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{f \geq t\}) \, dt.$$

3. On considère à présent $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et on suppose que μ est finie et qu'il existe $p > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $t > 0$, $\mu(\{|f| \geq t\}) \leq ct^{-p}$. Montrer que $f \in L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ pour tout $q \in]0, p[$. A-t-on forcément $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$?

Corrigé.

1. La fonction $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $g(0) = 0$ donc pour tout $x \in E$ on a

$$g(f(x)) = \int_0^{f(x)} g'(s) \, ds.$$

On a donc

$$\int_E g \circ f \, d\mu = \int_E \int_0^\infty g'(s) \mathbb{1}_{\{s \leq f(x)\}} \, ds \, d\mu(x).$$

On pose $F: (x, s) \in E \times \mathbb{R}_+ \mapsto g'(s) \mathbb{1}_{\{s \leq f(x)\}}$. On peut appliquer le théorème de Fubini-Tonelli car :

- ▷ μ et λ sont σ -finies.
- ▷ $F: (E \times \mathbb{R}_+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable. Montrons le proprement pour une fois. Tout d'abord $(x, s) \mapsto g'(s)$ est mesurable, car l'image réciproque de $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par cette fonction est $E \times (g')^{-1}(A) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ car g' est mesurable. Ensuite, remarquons que la fonction $(x, s) \in E \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{1}_{\{s \leq f(x)\}}$ peut être décomposée en $\psi_2 \circ \psi_1$ avec

$$\begin{aligned} \psi_1: (E \times \mathbb{R}_+, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) &\rightarrow (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \\ (x, s) &\mapsto (f(x), s) \\ \psi_2: (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (t, s) &\mapsto \mathbb{1}_{s \leq t} \end{aligned}$$

et il suffit alors de montrer que ces fonctions sont mesurables. Pour ψ_1 , comme $\{A \times B : A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, il suffit de montrer, pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, que $\psi_1^{-1}(A \times B) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Mais on a $\psi_1^{-1}(A \times B) = f^{-1}(A) \times B$ donc c'est bon. Pour ψ_2 , il suffit de montrer que $\{(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : s \leq t\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$: comme c'est un fermé, il est donc dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) = \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

▷ F est positive.

On obtient alors

$$\int_E g \circ f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} g'(s) \int_E \mathbb{1}_{\{s \leq f(x)\}} \, d\mu(x) \, ds = \int_{\mathbb{R}_+} g'(s) \mu(\{f \geq s\}) \, ds.$$

2. Application immédiate de la question précédente en prenant $g(x) = x$.

3. On applique la question 1. avec $|f|$ et $g(x) = x^q$:

$$\int_E |f|^q \, d\mu = q \int_0^\infty t^{q-1} \mu(\{|f| \geq t\}) \, dt \leq q \mu(E) \int_0^1 t^{q-1} \, dt + cq \int_1^\infty t^{q-p-1} \, dt < \infty,$$

car $q-1 > 0$ et $q-p-1 < -1$.

En revanche, on n'a pas forcément $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$: prendre par exemple $f = t^{-1/p}$ sur $]0, 1]$.

Remarque. Réciproquement, si $f \in L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, l'inégalité de Markov implique qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $t > 0$, $\mu(\{|f| > t\}) \leq ct^{-p}$.



Exercice 2. (*Intégration par parties*) Soit f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrables (i.e. intégrables sur tout compact pour la mesure de Lebesgue). On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) := \int_0^x f(t) \, dt \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^x g(t) \, dt.$$

Montrer que, pour tous $a < b$,

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_a^b F(t)g(t) \, dt + \int_a^b G(t)f(t) \, dt.$$

