TD 2 – Intégration et théorèmes de convergence

"Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale."

— *Lebesgue 1901.*

1 – Petites questions

1. Soit μ une mesure finie sur $([0,1],\mathcal{B}([0,1]))$. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$, qui converge simplement vers 0. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=0.$$
2. On définit sur un espace mesuré $(E,\mathcal{A},\mu)$ une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geq 0}$ et une fonction mesurable f telle que $f_n\to f$ μ-p.p. quand $n\to\infty$. On suppose que
$$\sup_{n\geq 0}\int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu<\infty.$$
Montrer que f est intégrable.
3. (*Inégalité de Markov*) Soit $f\in\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$. Montrer que pour tout $A>0$,
$$\mu(\{|f|\geq A\})\leq\frac{1}{A}\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu.$$
4. Soit $f\in\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$. Montrer que $\mu(\{|f|=+\infty\})=0$. Que dire de la réciproque ?

Corrigé.

1. C'est une application immédiate du théorème de convergence dominée.
2. Il suffit d'utiliser le lemme de Fatou : comme $|f(x)|=\lim|f_n(x)|$, on a
$$\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu=\int_E\liminf_{n\to\infty}|f_n|\,\mathrm{d}\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_E|f_n|\,\mathrm{d}\mu\leq\sup_n\int|f_n|\,\mathrm{d}\mu<\infty.$$
3. Il suffit d'écrire :
$$\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu\geq\int_E|f|\mathbb{1}_{\{|f|\geq A\}}\,\mathrm{d}\mu\geq\int_E A\mathbb{1}_{\{|f|\geq A\}}\,\mathrm{d}\mu=A\mu(\{|f|\geq A\}).$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

4. D'après l'inégalité de Markov,

$$\mu(\{|f| \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int |f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On a d'autre part $\mu(\{|f| = +\infty\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f| \geq n\})$ (en effet, les ensembles $\{|f| \geq n\}$ sont décroissants en n, d'intersection égale à $\{|f| = +\infty\}$ et ils sont de mesure finie d'après l'inégalité de Markov).

La réciproque est clairement fausse (prendre la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu discrète et de la mesure de comptage).

2 – Théorèmes de convergence

Exercice 1. (*Uniforme continuité de l'intégrale*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ une fonction intégrable.

1. Montrer que

$$\lim_{y\to\infty} \int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f|>y\}} \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

2. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Corrigé.

1. La fonction f étant intégrable, elle est finie μ-p.p (cf petite question 4) et donc $\mathbb{1}_{\{|f|>y\}} \to 0$ μ-p.p. quand $y \to \infty$. Ainsi, $|f| \mathbb{1}_{\{|f|>y\}} \to 0$ μ-p.p. quand $y \to \infty$ et est dominée par $|f|$ donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f|>y\}} \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow[y\to\infty]{} 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Par la question 1., il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\delta_\varepsilon = \varepsilon/(2n_\varepsilon)$. Alors, pour $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) < \delta_\varepsilon$,

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu = \int_{A\cap\{|f|>n_\varepsilon\}} |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_{A\cap\{|f|\leq n_\varepsilon\}} |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n_\varepsilon\}} \, \mathrm{d}\mu + n_\varepsilon \mu(A) < \varepsilon,$$

ce qui conclut la question.

Exercice 2. Soit μ une mesure finie sur $(]0,1[, \mathcal{B}(]0,1[))$ et $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction positive, monotone et intégrable. Quelle est la limite de la suite $(\int_0^1 f(x^n) \, \mathrm{d}\mu(x))_{n\in\mathbb{N}}$?

Corrigé. La fonction f étant monotone, elle admet une limite à droite en 0 que nous noterons $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On traite séparément les cas f croissante et f décroissante.

- ▷ Si f est décroissante, alors la suite de fonctions positives $(f_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$f_n(x) = f(x^n), \quad x \in]0,1[,$$

est croissante et converge μ-p.p. vers α. Donc d'après le théorème de convergence monotone,

$$\int_{]0,1[} f(x^n) \, \mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{]0,1[} \alpha \, \mathrm{d}\mu = \alpha\mu(]0,1[).$$

- ▷ Si f est croissante (on a $\alpha < \infty$ dans ce cas), alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge λ-p.p. vers α. En outre, $f_1 = f$ est intégrable donc

$$\int_{]0,1[} f(x^n)\,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{]0,1[} \alpha\,\mathrm{d}\mu = \alpha\mu(]0,1[),$$

par le théorème de convergence dominée.

