TD 3 – Mesure de Lebesgue et construction de mesures

1 – Petites questions

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue finie est-il borné ?
2. Un borélien de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Existe-t-il un ouvert dense de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue nulle ?
4. Existe-t-il un ouvert dense de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue strictement inférieure à 1 ?

Corrigé.

1. Non : par exemple $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1/2^n[$.
2. Non : l'ensemble $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ est de mesure 1 et est d'intérieur vide.
3. Non un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ne peut pas avoir mesure de Lebesgue nulle : si U est un ouvert non vide de $[0,1]$, alors on peut choisir $x \in U \cap]0,1[$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset U$, donc $\lambda(U) \geq 2\varepsilon > 0$.
4. Oui : si on numérote $(q_n)_{n\geq 1}$ tous les rationnels de $[0,1]$, et qu'on construit
$$A_\varepsilon = \bigcup_{n\geq 1} \left] q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n} \right[$$
on obtient un ouvert de mesure inférieure à 2ε et dense (puisqu'il contient tous les rationnels).

2 – Intégration par rapport à la mesure de Lebesgue

Exercice 1. (*Théorème fondamental de l'analyse*)

1. (a) Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$, continue en 0 et en 1 et de dérivée f' bornée sur $]0,1[$. Montrer que
$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = f(1) - f(0).$$
   (b) Montrer qu'on ne peut pas remplacer l'hypothèse "f dérivable sur $]0,1[$" par "f dérivable presque partout sur $]0,1[$".
2. Soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f\colon\ ]a,b[\to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est *calculus-intégrable* s'il existe $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ de dérivée f et alors on pose
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a).$$
   (a) Trouver une fonction Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas calculus-intégrable.
   (b) Trouver une fonction calculus-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas Lebesgue-intégrable.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

(c) On dit que f est *Cauchy-Lebesgue-intégrable* sur $[a,b]$ s'il existe $a = a_0 < \cdots < a_N = b$ tels que, pour tout $i \in [\![1,N]\!]$, il existe une suite croissante d'intervalles $(I_n^i)_{n\geq 0}$ telle que $\bigcup_{n\geq 0} I_n^i =]a_{i-1}, a_i[$, f est Lebesgue-intégrable sur I_n^i pour tout $n \geq 0$ et

$$\int_{I_n^i} f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge quand $n \to \infty$ et alors on pose

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^N \lim_{n\to\infty} \int_{I_n^i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Trouver une fonction calculus-intégrable sur $[0,1]$ qui n'est pas Cauchy-Lebesgue-intégrable.

Corrigé.

1.(a) On définit sur $[0,1]$ la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ par

$$g_n(x) := \begin{cases} n(f(x+1/n) - f(x)) & \text{si } x \in [0, 1-1/n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x \in]0,1[$ fixé, $g_n(x)$ converge vers $f'(x)$. Soit $M = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, qui est fini par hypothèse. D'après le théorème des accroissements finis, $|g_n(x)| \leq M$ pour tout $x \leq 1-1/n$, et cette inégalité est clairement vraie pour $x \in]1-1/n, 1]$. Ainsi, $|g_n(x)| \leq M$ pour tout $x \in [0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

On note $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, qui est une intégrale de Riemann car f est continue, donc on sait déjà que F est dérivable sur $[0,1]$ de dérivée f. On a alors, en utilisant un changement de variable par translation (qui est justifié car on travaille avec l'intégrale de Riemann)

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x &= n\int_0^{1-1/n} f(x+1/n)\,\mathrm{d}x - n\int_0^{1-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= n\int_{1/n}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - n\int_0^{1-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= n(F(1) - F(1-1/n)) - n(F(1/n) - F(0)) \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} F'(1) - F'(0) = f(1) - f(0). \end{aligned}$$

On a ainsi montré ce qu'il fallait (car l'intégrale de Lebesgue de g_n est la même que son intégrale de Riemann).