Corrigé. Il suffit de montrer que

$$\int_a^b (F(b) - F(t))g(t) \, dt = \int_a^b (G(t) - G(a))f(t) \, dt.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_a^b (F(b) - F(t))g(t) \, dt &= \int_a^b \left(\int_t^b f(s) \, ds \right) g(t) \, dt = \int_a^b \left(\int_a^b \mathbb{1}_{s \geq t} f(s) g(t) \, ds \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b \mathbb{1}_{s \geq t} f(s) g(t) \, dt \right) ds = \int_a^b \left(\int_a^s g(t) \, dt \right) f(s) \, ds \\ &= \int_a^b (G(s) - G(a))f(s) \, ds, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini-Lebesgue à la fonction

$$\varphi(s, t) := \mathbb{1}_{s \geq t} f(s) g(t)$$

qui est intégrable sur $[a, b]^2$ pour $\lambda \otimes \lambda$, car

$$\int_{[a, b]^2} |\varphi(s, t)| \, ds \, dt \leq \int_{[a, b]^2} |f(s)g(t)| \, ds \, dt = \left(\int_a^b |f(s)| \, ds \right) \left(\int_a^b |g(t)| \, dt \right) < \infty,$$

par le théorème de Fubini-Tonelli.

2 – Changement de variables

Exercice 3. (Changement de variables polaire)

1. Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

2. (Application) Utiliser la fonction $f: (x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$ pour calculer $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Corrigé.

1. On considère la bijection (bien noter qu'on se restreint à des ouverts)

$$\varphi: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\}) \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{array}$$

On a alors les dérivées partielles

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix},$$

qui sont continues donc φ est $\mathcal{C}^1$. Comme $|\text{Jac}_\varphi(r, \theta)| = r \neq 0$, φ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme par le théorème d'inversion globale (voir ci-dessous, on peut aussi écrire la réciproque de φ et constater qu'elle est $\mathcal{C}^1$). Ainsi, par la formule de changement de variable, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_+ \times \{0\})} f d\lambda_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

et comme $\mathbb{R}_+ \times \{0\}$ est de mesure nulle pour λ_2 cela conclut.

Théorème d'inversion globale. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction injective de classe $\mathcal{C}^1$. Si, pour tout $u \in U$, $\text{Jac}_\varphi(u) \neq 0$, alors $\varphi(U)$ est un ouvert et $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

2. D'une part, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt \right)^2 = 4 \left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt \right)^2.$$

et, d'autre part, par la question 1.,

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^\infty = \pi.$$

On en conclut que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 4. (Changement de variables sphérique)

1. Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f d\lambda_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\infty f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) r^2 \cos(\varphi) dr d\theta d\varphi.$$

On appelle θ la *longitude* et φ la *latitude*.

2. (Application) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $x \in \mathbb{R}^3 \mapsto \|x\|_2^\alpha$ soit intégrable sur $B(0, 1)$. Et sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0, 1)$?

Corrigé.

1. On considère la bijection $\mathcal{C}^1$

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}) \\ (r, \theta, \varphi) &\longmapsto (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi). \end{aligned}$$

On a les dérivées partielles suivantes

$$\psi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

qui sont continues donc ψ est $\mathcal{C}^1$. On a $|\text{Jac}_\psi(r, \theta)| = r^2 \cos \varphi \neq 0$ donc ψ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme (par le théorème d'inversion globale). Ainsi, par la formule de changement de variable, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\lambda_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\infty f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) r^2 \cos(\varphi) \, dr \, d\theta \, d\varphi,$$

car $\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$ est de mesure nulle pour λ_3 .

2. D'après la question 1., on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|x\|^\alpha \mathbb{1}_{x \in B(0,1)} \, d\lambda_3(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 r^\alpha \mathbb{1}_{r < 1} r^2 \cos(\varphi) \, dr \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \int_0^1 r^{\alpha+2} \, dr,$$

et cette intégrale est finie si et seulement si $\alpha > -3$.

De même, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \|x\|^\alpha \mathbb{1}_{x \notin B(0,1)} \, d\lambda_3(x) = 4\pi \int_1^\infty r^{\alpha+2} \, dr,$$

qui est finie si et seulement si $\alpha < -3$.



Exercice 5. (Formule des compléments)

1. Calculer la mesure image de la mesure

$$x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{x, y \geq 0\}} \, dx \, dy,$$

par l'application $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y))$.

2. En déduire la formule des compléments :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} \, dt,$$

où l'on rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $a > 0$ par $\Gamma(a) := \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \, dx$.