Exercice 3. À l'exception de la dernière question, on donnera des exemples qui n'utilisent pas la mesure de Lebesgue.

1. Donner un exemple de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ pour lesquelles l'inégalité est stricte dans le lemme de Fatou. Montrer qu'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de positivité.
2. Dans le théorème de convergence dominée, vérifier, en donnant des contre-exemples, que, si l'on oublie une hypothèse, la conclusion peut être mise en défaut.
3. Reprendre la question précédente avec le théorème de convergence monotone.
4. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $]0,1[$, avec $0 \leq f_n \leq 1$, et telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour aucun x de $]0,1[$.

Corrigé. Tout d'abord, voici quelques exemples utiles avec la mesure de Lebesgue :

- ▷ La bosse glissante : $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$.
- ▷ Le puits infini : $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.
- ▷ Le stroboscope infernal : $f_{n,k}(x) = \mathbb{1}_{](k-1)/n,k/n[}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Les deux premiers exemples ont leur équivalent avec des mesures discrètes :

- ▷ La bosse glissante : $f_n = \mathbb{1}_{\{n\}}$ avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
- ▷ Le puits infini (glissant) : $f_n = n^2\mathbb{1}_{\{n\}}$ avec la mesure $\tilde{\mu}$ sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\tilde{\mu}(\{n\}) = 1/n^2$.

1. Pour avoir une inégalité stricte, il y a deux pathologies possibles :
   (a) la $\liminf$ sous-estime la suite car sa masse est oscillante : $f_{2n} = \mathbb{1}_{\{0\}}$ et $f_{2n+1} = \mathbb{1}_{\{1\}}$ avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
   (b) la suite converge mais une partie de la masse "s'échappe" vers un lieu de mesure nulle :
      - ▷ $f_n = \mathbb{1}_{\{n\}}$ avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ pour une évasion à l'infini.
      - ▷ $f_n = \mathbb{1}_{\{1/n\}}$ et μ sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ définie par $\mu(A) = \#(A \cap \{1/n, n \geq 1\})$ pour une évasion en 0 qui est de μ-mesure nulle.
      - ▷ Le puits infini $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$ avec la mesure de Lebesgue pour un autre exemple d'évasion en zéro.

   Si on oublie la positivité, la pathologie (a) ne pose pas de problème car la $\liminf$ sous-estime toujours la suite, mais la pathologie (b) devient gênante car la masse qui s'échappe en l'infini est négative ! Il suffit donc de considérer $f_n = -\mathbb{1}_{\{n\}}$ avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.
2. Si on oublie la condition de domination : si on prend la bosse glissante ou le puits infini la conclusion est mise en défaut.
   Si on oublie la convergence presque partout : si on prend $f_n = (-1)^n\mathbb{1}_{\{0\}}$ avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, la conclusion est mise en défaut.

3. Si on oublie la croissance : si on prend la bosse glissante ou le puits infini, la conclusion est mise en défaut (ou même une suite qui ne converge pas μ-p.p.).

   Si on oublie la positivité : si on prend $f_n = -\mathbb{1}_{[\![n,\infty[\![}$ avec la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, la conclusion est mise en défaut.

   Remarque. On pourrait souhaiter construire un exemple où $(f_n)_{n\geq 0}$ est croissante, pas positive et telle que $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \nrightarrow \int \lim f_n \,\mathrm{d}\mu$ avec en outre $\int |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$ (ce qui n'est pas le cas avec $f_n = -\mathbb{1}_{[\![n,\infty[\![}$ et la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$). C'est en fait impossible : si f_0 est intégrable, alors elle est finie μ-p.p. donc on peut considérer $(f_n - f_0)_{n\geq 0}$ qui est croissante et avec des fonctions toutes mesurables et positives, donc par le théorème de convergence monotone on a $\int f_n - f_0 \,\mathrm{d}\mu \to \int (\lim f_n) - f_0 \,\mathrm{d}\mu$ et donc $\int f_n \,\mathrm{d}\mu \to \int \lim f_n \,\mathrm{d}\mu$, en utilisant de nouveau que f_0 est intégrable.