Remarque. Il existe une fonction f dérivable sur $[0,1]$, de dérivée f' bornée telle que f' ne soit pas Riemann intégrable (mais elle est difficile à construire !). On a donc strictement étendu le théorème fondamental de l'analyse grâce à l'intégrale de Lebesgue.

(b) On peut prendre $f = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$.

Remarque. Pour un exemple plus intéressant, où f est dérivable presque partout sur $[0,1]$ et aussi continue sur $[0,1]$ mais ne vérifie pas le théorème fondamental de l'analyse, voir l'exercice 7.

2.(a) On peut prendre $f = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$. Par le théorème de Darboux, f n'est la dérivée d'aucune fonction sur $]0,1[$ car elle ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires

(b) On considère $F\colon x \mapsto x\sin(1/x)$ qui est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$ de dérivée $f\colon x \mapsto \sin(1/x) - \cos(1/x)/x$ qui n'est pas Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$.

Pour montrer que f n'est pas Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$, il suffit de montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}x = \infty.$$

Pour cela, on remarque que $[0,1]$ est contenu dans $]0,2/\pi]$ que l'on découpe

$$]0,2/\pi] = \bigsqcup_{n\geq 1} \left]\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}, \frac{1}{n\pi-\frac{\pi}{2}}\right]$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}x &\geq \sum_{n\geq 1}\int_{(n\pi+\frac{\pi}{2})^{-1}}^{(n\pi-\frac{\pi}{2})^{-1}} \frac{1}{x}\left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1}\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y}\left|\cos(y)\right| \mathrm{d}y \\ &\geq \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \left|\cos(y)\right| \mathrm{d}y = 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}} = \infty,\end{aligned}$$

ce qui montre bien la non-Lebesgue-intégrabilité de f (mais elle est Cauchy-Lebesgue-intégrable sur $[0,1]$, c'est-à-dire elle admet une intégrale impropre).

(c) L'idée est de créer un point d'accumulation de "problèmes d'intégrabilité". On pose

$$g\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

qui est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$g'\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 2x\sin(1/x^2) - \frac{2}{x}\cos(1/x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Notons que l'intérêt de cette fonction par rapport à celle de la question 2.(b) est d'être aussi dérivable en 0. Alors g' n'est pas Lebesgue-intégrable au voisinage de 0 (cela se montre de manière analogue à la question précédente). On modifie g en une fonction $\tilde{g}$ qui coïncide avec g sur $[-1/2,1/2]$ qui est nulle sur $]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. On a ainsi créé notre brique élémentaire, qui est une fonction à support dans $[-1,1]$, bornée et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais dont la dérivée n'est pas Lebesgue-intégrable au voisinage de 0. On va accumuler ces briques au voisinage de 1, en les rendant de plus en plus petites afin que leurs supports ne se chevauchent pas.

On pose $a_n \coloneqq 1-1/n$ pour $n \geq 1$ et

$$F\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n\geq 1}\frac{\tilde{g}(2^n(x-a_n))}{2^n}$$

où les différentes fonctions apparaissant dans la somme sont à supports disjoints à partir d'un certain rang (s'en convaincre).

La fonction F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (le seul point qui peut être problématique est en 1, on peut remarquer que l'on a la majoration $|F(1-x)| \leq 2\,\|\tilde{g}\|_\infty\, 2^{-1/x}$ qui tend exponentiellement vite vers 0 quand $x \to 0$) de dérivée

$$f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n\geq 1}\tilde{g}'(2^n(x-a_n))$$

La fonction f ainsi construite est calculus-intégrable sur $[0,1]$ mais pas Cauchy-Lebesgue-intégrable, car elle n'est pas Lebesgue-intégrable au voisinage de chaque a_n.

Remarque. Ici le nombre d'endroits qui posent problème est dénombrable. On peut encore faire "pire" en procédant d'une manière similaire à la dernière question du DM 2.

3 – Unicité de mesures

Exercice 2. (*Unicité pour les mesures σ-finies*) Soit $(E,\mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit μ et ν des mesures sur $(E,\mathcal{A})$ telles que

- il existe une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ stable par intersections finies telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ et $\forall A \in \mathcal{C}, \mu(A) = \nu(A)$,
- il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{C}$ telle que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n), \nu(E_n) < \infty$.