Remarque. L'intégrale obtenue est généralement notée $B(a, b)$ et la fonction B est appelée la fonction bêta.

Corrigé.

1. Soit ν la mesure image de μ par $\phi: (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (x+y, x/(x+y)) \in \mathbb{R}^2$. Pour calculer la mesure ν , on va calculer $\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\nu$ pour $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable quelconque. On a, par la formule de transfert,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \, d\nu(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\phi(x, y)) \, d\mu(x, y) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x+y, \frac{x}{x+y}\right) x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \, dx \, dy.$$

Le but est de se ramener à une intégrale de la forme $\int_{\mathbb{R}^2} f(u, v) dv'(u, v)$ avec v' explicite obtenue par le calcul et on pourra conclure que $v = v'$. On a donc pas trop le choix : il faut faire le changement de variable par rapport à ϕ pour transformer le $f(\phi(x, y))$ en $f(u, v)$.

Faisons le. Notons que $\phi: (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto (x + y, x/(x + y)) \in \mathbb{R}_+^* \times]0, 1[$ est bijective de réciproque $(u, v) \mapsto (uv, u(1 - v))$ (avec au départ et à l'arrivée des ouverts). En outre, ϕ est de classe C^1 de jacobien

$$\text{Jac}_\phi(x, y) = -\frac{1}{x + y}.$$

Comme le Jacobien ne s'annule pas (ou en remarquant facilement que la réciproque est C^1), ϕ est un C^1 -difféomorphisme. D'après la formule du changement de variables, on a

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x + y, \frac{x}{x + y}\right) x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} dx dy \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} f\left(x + y, \frac{x}{x + y}\right) \left((x + y) \frac{x}{x + y}\right)^{a-1} \left((x + y) - (x + y) \frac{x}{x + y}\right)^{b-1} (x + y) e^{-(x+y)} (x + y)^{-1} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[} f(u, v) (uv)^{a-1} (u - uv)^{b-1} u e^{-u} du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[} f(u, v) e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1 - v)^{b-1} du dv. \end{aligned}$$

Donc la mesure image par $(x, y) \mapsto (x + y, x/(x + y))$ de la mesure $x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{x, y > 0\}} dx dy$ est

$$e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1 - v)^{b-1} \mathbb{1}_{\{u > 0, 0 < v < 1\}}.$$

2. Par définition de la mesure image, μ et ν ont même masse. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, la masse totale de μ est

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} dx dy = \Gamma(a) \Gamma(b),$$

et celle de ν est

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times]0, 1[} e^{-u} u^{a+b-1} v^{a-1} (1 - v)^{b-1} du dv = \Gamma(a + b) \int_0^1 t^{a-1} (1 - t)^{b-1} dt.$$

On trouve donc la formule des compléments.

3 – Mesure produit

Exercice 6. (Produit de mesures de Lebesgue) Soit $k, l \in \mathbb{N}^*$ et $n := k + l$. On note $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)$ la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$.

1. Est-ce que la mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$, définie sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$ est complète ?
2. Montrer que la mesure de Lebesgue λ_n sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ est égale à la mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$ complétée.

Corrigé.

1. La mesure produit $\lambda_k \otimes \lambda_l$ n'est pas complète. Pour voir cela, soit $A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)$ tel que $\lambda_k(A) = 0$ et soit $B \subset \mathbb{R}^l$ tel que $B \notin \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$ (existe d'après le cours). Alors $A \times B \subset A \times \mathbb{R}^l$ et $\lambda_k \otimes \lambda_l(A \times \mathbb{R}^l) = 0$ donc $A \times B$ est négligeable. Mais si $A \times B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, alors ses sections selon la 2^e coordonnée appartiennent à $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, c'est-à-dire $B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, ce qui est absurde. Donc $A \times B \notin \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, qui n'est donc pas complète pour $\lambda_k \otimes \lambda_l$.
2. Procédons par étapes :
 - ▷ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$: cela découle directement de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^k) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^l)$. Ainsi λ_n et $\lambda_k \otimes \lambda_l$ sont bien définies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