4. Prendre le stroboscope infernal, mais en le rendant continu : $f_{n,k}(x)$ est la fonction affine par morceaux reliant les points $(0,0)$, $((k-1)/n, 0)$, $((k-2/3)/n, 1)$, $((k-1/3)/n, 1)$, $(k/n, 0)$ et $(1,0)$ (faire un dessin !). En réindiçant cette suite sous la forme $(g_i)_{i\geq 0}$, on a construit une suite de fonctions continues de $]0,1[$ dans $]0,1[$ telle que $\int_0^1 g_i(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ mais $g_i(x)$ ne converge pour aucun $x \in]0,1[$ car $\liminf g_i(x) = 0 < 1 = \limsup g_i(x)$.

   Remarque. On a donc construit une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ telle que $\int |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0$ (i.e. convergence L^1) sans avoir pour autant $f_n \to f$ μ-p.p. Pour cela on a eu besoin d'une mesure diffuse. En effet si μ est une mesure discrète, donc portée sur un ensemble X dénombrable muni de $\mathcal{P}(X)$ comme tribu, alors la convergence dans L^1 implique la convergence μ-p.p. : si $\int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0$, alors pour tout $x \in X$ tel que $\mu(\{x\}) > 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \mu(\{x\})^{-1} \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \to 0$ et donc $f_n \to f$ μ-p.p. car l'ensemble $\{x \in X : \mu(\{x\}) = 0\}$ est de mesure nulle (car X dénombrable).

Exercice 4. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que f est intégrable. Étudier la convergence de la suite

$$\left(n \int_E \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) \mathrm{d}\mu \right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

2. Même question lorsque $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \infty$.

Corrigé.

1. Pour tout $x \in E$, $n \ln(1 + f(x)/n) \to f(x)$ lorsque $n \to \infty$, et de plus, comme f est positive, on a $n|\ln(1 + f/n)|\,\mathrm{d}\mu \leq f$, qui est une fonction intégrale positive indépendante de n. D'après le théorème de convergence dominée, $I_n \to \int_E f \,\mathrm{d}\mu$.

2. D'après le lemme de Fatou,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_E n \ln\left(1 + \frac{f}{n}\right) \mathrm{d}\mu \geq \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \infty.$$

   Ainsi $I_n \to \infty$.

Remarque. On peut aussi vérifier que $n \ln(1 + f/n)$ croît vers f quand $n \to \infty$, et appliquer, aussi bien pour 1. que pour 2., le théorème de convergence monotone.

Exercice 5. (*Quand est-ce que convergence p.p. implique convergence dans $\mathcal{L}^1$?*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$. Une famille $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions mesurables de E dans $\mathbb{R}$ est dite *uniformément intégrable* si

$$\lim_{c\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i| \,\mathrm{d}\mu = 0. \tag{1}$$

1. Montrer que toute famille finie de $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ est uniformément intégrable.
2. Montrer que la famille $(f_i)_{i\in I}$ est uniformément intégrable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont satisfaites :
   (a) $\sup_{i\in I}\int_E |f_i|\,\mathrm{d}\mu < \infty$,
   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \eta \Rightarrow \forall i \in I, \int_A |f_i|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.
3. Montrer que si les familles $(f_i)_{i\in I}$ et $(g_i)_{i\in I}$ sont uniformément intégrables, alors il en est de même pour la famille $(f_i+g_i)_{i\in I}$.
4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions qui converge μ-p.p. vers une fonction f. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(f_n)_{n\geq n_0}$ est uniformément intégrable si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)$ et

$$\int_E |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Corrigé.