Montrer que $\mu = \nu$.
Remarque. Si μ est une mesure sur $(E,\mathcal{A})$, on dit que μ est *σ-finie* s'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{A}$ tels que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) < \infty$.

Corrigé. Notons, pour tout n, μ_n la restriction de μ à E_n et ν_n la restriction de ν à E_n :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) \text{ et } \nu_n(A) = \nu(A \cap E_n).$$

Alors pour tout $A \in \mathcal{C}$, on a $\mu_n(A) = \mu(A \cap E_n) = \nu(A \cap E_n) = \nu_n(A)$ car $A \cap E_n \in \mathcal{C}$ (car $A, E_n \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ stable par intersections finies). Donc on peut appliquer le théorème d'unicité pour les mesures finies à μ_n et ν_n (en notant que $\mu_n(E) = \mu(E_n) = \nu(E_n) = \nu_n(E) < \infty$), et on trouve $\mu_n = \nu_n$. Finalement, en utilisant les propriétés de limite croissante des mesures, pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A \cap E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(A \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \uparrow \nu(A \cap E_n) = \nu(A),$$

donc $\mu = \nu$.

Exercice 3. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. On suppose que pour tous $a < b$, f est intégrable sur $]a,b[$ et

$$\int_{]a,b[} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

Corrigé. *Première méthode* : Soient f^+ et f^- respectivement les parties positive et négative de f, et les mesures positives $\mathrm{d}\nu_+ = f^+\mathrm{d}\lambda$ et $\mathrm{d}\nu_- = f^-\mathrm{d}\lambda$. On a, pour tous $a < b$, $\nu_+(]a,b[) = \nu_-(]a,b[)$. Or ν_+ et ν_- sont des mesures boréliennes positives, σ-finies pour la même suite d'ensemble $([-n,n])_{n\in\mathbb{N}}$ donc le théorème d'unicité des mesures (la version σ-finie présentée dans l'exercice 2) implique $\nu_+ = \nu_-$. Ainsi,

$$\int_{\mathbb{R}} f\mathbb{1}_{\{f>0\}}\,\mathrm{d}\lambda = \nu_+(\{f>0\}) = \nu_-(\{f>0\}) = 0,$$

car $f^+\mathbb{1}_{\{f>0\}} = f\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ et $f^-\mathbb{1}_{\{f>0\}} = 0$. Or $f\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ est une fonction positive donc $f\mathbb{1}_{\{f>0\}} = 0$ λ-p.p. De même, $f\mathbb{1}_{\{f<0\}} = 0$ λ-p.p. Donc $f = 0$ λ-p.p.
Deuxième méthode : Soit $n \in \mathbb{N}$. On vérifie que la classe des boréliens A tels que $\int_{A\cap[-n,n]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ est une classe monotone (pour la stabilité par union croissante on peut utiliser le théorème de convergence dominée car f intégrable sur $[-n,n]$). Elle contient les intervalles ouverts, qui forment une classe stable par intersections finies engendrant la tribu borélienne. On a donc $\int_{A\cap[-n,n]} f\,\mathrm{d}\lambda = 0$ pour tout borélien A d'après le lemme de la classe monotone. Comme $f\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ est limite croissante des $f\mathbb{1}_{\{f>0\}\cap[-n,n]}$, on obtient

$$\int_{\{f>0\}} f\,\mathrm{d}\lambda = 0$$

et on conclut comme dans la première méthode.

4 – Mesures régulières

Exercice 4. (*Régularité des mesures boréliennes*) Soit (E,d) un espace métrique et μ une mesure sur $(E,\mathcal{B}(E))$. On dit que μ est *extérieurement régulière* si, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\}.$$

On dit que μ est *intérieurement régulière* si, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compact}, K \subset A\}.$$

Enfin, on dit que μ est *régulière* si elle est extérieurement et intérieurement régulière.