- ▷ Montrons que λ_n et $\lambda_k \otimes \lambda_l$ coïncident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Elles coïncident sur les pavés ouverts

$$\mathcal{P} := \left\{ \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[: \forall 1 \leq i \leq n, a_i \leq b_i \right\}$$

qui sont stables par intersections finies et engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $] -k, k[\in \mathcal{P}$ et $\lambda_n([-k, k[]^n) = \lambda_k \otimes \lambda_l([-k, k[]^n) < \infty$ et $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}] -k, k[]^n$. On peut donc appliquer le théorème d'unicité des mesures σ -finies : λ_n et $\lambda_k \otimes \lambda_l$ coïncident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

- ▷ Montrons que $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$. Pour $A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k)$, il existe $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ tels que $A_1 \subset A \subset A_2$ et $\lambda_k(A_1) = \lambda_k(A_2)$. Et, pour $B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$, soit B_1 et B_2 définis de même. Alors $A_1 \times B_1 \subset A \times B \subset A_2 \times B_2$, avec $A_1 \times B_1, A_2 \times B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ et, en utilisant le 2^e point,

$$\lambda_n(A_1 \times B_1) = \lambda_k(A_1) \lambda_l(B_1) = \lambda_k(A_2) \lambda_l(B_2) = \lambda_n(A_2 \times B_2),$$

et donc $A \times B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$. Or $\{A \times B : A \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k), B \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)\}$ engendre $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$ donc on obtient $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$.

- ▷ Montrons que λ_n et $\lambda_k \otimes \lambda_l$ coïncident sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$. En effet, soit $C \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$. Alors $C \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ donc il existe $C_1, C_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ tels que $C_1 \subset C \subset C_2$ et $\lambda_n(C_1) = \lambda_n(C) = \lambda_n(C_2)$. Mais, par le 2^e point, on a

$$\lambda_k \otimes \lambda_l(C_1) = \lambda_n(C_1) = \lambda_n(C_2) = \lambda_k \otimes \lambda_l(C_2)$$

et, comme $C \in \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$,

$$\lambda_k \otimes \lambda_l(C_1) \leq \lambda_k \otimes \lambda_l(C) \leq \lambda_k \otimes \lambda_l(C_2),$$

donc $\lambda_k \otimes \lambda_l(C) = \lambda_n(C)$.

- ▷ Concluons. On a vu que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l) \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ et que λ_n et $\lambda_k \otimes \lambda_l$ coïncident sur $\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)$. Donc en prenant la complétion pour cette même mesure, on obtient

$$\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)} \subset \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$$

et donc $\overline{\overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^k) \otimes \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^l)} = \overline{\mathcal{B}}(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda_n = \overline{\lambda_k \otimes \lambda_l}$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (Mesure de Lebesgue sur la sphère unité) On se place sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue λ_d et de la norme euclidienne. On note $S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. (Mesure de Lebesgue sur la sphère unité) Pour $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, on pose

$$\Theta(A) := \{rx : r \in [0, 1] \text{ et } x \in A\} \quad \text{et} \quad \omega_d(A) := d \lambda_d(\Theta(A)).$$

Montrer que ω_d est une mesure finie sur S^{d-1} invariante par isométries vectorielles de $\mathbb{R}^d$.

2. (Changement de variable radial) Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda(x) = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(rz) r^{d-1} d\omega_d(z) dr.$$

Indication. On pourra commencer par le cas où $f = \mathbb{1}_B$ avec B de la forme

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : a < \|x\| \leq b \text{ et } \frac{x}{\|x\|} \in A \right\},$$

où A est un borélien de S^{d-1} et $0 < a \leq b$.

3. (*Volume de la boule unité*) En utilisant la fonction $f: x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$, calculer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, en l'exprimant à partir de la fonction Gamma.

Corrigé.

1. On remarque que ω_d est bien une mesure en tant que mesure image de $d\lambda_d$ sur S^{d-1} par l'application

$$x \in \overline{B}(0, 1) \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$

La masse totale de ω_d est

$$\omega_d(S^{d-1}) = d\lambda_d(\overline{B}(0, 1))$$

et est donc finie.