1. Si I est fini, il suffit de montrer que $\lim_{c\to\infty}\int_{\{|f_i|\geq c\}}|f_i|\,\mathrm{d}\mu = 0$ pour $i \in I$ fixé. C'est ce qu'on a montré à la question 1 de l'exercice 1.
2. Montrons d'abord l'implication. On remarque que pour $i \in I$ et $c \geq 0$,

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu \leq c\mu(E) + \int_{\{|f_i|\geq c\}} |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

   D'après l'uniforme intégrabilité, il existe $C > 0$ tel que $\sup_{i\in I}\int_{\{|f_i|\geq C\}}|f_i|\,\mathrm{d}\mu < \infty$. On a alors

$$\sup_{i\in I}\int |f_i|\,\mathrm{d}\mu \leq C\mu(E) + \sup_{i\in I}\int_{\{|f_i|\geq C\}} |f_i|\,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

   ce qui prouve (a).
   Pour (b), on imite la preuve de l'uniforme continuité de l'intégrale (exercice 1) : on fixe $\varepsilon > 0$ et on choisit $C > 0$ tel que $\sup_{i\in I}\int_{\{|f_i|\geq C\}}|f_i|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon/2$. Si $\mu(A) \leq \varepsilon/(2C)$, on a pour tout $i \in I$:

$$\int_A |f_i|\,\mathrm{d}\mu \leq \int_{A,|f_i|\leq C} |f_i|\,\mathrm{d}\mu + \int_{|f_i|\geq C} |f_i|\,\mathrm{d}\mu \leq \mu(A)C + \int_{|f_i|\geq C} |f_i|\,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon,$$

   ce qui prouve (b).
   Montrons maintenant la réciproque. Notons $\gamma = \sup_{i\in I}\int |f_i|\,\mathrm{d}\mu < \infty$ par (a). D'après l'inégalité de Markov, pour $i \in I$ et $c \geq 0$ on a $\mu(\{|f_i| \geq c\}) \leq \gamma/c$. Fixons $\varepsilon > 0$ et soit $\eta > 0$ tel que la condition (b) soit vérifiée. Pour $c \geq \gamma/\eta$ on a alors , $\mu(\{|f_i| \geq c\}) \leq \eta$ pour tout $i \in I$, ce qui implique

$$\sup_{i\in I}\int_{\{|f_i|\geq c\}} |f_i|\,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon$$

   grâce à (b). Le résultat s'ensuit.
3. C'est une conséquence facile de la question 2. en utilisant l'inégalité triangulaire.
4. Montrons d'abord l'implication. Comme $\sup_{n\geq n_0}\int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu < \infty$, par la petite question 2., f est intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. On écrit, pour $c \geq 0$:

$$\int_E |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = \int_E \mathbb{1}_{|f_n-f|<c}|f_n - f|\,\mathrm{d}\mu + \int_E \mathbb{1}_{|f_n-f|\geq c}|f_n - f|\,\mathrm{d}\mu.$$

   D'après 1., f est uniformément intégrable, et donc d'après 3. la suite $(f_n-f)_{n\geq 1}$ est uniformément intégrable. Il existe donc $C > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\{|f_n-f|\geq C\}} |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon.$$

On a donc
$$\int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \le \int_E \mathbb{1}_{|f_n - f| < c} |f_n - f| \mathrm{d}\mu + \varepsilon.$$
Mais le premier terme de la quantité de droite tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée. On a donc $\int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \le 2\varepsilon$ pour n suffisamment grand, ce qui prouve l'implication désirée.

Montrons finalement la réciproque. Tout d'abord, comme $\int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$, on sait que cette intégrale est finie à partir d'un certain rang : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \ge n_0$, $f_n - f$ est intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \ge n_1, \quad \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \le \varepsilon.$$
En outre, $(f_n - f)_{n_0 \le n < n_1}$ est uniformément intégrable par la question 1. donc il existe $c > 0$ tel que
$$\forall C \ge c, \quad \sup_{n_0 \le n < n_1} \int_{\{|f_n - f| \ge C\}} |f_n - f| \mathrm{d}\mu \le \varepsilon.$$
En regroupant les deux inégalités précédentes, on a montré qu'il existe $c > 0$ tel que
$$\forall C \ge c, \quad \sup_{n \ge n_0} \int_{\{|f_n - f| \ge C\}} |f_n - f| \mathrm{d}\mu \le \varepsilon,$$
et donc $(f_n - f)_{n \ge n_0}$ est uniformément intégrable. Or f est intégrable par hypothèse, donc par la question 3., on obtient que la suite $(f_n)_{n \ge n_0}$ est uniformément intégrable, ce qui conclut l'exercice.