1. Montrer que si μ est finie, alors, pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\}\\ &= \sup\{\mu(F) : F \text{ fermés}, F \subset A\}.\end{aligned}$$

   Indication. On pourra montrer que l'ensemble des boréliens A vérifiant les deux égalités est une tribu contenant les ouverts de E.

2. Que se passe-t-il si μ est seulement supposée σ-finie ?
3. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est régulière.

Corrigé.

1. Nommons les deux égalités souhaitées

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, A \subset U\} \tag{1}$$
$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) : F \text{ fermés}, F \subset A\}. \tag{2}$$

   Soit $\mathcal{C}$ la classe des ensembles $A \in \mathcal{B}(E)$ vérifiant les égalités (1) et (2). On veut montrer que $\mathcal{C} = \mathcal{B}(E)$ et pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu et que $\mathcal{C}$ contient tous les ouverts de E.

   Soit A un ouvert de E. Il est immédiat que A vérifie l'égalité (1). Pour (2), on remarque que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble

$$F_n = \left\{x \in E : d(x, A^c) \geq \frac{1}{n}\right\}$$

   est fermé. Par ailleurs $A = \bigcup_{n\geq 0} F_n$ car $A^c = \{x \in E : d(x, A^c) = 0\}$ car c'est un fermé. C'est une union croissante, donc $\mu(A) = \lim \uparrow \mu(F_n)$, ce qui montre l'égalité (1). Donc $\mathcal{C}$ contient tous les ouverts de E.

   Montrons que $\mathcal{C}$ est une tribu :

   - ▷ E est ouvert donc $E \in \mathcal{C}$.
   - ▷ Soit $A \in \mathcal{C}$. Alors on montre que A^c vérifie (1) à partir de (2) pour A et vice versa (en utilisant ici que μ est finie !). Donc $A^c \in \mathcal{C}$.
   - ▷ Soit $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ et $A := \bigcup_{n\geq 0} A_n$. Pour chaque $n \geq 0$, comme A_n vérifie (1), il existe U_n ouvert tel que $A_n \subset U_n$ et $\mu(U_n) \leq \mu(A_n) + \varepsilon 2^{-n}$. Alors $\bigcup_{n\geq 0} U_n$ est un ouvert contenant A et, comme μ est finie, on a

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} U_n\right) - \mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} U_n \setminus \bigcup_{n\geq 0} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} U_n \setminus A_n\right) \leq \sum_{n\geq 0} \mu(U_n \setminus A_n) \leq 2\varepsilon,$$

     donc A vérifie (1).

     Montrons à présent que A vérifie (2). Comme $\lim \uparrow \mu(\bigcup_{n=0}^{N} A_n) = \mu(A) < \infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right) \geq \mu(A) - \varepsilon.$$

Pour chaque $n \geq 0$, comme A_n vérifie (2), il existe F_n fermé tel que $F_n \subset A_n$ et $\mu(F_n) \geq \mu(A_n) - \varepsilon 2^{-n}$. Alors, $\bigcup_{n=0}^N F_n$ est un fermé inclus dans A et, comme μ est finie, on a

$$\mu(A) - \mu\left(\bigcup_{n=0}^N F_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^N A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n=0}^N F_n\right) + \varepsilon \leq \mu\left(\bigcup_{n=0}^N A_n \setminus F_n\right) + \varepsilon \leq \sum_{n=0}^N \mu(A_n \setminus F_n) + \varepsilon \leq 3\varepsilon,$$

et donc A vérifie (2) et ainsi $A \in \mathcal{C}$.