Enfin, si φ est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^d$ et $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, on a

$$\Gamma(\varphi^{-1}(A)) = \{r\varphi^{-1}(x) : r \in [0, 1] \text{ et } x \in A\} = \{\varphi^{-1}(rx) : r \in [0, 1] \text{ et } x \in A\} = \varphi^{-1}(\Gamma(A))$$

et donc

$$\omega_d(\varphi^{-1}(A)) = d\lambda_d(\Gamma(\varphi^{-1}(A))) = d\lambda_d(\varphi^{-1}(\Gamma(A))) = d\lambda_d(\Gamma(A)) = \omega_d(A),$$

en utilisant le fait que λ_d est invariante par isométries vectorielles de $\mathbb{R}^d$.

Remarque. On peut montrer que ω_d est la seule mesure finie sur S^{d-1} invariante par isométries vectorielles de $\mathbb{R}^d$, à multiplication près par une constante. Mais on n'a pas d'unicité pour les mesures sur $\mathbb{R}^d$ invariantes par isométries vectorielles et finies sur les bornés : par exemple, ω_d prolongée sur $\mathbb{R}^d$ par $\omega_d(\mathbb{R}^d \setminus S^{d-1}) = 0$ n'est pas multiple de λ_d .

2. Notons $\mathcal{C}$ la famille des ensembles B de la forme

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : a < \|x\| \leq b \text{ et } \frac{x}{\|x\|} \in A \right\},$$

où A est un borélien de S^{d-1} et $0 < a \leq b$. En outre, définissons une mesure μ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ en posant

$$\mu(C) := \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \mathbb{1}_C(rz) r^{d-1} d\omega_d(z) dr,$$

pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Alors il suffit de montrer que $\mu = \lambda_d$.

Commençons par considérer $B \in \mathcal{C}$ défini comme ci-dessus. Alors on a

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \mathbb{1}_{a < r \leq b} \mathbb{1}_{z \in A} r^{d-1} d\omega_d(z) dr = \omega_d(A) \int_a^b r^{d-1} dr \\ &= \omega_d(A) \frac{b^d - a^d}{d} = \lambda_d(\Gamma(A))(b^d - a^d). \end{aligned}$$

D'autre part, on a, en remarquant que $B = b\Gamma(A) \setminus a\Gamma(A)$,

$$\lambda_d(B) = \lambda_d(b\Gamma(A)) - \lambda_d(a\Gamma(A)) = (b^d - a^d)\lambda_d(\Gamma(A)).$$

Ainsi, on a montré que μ et λ_d coïncident sur $\mathcal{C}$.

On remarque tout d'abord que $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies. Montrons maintenant que $\mathcal{C}$ engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, on pose

$$\delta(x, y) := \max\left(\left|\|x\| - \|y\|\right|, \left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|\right),$$

et on vérifie aisément que c'est une distance et qu'elle engendre la même topologie que la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (on peut remarquer qu'elles ont les mêmes suites convergentes). Pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $r > 0$, la boule de centre x et de r pour la distance δ est

$$\begin{aligned} B_\delta(x, r) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \|x\| - r < \|y\| < \|x\| + r \text{ et } \frac{y}{\|y\|} \in B_{S^{d-1}}\left(\frac{x}{\|x\|}, r\right) \right\}, \\ &= \bigcup_{n \geq 1} \left\{ y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} : \|x\| - r < \|y\| \leq \|x\| + r\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ et } \frac{y}{\|y\|} \in B_{S^{d-1}}\left(\frac{x}{\|x\|}, r\right) \right\}, \end{aligned}$$

et donc $B_\delta(x, r) \in \mathcal{C}$ dès que $r < \|x\|$. D'autre part, par séparabilité de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, tout ouvert s'écrit comme réunion dénombrable de boules ouvertes pour la distance δ : si U est un ouvert (non vide et différent de $\mathbb{R}^d$, sinon c'est facile), on considère $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans U et $r_k := \delta(x_k, U^c)$ et alors on a