3 – Compléments (hors TD)

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que $\mu(E) < \infty$ et que f est une fonction complexe intégrable et telle qu'il existe $S \subset \mathbb{C}$ un fermé tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$ de mesure strictement positive on ait
$$M_A(f) = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, \mathrm{d}\mu \in S.$$
Montrer que $f(x) \in S$ pour μ-presque tout x.

Corrigé. L'ensemble S^c complémentaire de S est une réunion dénombrable de disques fermés, il suffit donc de prouver que si Δ est un disque fermé de centre α et de rayon r inclu dans le complémentaire de S, on a $\mu(f^{-1}(\Delta)) = 0$. Dans le cas contraire en posant $A = f^{-1}(\Delta)$ on a
$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, \mathrm{d}\mu - \alpha \le \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - \alpha| \le r,$$
c'est-à-dire $M_A(f) \in \Delta \subset S^c$, ce qui est impossible par hypothèse.

Exercice 7. (*Convergence en mesure*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. Soit $(f_n)_{n \ge 0}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite (f_n) converge vers f en mesure si pour tout $\varepsilon > 0$,
$$\mu(|f - f_n| > \varepsilon) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

1. (*Convergence $\mathcal{L}^1$ implique convergence en mesure*) Montrer que si $\int_E |f - f_n| \mathrm{d}\mu \to 0$, alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.

2. (*Convergence μ-p.p. implique convergence en mesure*) Montrer que si $f_n \to f$ μ-p.p., alors $f_n \to f$ en mesure. Remarquer que la réciproque est fausse.
3. (*Convergence en mesure implique convergence μ-p.p. d'une sous-suite*) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors on peut extraire une sous-suite de (f_n) qui converge μ-p.p. vers f.
4. (*Un théorème de convergence dominée plus fort*) On suppose que $f_n \to f$ en mesure et qu'il existe une fonction $g\colon E \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $|f_n| \le g$ μ-p.p. pour tout $n \ge 1$.
   (a) Montrer que $|f| \le g$ μ-p.p.
   (b) En déduire à l'aide de la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale que
$$\int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0.$$
5. (*L'espace $L^0(E,\mu)$*) On note $L^0(E,\mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables quotienté par la relation d'égalité μ-p.p.
   (a) Montrer que l'on définit une distance sur $L^0(E,\mu)$ par
$$\delta(f,g) = \inf\{\varepsilon > 0, \mu(|f-g| > \varepsilon) \le \varepsilon\}$$
   et que celle-ci métrise la convergence en mesure.
   (b) Montrer que $(L^0(E,\mu), \delta)$ est complet.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de distance sur $L^0(E,\mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p.

Corrigé.

1. On suppose que $\int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Markov,
$$\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu,$$
   ce qui implique que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$.
   Réciproquement, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\ge1}$ définie sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ par
$$f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}.$$
   Alors $(f_n)_{n\ge1}$ converge en mesure vers 0. En effet pour tout $n \ge 1$, $\lambda(f_n > 0) = 1/n$. En revanche, pour tout $n \ge 1$, $\int_{[0,1]} f_n(x)\, dx = 1$.
2. On suppose que $f_n \to f$ μ-p.p. Soit $\varepsilon > 0$. Alors,
$$\mu\left(\bigcap_{n\ge1} \bigcup_{m\ge n} \{|f_m - f| > \varepsilon\}\right) = 0.$$
   Or, la suite $(\bigcup_{m\ge n}\{|f_m - f| > \varepsilon\})_{n\ge0}$ est décroissante pour l'inclusion et μ est une mesure finie, donc on a,
$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m\ge n} \{|f_m - f| > \varepsilon\}\right) = 0.$$
   En particulier, $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0$.
   Réciproquement, considérons la suite de fonctions $(f_{n,k})_{n\ge1, 1\le k\le n}$ définie sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ par (c'est l'analogue non continu de l'exemple de la question 4. de l'exercice 3)
$$f_{n,k} = \mathbb{1}_{[(k-1)/n, k/n]}.$$
   Alors $(f_{n,k})_{n\ge1,1\le k\le n}$ converge en mesure vers 0. En effet, pour tout $n \ge 1$ et tout $1 \le k \le n$, $\lambda(f_{n,k} > 0) = 1/n$. En revanche, $\limsup f_{n,k} = \mathbb{1}_{[0,1]}$, donc la convergence n'a pas lieu μ-p.p.