2. Si μ est seulement supposée σ-finie, l'égalité (2) est toujours vraie mais (1) devient fausse.
Montrons tout d'abord (2). On sait qu'il existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'ensembles de $\mathcal{A}$ tels que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n) < \infty$. Pour $A \in \mathcal{B}(E)$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n(A) := \mu(A \cap E_n)$. Alors μ_n est une mesure finie sur $(E, \mathcal{B}(E))$ donc μ_n vérifie (2). Ainsi, soit $A \in \mathcal{B}(E)$ et $\varepsilon > 0$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $F_n \subset A$ fermé tel que $\mu_n(F_n) \geq \mu_n(A) - \varepsilon = \mu_n(A \cap E_n) - \varepsilon$. Alors

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n(F_n) \geq \lim_{n\to\infty} \uparrow \mu(A \cap E_n) - \varepsilon = \mu(A) - \varepsilon$$

On obtient ainsi $\sup\{\mu(F) : F \text{ fermés}, F \subset A\} \geq \mu(A) - \varepsilon$ et on conclut en prenant $\varepsilon \to 0$.
Trouvons maintenant un contre exemple pour l'égalité (1). Par exemple, on peut considérer $\mathbb{Q}$ muni de la distance euclidienne et μ la mesure de comptage. Notons tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{Q}) = \mathbb{P}(\mathbb{Q})$, car $\mathcal{B}(\mathbb{Q})$ contient les singletons qui sont fermés et donc toutes les parties dénombrables de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Ensuite, la mesure μ est bien σ-finie et tout ouvert est de mesure infinie donc on a

$$\mu(\{0\}) = 1 < \infty = \inf\{\mu(U) : U \text{ ouvert}, 0 \in U\},$$

donc μ n'est pas extérieurement régulière.

3. Montrons que λ est régulière intérieurement. La mesure de Lebesgue est σ-finie avec pour suite $E_n = [-n, n]$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on définit F_n comme à la question précédente et on pose $K_n := F_n \cap E_n$ qui est compact car fermé borné dans $\mathbb{R}$. Alors on a toujours $\lambda_n(F_n) \geq \lambda_n(A \cap E_n) - \varepsilon$ et donc

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n(K_n) \geq \lim_{n\to\infty} \uparrow \lambda(A \cap E_n) - \varepsilon = \lambda(A) - \varepsilon,$$

ce qui montre que λ est régulière intérieurement.
Montrons à présent que λ est régulière extérieurement. Ici, au lieu d'utiliser un recouvrement de $\mathbb{R}$ croissant par les $[-n, n]$ pour $n \in \mathbb{N}$, on va plutôt utiliser un recouvrement disjoint par les $]n, n+1]$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$, on sait que pour $n \in \mathbb{Z}$, $\lambda_n := \lambda(\cdot \cap]n, n+1])$ est régulière extérieurement par la question 1, donc il existe U_n un ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $A \subset U_n$ et $\lambda_n(U_n) \leq \lambda_n(A) + \varepsilon 2^{-|n|}$. Alors, on pose $U'_n := U_n \cap]n, n+1+\varepsilon 2^{-|n|}[$ et $U' := \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U'_n$ qui est un ouvert contenant A. Ainsi on a

$$\lambda(U') \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(U'_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(U_n \cap]n, n+1]) + \frac{\varepsilon}{2^{|n|}} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda(A \cap]n, n+1]) + \frac{2\varepsilon}{2^{|n|}} = \lambda(A) + \frac{3\varepsilon}{2},$$

et cela montre que λ est régulière extérieurement.

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. Soit μ et ν deux mesures positives sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On suppose que, pour tous $a < b \in \mathbb{R}$,

$$\mu(]a, b[) \leq \nu(]a, b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leq \nu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Indication. Utiliser la question 1 de l'exercice 4.

Corrigé. Tout d'abord, on remarque que $\mu(]a, b[) \leq \nu(]a, b[)$ si $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Pour le voir, on peut par exemple utiliser la sigma additivité de μ et ν.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mu(U) \leq \nu(U)$. Il existe une suite d'intervalles $(]a_n, b_n[)_{n\geq 1}$, avec $a_n, b_n \in \mathbb{R} \cup \pm\infty$ telle que

$$U = \bigcup_{n\geq 0}]a_n, b_n[$$

où l'union est disjointe. Ainsi

$$\mu(U) = \sum_{n\geq 0} \mu(]a_n, b_n[) \leq \sum_{n\geq 0} \nu(]a_n, b_n[) = \nu(U).$$