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_\delta(x_k, r_k).$$

Ainsi $\sigma(\mathcal{C})$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ donc contient $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. En outre, $\mathcal{C}$ contient une suite croissante d'ensembles dont l'union dénombrable recouvre $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et sur lesquels λ_d est finie, donc par le théorème d'unicité des mesures σ -finies, on a $\mu = \lambda_d$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$. Comme le singleton $\{0\}$ est de mesure nulle pour μ et λ_d , on en déduit que $\mu = \lambda_d$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

3. D'une part, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda(x) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^d = \pi^{d/2},$$

et, d'autre part, en utilisant la question 2.,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\lambda(x) &= \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} e^{-r^2} r^{d-1} d\omega_d(z) dr = \omega_d(S^{d-1}) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{d-1} dr \\ &= d\lambda_d(\bar{B}(0, 1)) \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{d}{2}-1} \frac{du}{2} = \lambda_d(\bar{B}(0, 1)) \frac{d}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \\ &= \lambda_d(\bar{B}(0, 1)) \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

En combinant les deux, on obtient la formule souhaitée.



Exercice 8. (Quelques calculs)

1. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy,$$

et en déduire la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx.$$

2. Pour $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^1 \cos(xy) dy$, et en déduire, pour tout $t > 0$, la valeur de

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-tx} dx.$$

Corrigé.

1. Pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} dy = \frac{1}{x^2-1} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y} \right) dy = \frac{2\ln(x)}{x^2-1}.$$

Ainsi, en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{dx}{(1+y)(1+x^2y)} \right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y} \left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2y} \right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y} \left[\frac{1}{\sqrt{y}} \arctan(\sqrt{y}x) \right]_0^\infty \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)\sqrt{y}} = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \frac{2du}{1+u^2} = \frac{\pi^2}{4}, \end{aligned}$$

en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{y}$.

2. Pour $x > 0$, on a

$$\int_0^1 \cos(xy) dy = \left[\frac{\sin(xy)}{x} \right]_0^1 = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Posons $G(x, y) = \cos(xy) \exp(-tx)$ pour $x \geq 0$, $y \in [0, 1]$ et $t > 0$. On a $|G(x, y)| \leq \exp(-tx)$ et $(x, y) \mapsto \exp(-tx)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Donc G est intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times [0, 1]$ et d'après le théorème de Fubini-Lebesgue,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-xt} dx &= \int_0^\infty \left(\int_0^1 G(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^\infty \cos(xy) e^{-tx} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{2} (e^{(iy-t)x} + e^{(-iy-t)x}) dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t-iy} + \frac{1}{t+iy} \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{t}{y^2 + t^2} dy = \arctan\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

Exercice 9. (Quelque chose d'amusant) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que, pour λ -presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0$.

Corrigé. On écrit, en utilisant le théorème de Fubini pour les fonctions positives :

$$\int_{\mathbb{R}} dy \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} dx dy \mathbb{1}_{\{f(x)=y\}} = \int_{\mathbb{R}} dx \lambda(\{y \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = \int_{\mathbb{R}} 0 \cdot dx = 0.$$

Le résultat en découle, car une fonction positive d'intégrale nulle est presque partout nulle.

Autre solution. Pour $m, n \geq 1$, on note

$$A_{m,n} = \left\{ y \in \mathbb{R} : \lambda\left(\{f^{-1}(\{y\}) \cap [-m, m]\}\right) > \frac{1}{n} \right\}.$$

Il est facile de voir que $A_{m,n}$ est fini (de cardinal inférieur à $2mn$). Ainsi,

$$\{y \in \mathbb{R} : \lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) > 0\} = \bigcup_{m,n \geq 1} A_{m,n}$$

est dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. Ceci conclut.

Exercice 10. (Intégration par parties pour l'intégrale de Stieljes) Soit $F, G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions croissantes, continues à droite, bornées telles que $F(-\infty) = G(-\infty) = 0$. On note dF et dG leurs mesures de Stieljes (voir l'exercice 2 du DM 2).

