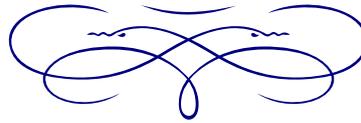




TD 3 – Mesure de Lebesgue et construction de mesures



1 – Petites questions



1. Un ouvert de \mathbb{R} de mesure de Lebesgue finie est-il borné ?
2. Un borélien de \mathbb{R} de mesure de Lebesgue strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Existe-t-il un ouvert dense de $[0, 1]$ de mesure de Lebesgue nulle ?
4. Existe-t-il un ouvert dense de $[0, 1]$ de mesure de Lebesgue strictement inférieure à 1 ?

2 – Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue



Exercice 1. (Théorème fondamental de l'analyse)

1. (a) Soit f une fonction dérivable sur $]0, 1[$, continue en 0 et en 1 et de dérivée f' bornée sur $]0, 1[$.
Montrer que

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0).$$

- (b) Montrer qu'on ne peut pas remplacer l'hypothèse " f dérivable sur $]0, 1[$ " par " f dérivable presque partout sur $]0, 1[$ ".
2. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f :]a, b[\rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est *calculus-intégrable* s'il existe $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ de dérivée f et alors on pose

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a).$$

- (a) Trouver une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0, 1]$ qui n'est pas calculus-intégrable.
- (b) Trouver une fonction calculus-intégrable sur $[0, 1]$ qui n'est pas Lebesgue-intégrable.
- (c) On dit que f est *Cauchy-Lebesgue-intégrable* sur $[a, b]$ s'il existe $a = a_0 < \dots < a_N = b$ tels que, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, il existe une suite croissante d'intervalles $(I_n^i)_{n \geq 0}$ telle que $\bigcup_{n \geq 0} I_n^i =]a_{i-1}, a_i[$, f est Lebesgue-intégrable sur I_n^i pour tout $n \geq 0$ et

$$\int_{I_n^i} f(x) dx$$

converge quand $n \rightarrow \infty$ et alors on pose

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_{i=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I_n^i} f(x) dx.$$

Trouver une fonction calculus-intégrable sur $[0, 1]$ qui n'est pas Cauchy-Lebesgue-intégrable.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

3 – Unicité de mesures

Exercice 2. (Unicité pour les mesures σ -finies) Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soit μ et ν des mesures sur (E, \mathcal{A}) telles que

- ▷ il existe une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ stable par intersections finies telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ et $\forall A \in \mathcal{C}, \mu(A) = \nu(A)$,
- ▷ il existe $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles de \mathcal{C} telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n), \nu(E_n) < \infty$.

Montrer que $\mu = \nu$.

Remarque. Si μ est une mesure sur (E, \mathcal{A}) , on dit que μ est σ -finie s'il existe $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles de \mathcal{A} tels que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \mu(E_n) < \infty$.

Exercice 3. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. On suppose que pour tous $a < b$, f est intégrable sur $]a, b[$ et

$$\int_{]a, b[} f(x) dx = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ -p.p.

4 – Mesures régulières

Exercice 4. (Régularité des mesures boréliennes) Soit (E, d) un espace métrique et μ une mesure sur $(E, \mathcal{B}(E))$. On dit que μ est extérieurement régulière si, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\}.$$

On dit que μ est intérieurement régulière si, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset A\}.$$

Enfin, on dit que μ est régulière si elle est extérieurement et intérieurement régulière.

1. Montrer que si μ est finie, alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\} \\ &= \sup\{\mu(F) : F \text{ fermés}, F \subset A\}. \end{aligned}$$

Indication. On pourra montrer que l'ensemble des boréliens A vérifiant les deux égalités est une tribu contenant les ouverts de E .

2. Que se passe-t-il si μ est seulement supposée σ -finie ?
3. Montrer que la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} est régulière.

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. Soit μ et ν deux mesures positives sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que, pour tous $a < b \in \mathbb{R}$,

$$\mu(]a, b[) \leq \nu(]a, b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Indication. Utiliser la question 1 de l'exercice 4.

Exercice 6. (*Ensembles de Cantor*) Soit $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1[$, et soit $K_0 = [0, 1]$. On définit une suite d'ensembles $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la façon suivante : connaissant K_n , qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K := \bigcap_{n \geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K .
3. On note K^3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On l'appelle l'ensemble de Cantor triadique. Vérifier que

$$K^3 = \left\{ \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{3^n} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

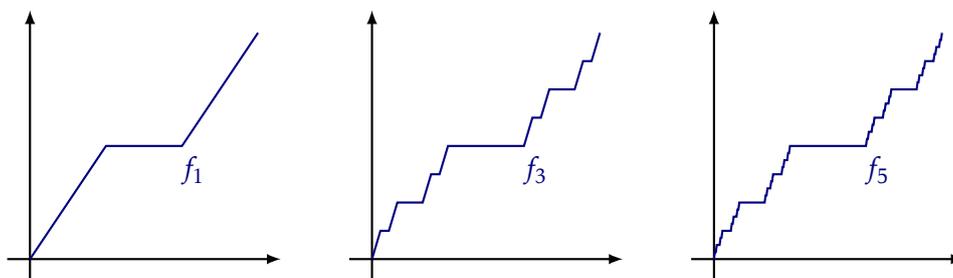
et qu'il est de mesure de Lebesgue nulle.

Exercice 7. (*L'escalier du diable*) On considère $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ définie par :

- ▷ Pour $x \in [0, 1]$, $f_0(x) = x$.
- ▷ La fonction f_1 est la fonction affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1, et $\frac{1}{2}$ sur $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.
- ▷ On passe de même de f_n à f_{n+1} en remplaçant f_n sur chaque intervalle $[u, v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{1}{2}(f_n(u) + f_n(v))$ sur $[\frac{2u+v}{3}, \frac{2v+u}{3}]$.

On note K^3 l'ensemble de Cantor triadique défini dans l'exercice 6.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue croissante.
2. Montrer que si $]a, b[\subset (K^3)^c$ alors f est constante sur $]a, b[$.
3. En déduire que f est presque partout dérivable de dérivée nulle.



Exercice 8. On munit \mathbb{R} de la mesure de Lebesgue.

1. Deux compacts homéomorphes de \mathbb{R} ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
2. (★) Existe-t-il un borélien A de \mathbb{R} tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I , on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