À présent, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_n := \mu(\cdot \cap]-n, n[)$ et $\nu_n := \nu(\cdot \cap]-n, n[)$, qui sont des mesures finies par hypothèse. Pour U un ouvert de $\mathbb{R}$, on a toujours $\mu_n(U) \leq \nu_n(U)$ car $U \cap]-n, n[$ est ouvert. Puis, les mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ étant régulières extérieurement (par la question 1 de l'exercice 4), on a pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mu_n(A) = \inf\{\mu_n(U) : A \subset U, U \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} \leq \inf\{\nu_n(U) : A \subset U, U \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} = \nu_n(A).$$

On passe ensuite à la limite avec $n \to \infty$ pour obtenir $\mu(A) = \lim \uparrow \mu_n(A) \leq \lim \uparrow \nu_n(A) = \nu(A)$.

Exercice 6. (*Ensembles de Cantor*) Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite d'ensembles $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K := \bigcap_{n\geq 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.
3. On note K^3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On l'appelle l'ensemble de Cantor triadique. Vérifier que

$$K^3 = \left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

   et qu'il est de mesure de Lebesgue nulle.

Corrigé.

1. Chaque ensemble K_n est fermé donc K est fermé. De plus, $K \subset [0,1]$ donc K est compact.
   Montrons que l'on peut construire une bijection $\varphi : K \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si x est dans K, alors x est dans un des deux intervalles composant K_1. On pose $\varphi(x)_0 = 0$ si x est dans l'intervalle de gauche et $\varphi(x)_0 = 1$ si x est dans l'intervalle de droite. En répétant ce procédé, on construit une suite $\varphi(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que φ est une bijection. Ainsi, K n'est pas dénombrable.
   Par construction de φ, pour tous $x, y \in K$ et $n \geq 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_{n+1} si et seulement si $\varphi(x)_k = \varphi(y)_k$ pour tout $k \leq n$. Supposons qu'il existe un intervalle I de $[0,1]$ inclus dans K et non réduit à un point. Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. Alors, pour tout $n \geq 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_n donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ ce qui est absurde. Ainsi, K est d'intérieur vide.
   Enfin, soit $x \in K$. L'ensemble $\{y \in K : \forall k \leq n, \varphi(y)_k = \varphi(x)_k\}$ est infini et est constitué de points de K tous à distance au plus $1/2^{n+1}$ de x. Donc x est un point d'accumulation.
2. On montre par récurrence que $\lambda(K_n) = (1-d_0)\ldots(1-d_{n-1})$. Or $\lambda([0,1]) = 1$ donc $\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n)$. On a donc :

$$\sum_{n\geq 0} d_n < \infty \Rightarrow \lambda(K) = \prod_{n\geq 0} (1 - d_n) > 0,$$
$$\sum_{n\geq 0} d_n = \infty \Rightarrow \lambda(K) = 0.$$

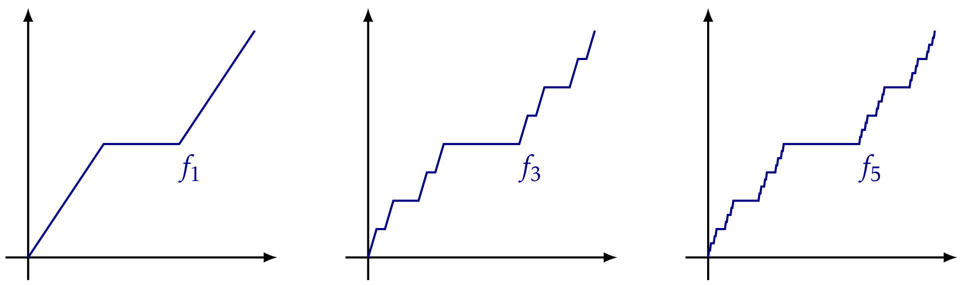
3. Il suffit de regarder la bijection construite dans la question 1 entre K et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et vérifier que si $x = \varphi((b_n)_n)$, alors $x = \sum \frac{2b_n}{3^n}$. Pour la mesure on utilise la question 2.