3. On peut construire une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$,
$$\mu\left(\left|f_{n_k} - f\right| > \frac{1}{k}\right) \leq 2^{-k}.$$
Comme la suite des 2^{-k} est sommable, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a
$$\mu\left(\limsup_{k\to\infty}\left\{\left|f_{n_k} - f\right| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$
c'est-à-dire, pour μ-presque tout x, il existe $k_0(x)$ tel que pour tout $k \geq k_0(x)$, $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq 1/k$. Cela implique que $f_{n_k} \to f$ μ-p.p. quand $k \to \infty$.

4. *Première méthode* : par l'absurde. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$,
$$\int_E \left|f_{n_k} - f\right| \mathrm{d}\mu \geq \varepsilon. \tag{2}$$
Or $f_{n_k} \to f$ en mesure quand $k \to \infty$ donc d'après la question 3., on peut extraire une sous-suite $(f_{n_{k_j}})_{j\geq 0}$ de (f_{n_k}) telle que $f_{n_{k_j}} \to f$ μ-p.p. Or $|f_{n_{k_j}}| \leq g$ pour tout $j \geq 0$. Donc d'après le théorème de convergence dominée,
$$\int_E \left|f_{n_{k_j}} - f\right| \mathrm{d}\mu \xrightarrow[j\to\infty]{} 0.$$
Cela contredit l'inégalité (2).
Deuxième méthode : comme suggéré dans l'énoncé.
   (a) Vérifions tout d'abord que $|f| \leq g$ μ-p.p. Pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\mu(|f| > g + \varepsilon) \leq \mu(|f| > |f_n| + \varepsilon) \leq \mu(|f - f_n| > \varepsilon).$$
   Donc, $\mu(|f| > g + \varepsilon) = 0$. Ainsi, μ-p.p., pour tout $n \geq 1$, $|f| \leq g + 1/n$ et donc $|f| \leq g$.
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. On a
$$\begin{aligned}\int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu &= \int_{\{|f_n - f| \leq \varepsilon\}} |f_n - f| \mathrm{d}\mu + \int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |f_n - f| \mathrm{d}\mu \\ &\leq \varepsilon \mu(E) + 2\int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |g| \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$
   La fonction g étant intégrable, on a d'après la propriété d'uniforme continuité de l'intégrale,
$$2\int_{\{|f_n - f| > \varepsilon\}} |g| \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$
   Ainsi, $\limsup_{n\to\infty} \int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \leq \varepsilon\mu(E)$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\int_E |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$.

5. (a) Montrons que δ est une distance sur $L^0(E,\mu)$. Soit $f, g \in L^0(E,\mu)$. Il est évident que $\delta(f,f) = 0$ et $\delta(f,g) = \delta(g,f)$. Supposons $\delta(f,g) = 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, $\mu(|f - g| > 1/n) \leq 1/n$ et la suite $(\{|f - g| > 1/n\})_{n\geq 1}$ est croissante pour l'inclusion donc on a
$$\mu(f \neq g) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\{|f - g| > 1/n\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(|f - g| > 1/n) = 0,$$
   i.e. $f = g$ μ-p.p. Soit maintenant $f, g, h \in L^0(E,\mu)$. Posons $a = \delta(f,g)$ et $b = \delta(g,h)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$$\begin{aligned}\mu(|f - h| > a + b + 2\varepsilon) &\leq \mu(|f - g| + |g - h| > a + b + 2\varepsilon) \\ &\leq \mu(|f - g| > a + \varepsilon) + \mu(|g - h| > b + \varepsilon) \\ &\leq a + b + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Cela implique $\delta(f,h) \le \delta(f,g)+\delta(g,h)$. Ainsi δ définit bien une mesure sur $L^0(E,\mu)$.
Vérifions que δ métrise la convergence en mesure. Soit $f \in L^0(E,\mu)$ et $(f_n)_{n\ge1}$ une suite d'éléments de $L^0(E,\mu)$. On suppose tout d'abord que $f_n \to f$ en mesure. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \to 0$. Donc, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$. Ainsi, $\delta(f_n, f) \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$ ce qui montre que $\delta(f_n, f) \to 0$. Supposons maintenant que $\delta(f_n, f) \to 0$. Soit $\eta > 0$ fixé. Pour tout $\varepsilon \in]0,\eta]$, il existe n_0 tel que $\mu(|f_n - f| > \varepsilon) \le \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$. Ainsi, pour tout $n \ge n_0$,

$$\mu(|f_n - f| > \eta) \le \mu(|f_n - f| > \varepsilon) \le \varepsilon,$$

ce qui montre que $f_n \to f$ en mesure.