1. Montrer que, pour tous $a < b$, on a

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{]a,b]} F(t) dG(t) + \int_{]a,b]} G(t-) dF(t).$$

2. Soit $a < b$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur G et F pour que

$$F(b)G(b) = F(a)G(a) + \int_{]a,b]} F(t) dG(t) + \int_{]a,b]} G(t) dF(t),$$

c'est-à-dire pour que l'intégration par parties se passe "normalement".

Remarque. On peut généraliser l'intégrale de Stieljes et l'intégration par partie démontrée à la question 1. aux fonctions F et G continues à droite et à variation finie sur les intervalles bornés (qui sont exactement les fonctions s'écrivant comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite). Les mesures de Stieljes dF et dG sont alors des mesures de Radon signées (qui seront étudiées prochainement dans le cours).

Corrigé.

1. On procède comme dans l'exercice 2. On remarque que F est intégrable sur $]a, b]$ pour dG car F est mesurable et bornée et dG est une mesure finie. Ainsi, $\int_{]a, b]} F dG < \infty$ et on a

$$\begin{aligned}
 F(b)(G(b) - G(a)) - \int_{]a, b]} F(t) dG(t) &= \int_{]a, b]} (F(b) - F(t)) dG(t) = \int_{]a, b]} \left(\int_{]t, b]} dF(s) \right) dG(t) \\
 &= \int_{]a, b]} \left(\int_{]a, b]} \mathbb{1}_{s > t} dF(s) \right) dG(t) = \int_{]a, b]} \left(\int_{]a, b]} \mathbb{1}_{s > t} dG(t) \right) dF(s) \\
 &= \int_{]a, b]} \left(\int_{]a, s[} dG(t) \right) dF(s) = \int_{]a, b]} (G(s-) - G(a)) dF(s) \\
 &= \int_{]a, b]} G(s-) dF(s) - G(a)(F(b) - F(a)),
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Fubini-Tonelli. Cela donne le résultat attendu.

2. En revenant à la définition de la mesure de Stieljes, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$dF(\{x\}) = F\left(\left]-\infty, x\right] \setminus \bigcup_{n \geq 1} \left]-\infty, x - \frac{1}{n}\right]\right) = F(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(x - \frac{1}{n}\right) = F(x) - F(x-).$$

Ainsi, l'ensemble des atomes ponctuels de dF coïncide avec l'ensemble D_F des points de discontinuité de F (voir l'exercice 4 du DM 1 pour la définition d'un atome ponctuel). Comme dF est finie, D_F est au plus dénombrable.

On a l'égalité souhaitée ssi

$$\int_{]a, b]} (G(t) - G(t-)) dF(t) = 0.$$

Or, on a

$$G(t) - G(t-) = \sum_{x \in D_G \cap]a, b]} (G(x) - G(x-)) \mathbb{1}_{\{x\}}(t)$$

et donc, par le théorème de convergence monotone (seulement dans le cas où $D_G \cap]a, b]$ est infini et on l'écrit alors sous la forme d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
 \int_{]a, b]} (G(t) - G(t-)) dF(t) &= \sum_{x \in D_G \cap]a, b]} (G(x) - G(x-)) dF(\{x\}) \\
 &= \sum_{x \in D_G \cap]a, b]} (G(x) - G(x-)) (F(x) - F(x-)) \\
 &= \sum_{x \in D_G \cap D_F \cap]a, b]} (G(x) - G(x-)) (F(x) - F(x-)),
 \end{aligned}$$

car, si $x \notin D_F$, alors $F(x) - F(x-) = 0$. Pour tout $x \in D_G \cap D_F$, on a $(G(x) - G(x-))(F(x) - F(x-)) > 0$, donc on a l'égalité souhaitée ssi

$$D_G \cap D_F \cap]a, b] = \emptyset,$$

c'est-à-dire F et G n'ont aucun point de discontinuité en commun sur $]a, b]$.