Exercice 7. (*L'escalier du diable*) On considère $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ définie par :

- ▷ Pour $x \in [0,1]$, $f_0(x) = x$.
- ▷ La fonction f_1 est la fonction affine par morceaux qui vaut 0 en 0, 1 en 1, et $\frac{1}{2}$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$.
- ▷ On passe de même de f_n à f_{n+1} en remplaçant f_n sur chaque intervalle $[u,v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction affine par morceaux qui vaut $\frac{1}{2}(f_n(u)+f_n(v))$ sur $\left[\frac{2u+v}{3}, \frac{2v+u}{3}\right]$.

On note K^3 l'ensemble de Cantor triadique défini dans l'exercice 6.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers une fonction $f : [0,1] \to [0,1]$ continue croissante.
2. Montrer que si $]a,b[\subset (K^3)^c$ alors f est constante sur $]a,b[$.
3. En déduire que f est presque partout dérivable de dérivée nulle.



Corrigé.

1. On vérifie que $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \leq 2^{-n}$. Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy pour la norme $\|-\|_\infty$. Par complétude de $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|-\|_\infty)$ il existe une fonction f continue telle que $f_n \to f$ au sens de $\|-\|_\infty$. La fonction f est croissante comme limite de fonctions croissantes.
2. Par construction de f.
3. La fonction f est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert $(K^3)^c$ donc f est dérivable de dérivée nulle sur $(K^3)^c$. Or $\lambda(K) = 0$. Ainsi f est dérivable de dérivée nulle λ-p.p.

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue.

1. Deux compacts homéomorphes de $\mathbb{R}$ ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
2. (★) Existe-t-il un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

Corrigé.

1. Non : $[0,1]$ et $[0,2]$. Oui : les espaces de Cantor sont tous homéomorphes, et certains sont de mesure nulle, d'autres non (voir exercice 6).
2. Oui, mais il n'est pas facile à construire : il faut prendre un ensemble de Cantor de mesure non nulle, puis dans chaque trou glisser un ensemble de Cantor plus petit, etc.
   Tâchons d'écrire ça proprement. On considère $(m_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels de $]1/2,1[$ telle que
   $$\prod_{n\geq 1} m_n > 0.$$

En outre, pour chaque $n \geq 1$, on considère une suite $(d_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\prod_{k\in\mathbb{N}}(1-d_k^n) = 1-m_n,$$

et on peut imposer en outre que $1-d_0^n \geq (1-m_n)/2$, ce qui donne $d_0^n \leq \frac{3}{4}$.
Montrons que l'on peut construire par récurrence une suite décroissante d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denses dans $[0,1]$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \bigcup_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} \left]a_{i_1,\ldots,i_n}, b_{i_1,\ldots,i_n}\right[,$$

où les intervalles son disjoints, et avec, pour tout $i_1,\ldots,i_{n-1} \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{i_n\in\mathbb{N}} \left]a_{i_1,\ldots,i_n}, b_{i_1,\ldots,i_n}\right[\text{ inclus et dense dans } \left]a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}, b_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\right[$$

mais aussi avec

$$\lambda\left(\bigcup_{i_n\in\mathbb{N}} \left]a_{i_1,\ldots,i_n}, b_{i_1,\ldots,i_n}\right[\right) = m_n\Big(b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}\Big) \tag{3}$$

et enfin avec, pour tout $i_1,\ldots,i_n \in \mathbb{N}$,

$$b_{i_1,\ldots,i_n} - a_{i_1,\ldots,i_n} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n. \tag{4}$$