(b) Soit $(f_n)_{n\ge1}$ une suite de Cauchy pour δ. On pose $n_0 := 1$ et, pour chaque $k \ge 1$, on choisit $n_k > n_{k-1}$ tel que $\delta(f_p, f_q) < 2^{-k}$ pour tous $p, q \ge n_k$. Ainsi on a construit une suite extraite $(f_{n_k})_{k\ge1}$ telle que $\mu(|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| > 2^{-k}) \le 2^{-k}$ pour tout $k \ge 1$. Notons

$$A_k := \left\{ \left| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right| > 2^{-k} \right\}.$$

Alors $\sum_{k\ge1} \mu(A_k) < \infty$. Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli, $\mu(\limsup_k A_k) = 0$. Ainsi, la série

$$\sum_{k\ge1} \left| f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \right|$$

converge pour μ-presque tout x. Donc la suite $(f_{n_k}(x))_{k\ge1}$ converge pour μ-presque tout x. On note f sa limite μ-p.p. (on pose $f = 0$ sur l'ensemble de mesure nulle où f n'est pas définie, noter que f est bien définie μ-p.p.). Alors d'après la question 2., $f_{n_k} \to f$ en mesure. Ainsi $\delta(f_{n_k}, f) \to 0$ et donc $\delta(f_n, f) \to 0$.

(c) Supposons qu'il existe une distance d sur $L^0(E,\mu)$ qui métrise la convergence μ-p.p. D'après la question 2., on peut construire une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\ge0}$ sur $(E,\mathcal{A},\mu)$ qui converge en mesure vers 0 mais pas μ-p.p. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(f_{n_k})_{k\ge0}$ telle que $d(f_{n_k}, 0) \ge \varepsilon$ pour tout $k \ge 0$. Or $f_{n_k} \to 0$ en mesure. Donc, d'après la question 3., on peut construire une suite extraite $(f_{n_{k_j}})_{j\ge0}$ qui converge μ-p.p. vers 0. Cela contredit l'inégalité $d(f_{n_{k_j}}, 0) \ge \varepsilon$ pour tout $j \ge 0$.

Exercice 8. (✷) Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\ge1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Soit $f : (E,\mathcal{A},\mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable telle que

$$\int_E \left| \mathbb{1}_{A_n} - f \right| \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{1}_A$, μ presque partout.

Corrigé. Montrons d'abord que $|f| \le 2$ μ-p.p. À cet effet, on remarque que d'après l'inégalité triangulaire $\{|f| > 2\} \subset \{|f - \mathbb{1}_{A_n}| > 1\}$, donc d'après l'inégalité de Markov

$$\mu(\{|f| > 2\}) \le \int_E \left| \mathbb{1}_{A_n} - f \right| \mathrm{d}\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, $\mu(\{|f| > 2\}) = 0$, ce qui prouve que $|f| \le 2$ μ-p.p.
Pour prouver que $f = \mathbb{1}_A$, μ-p.p, nous allons démontrer que $f = f^2$ μ-p.p. (et alors $A = \{f = 1\}$). À cet effet, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_E \left| f - f^2 \right| \mathrm{d}\mu &\le \int_E \left| f - \mathbb{1}_{A_n} \right| \mathrm{d}\mu + \int_E \left| f^2 - \mathbb{1}_{A_n} \right| \mathrm{d}\mu \\
&= \int_E \left| f - \mathbb{1}_{A_n} \right| \mathrm{d}\mu + \int_E \left| f - \mathbb{1}_{A_n} \right| \cdot \left| f + \mathbb{1}_{A_n} \right| \mathrm{d}\mu \\
&\le 4 \int_E \left| \mathbb{1}_{A_n} - f \right| \mathrm{d}\mu,
\end{aligned}$$

car $|f + \mathbb{1}_{A_n}| \leq 3$ μ-p.p. Ainsi, on obtient le résultat.

Fin