Exercice 11. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} \lambda_n(dx),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ et λ_n désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Corrigé. La matrice A est symétrique définie positive donc il existe K une matrice symétrique définie positive telle que $A = K^2$. Soit $\phi: x \in \mathbb{R}^n \mapsto Kx$. L'application ϕ est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $|\text{Jac}(\phi)| = \det(K)$. On a donc d'après le théorème du changement de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} \lambda_n(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Kx, Kx \rangle} \lambda_n(dx) = (\det(K))^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n.$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n = \prod_{1 \leq i \leq n} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_i^2} dx_i \right).$$

Or pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x \rangle} \lambda_n(dx) = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det(A)}}.$$



Exercice 12. Soient μ et ν deux mesures σ -finies sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble $D_\mu = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est fini ou dénombrable.
2. Montrer que

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\}) \nu(\{x\}),$$

où $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

Corrigé.

1. Soit $(E_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de boréliens de $\mathbb{R}$ telle que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 0} E_n$ et telle que $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 0$. On note $D_n = \{x \in E_n : \mu(x) \geq 1/n\}$. Si D_n est infini alors il contient une suite $(y_m)_{m \geq 1}$ et

$$\mu(E_n) \geq \mu(D_n) \geq \mu(\{y_m, m \geq 1\}) = \sum_{m \geq 1} \mu(\{y_m\}) \geq \sum_{m \geq 1} \frac{1}{n} = \infty,$$

ce qui est impossible. On en déduit donc que D_n est fini. Puis $D = \bigcup_{n \geq 0} D_n$ est fini ou dénombrable.

2. D'après le théorème de Fubini-Tonelli appliqué à $\mu \otimes \nu$, on a

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_\Delta(x, y) \mu(dx) \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{y\}) \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{x \in D_\mu} \mu(\{x\}) \mathbb{1}_{\{x=y\}} \nu(dy).$$

On introduit $\tilde{\mu} := \sum_{x \in D_\mu} \mu(\{x\}) \delta_x$ qui est une mesure σ -finie sur $\mathbb{R}$. Alors, l'égalité précédente donne, en appliquant de nouveau le théorème de Fubini-Tonelli à $\tilde{\mu} \otimes \nu$,

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \tilde{\mu} \otimes \nu(\Delta).$$

Ainsi, on a, en appliquant l'égalité précédente à $(\nu, \tilde{\mu})$ au lieu de (μ, ν) ,

$$\tilde{\mu} \otimes \nu(\Delta) = \nu \otimes \tilde{\mu}(\Delta) = \tilde{\nu} \otimes \tilde{\mu}(\Delta) = \tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}(\Delta).$$

On obtient alors, avec le théorème de Fubini-Tonelli appliqué à $\tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}$,

$$\mu \otimes \nu(\Delta) = \tilde{\mu} \otimes \tilde{\nu}(\Delta) = \sum_{x \in D_\mu} \mu(\{x\}) \sum_{y \in D_\nu} \nu(\{y\}) \mathbb{1}_{\{x=y\}} = \sum_{x \in D_\mu \cap D_\nu} \mu(\{x\}) \nu(\{x\}) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\}) \nu(\{x\}).$$



Exercice 13. (Inégalité FKG) Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur $\mathbb{R}$ et μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$. Soit f et g deux fonctions $(\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables et monotones de même sens. On suppose de plus que les fonctions f , g et fg sont dans $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu.$$

Corrigé. On considère la fonction $F(x, y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$. La fonction F est positive donc $\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} F(x, y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \geq 0$. De plus, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ donc d'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)| |g(y)| \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu \int_{\mathbb{R}} |g| \, d\mu < \infty.$$

Ainsi, la fonction $(x, y) \mapsto f(x)g(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. De même $fg \in L^1(\mathbb{R})$ et μ est une mesure de probabilité, donc $(x, y) \mapsto f(x)g(x) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On peut donc écrire

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} F(x, y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = 2 \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x)g(x) \, d\mu(x) \, d\mu(y) - 2 \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x)g(y) \, d\mu(x) \, d\mu(y).$$

Et d'après le théorème de Fubini-Lebesgue, on a

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x)g(x) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) \left(\int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \right) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} fg \, d\mu,$$

et

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(x)g(y) \, d\mu(x) \, d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu \int_{\mathbb{R}} g \, d\mu,$$

ce qui nous donne le résultat.



Fin