On pose $U_0 =]0,1[$. Puis, on suppose, pour $n \geq 1$, que $U_0 \supset \cdots \supset U_{n-1}$ est bien défini avec les propriétés précédentes. On fixe $i_1,\ldots,i_{n-1} \in \mathbb{N}$, on considère le Cantor créé à partir de la suite $(d_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $]a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}, b_{i_1,\ldots,i_{n-1}}[$. Alors, il a mesure de Lebesgue $(1-m_n)(b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - a_{i_1,\ldots,i_{n-1}})$ et son complémentaire dans $]a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}, b_{i_1,\ldots,i_{n-1}}[$ s'écrit comme une union dénombrable d'intervalles disjoints

$$\bigcup_{i_n\in\mathbb{N}} \left]a_{i_1,\ldots,i_n}, b_{i_1,\ldots,i_n}\right[,$$

qui est dense dans $]a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}, b_{i_1,\ldots,i_{n-1}}[$, car le Cantor est d'intérieur vide, et sa mesure de Lebesgue est $m_n(b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - a_{i_1,\ldots,i_{n-1}})$. En outre, le premier intervalle retiré de $]a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}, b_{i_1,\ldots,i_{n-1}}[$ pour construire le Cantor à une longueur $d_n^0(b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - a_{i_1,\ldots,i_{n-1}})$ et les suivants ont une longueur inférieure à $\frac{1}{2}(b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - a_{i_1,\ldots,i_{n-1}})$ car ils sont inclus dans l'une des moitiés de l'intervalle. Comme $d_0^n \leq \frac{3}{4}$, on en déduit que, pour tout $i_n \in \mathbb{N}$,

$$b_{i_1,\ldots,i_n} - a_{i_1,\ldots,i_n} \leq \frac{3}{4}(b_{i_1,\ldots,i_{n-1}} - a_{i_1,\ldots,i_{n-1}}) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

en appliquant l'hypothèse de récurrence. Enfin, on pose

$$U_n := \bigcup_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} \left]a_{i_1,\ldots,i_n}, b_{i_1,\ldots,i_n}\right[$$

qui est bien un ouvert dense dans $[0,1]$ car dense dans U_{n-1} (par ce qui précède) qui est dense dans $[0,1]$ (par hypothèse de récurrence) et tel que $U_n \subset U_{n-1}$. Cela conclut la construction de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On prend alors

$$A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

qui est dense dans $[0,1]$ comme intersection dénombrable d'ouverts denses (théorème de Baire). Vérifions que, pour I un intervalle non vide inclus dans $[0,1]$, on a $0 < \lambda(A\cap I) < \lambda(I)$. Comme A est dense dans $[0,1]$, il existe $x \in A$ tel que x est dans l'intérieur de I. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que

$]x-(3/4)^k, x+(3/4)^k[\subset I$. Alors, comme $x \in U_k$, il existe $i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in]a_{i_1,\ldots,i_k}, b_{i_1,\ldots,i_k}[$ et, en utilisant (4), on en déduit que

$$J :=]a_{i_1,\ldots,i_k}, b_{i_1,\ldots,i_k}[\subset I.$$

Alors, il suffit de montrer que $0 < \lambda(A \cap J) < \lambda(J)$ pour obtenir que $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$. Comme l'intersection qui définit A est décroissante et que $\lambda(A) < \infty$, on a

$$\lambda(A \cap J) = \lim_{n \to \infty} \lambda(U_n \cap J).$$

Or, pour $n > k$, en procédant par récurrence à partir de (3), on a

$$\lambda(U_n \cap J) = \lambda\Bigg(\bigcup_{i_{k+1},\ldots,i_n \in \mathbb{N}}]a_{i_1,\ldots,i_n}, b_{i_1,\ldots,i_n}[\Bigg) = m_n \cdots m_{k+1} \big(b_{i_1,\ldots,i_k} - a_{i_1,\ldots,i_k}\big)$$

et donc on obtient

$$\lambda(A \cap J) = \big(b_{i_1,\ldots,i_k} - a_{i_1,\ldots,i_k}\big) \prod_{n>k} m_n = \lambda(J) \prod_{n>k} m_n.$$

Comme $\prod_{n>k} m_n \in]0,1[$, cela montre que $0 < \lambda(A \cap J) < \lambda(J)$.
Finalement, pour passer de $[0,1]$ à $\mathbb{R}$, on prend

$$\tilde{A} := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} n + A,$$

où $n + A$ est l'ensemble A translaté de n.

Fin