TD 14 – Entraînement probabiliste

1 – Échauffement

Exercice 1. (*Examen 2008-2009*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement ditribuées définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$, $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] = \sigma^2 < \infty$. On fixe un réel $\alpha > 0$ et, pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n^{(\alpha)} := \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i^\alpha}.$$

1. On suppose que $\alpha > 1/2$. Montrer que $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ converge dans L^2.
   Indication. On pourra utiliser le critère de Cauchy.
2. On suppose maintenant que $\alpha = 1/2$.
   (a) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\xi \in [-\eta, \eta]$, on ait
   $$\left| \phi_{X_1}(\xi) \exp\left(\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}\right) - 1 \right| \leq \varepsilon \xi^2.$$
   (b) En déduire que la suite
   $$\left(\frac{S_n^{(1/2)}}{\sqrt{\ln n}} \right)_{n\geq 1}$$
   converge en loi vers une limite dont on précisera la loi.

Corrigé.

1. On utilise le critère de Cauchy : soit $1 \leq m \leq n$, on a
   $$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=m}^{n} \frac{X_i}{i^\alpha}\right)^2\right] = \sum_{i=m}^{n} \mathbb{E}\left[\left(\frac{X_i}{i^\alpha}\right)^2\right] = \sigma^2 \sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i^{2\alpha}},$$
   en utilisant l'indépendance et le fait que les X_i sont centrées. Pour $\alpha > 1/2$, la série $\sum_{i\geq 1} i^{-2\alpha}$ converge donc
   $$\sup_{n\geq m\geq N} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=m}^{n} \frac{X_i}{i^\alpha}\right)^2\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$
   ce qui montre que $(S_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ converge dans L^2 (car L^2 est complet).
2. Pour cette question, on utilise une méthode similaire à la démonstration du TCL.
   (a) On sait que X_1 admet un moment d'ordre 2, donc ϕ_{X_1} est 2 fois dérivable en 0 et $\phi'_{X_1}(0) = i\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\phi''_{X_1}(0) = -\mathbb{E}[X_1^2] = -\sigma^2$. Avec un développement de Taylor-Young en 0, on obtient
   $$\phi_{X_1}(\xi) = 1 - \frac{\sigma^2 \xi^2}{2} + o\left(\xi^2\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}\right)\left(1 + o\left(\xi^2\right)\right),$$
   quand $\xi \to 0$. Cela correspond au résultat demandé.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

(b) Soit $\xi \in \mathbb{R}$ fixé dans la suite, on a

$$\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi) = \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k \xi}{k^{1/2}\sqrt{\ln n}}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k \ln n}}\right).$$

On écrit

$$\begin{aligned}\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right) &= \prod_{k=1}^{n}\phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k\ln n}}\right)\exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}(1+z_{k,n}), \quad \text{avec} \quad z_{k,n} := \phi_{X_1}\left(\frac{\xi}{\sqrt{k\ln n}}\right)\exp\left(\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right) - 1.\end{aligned}$$

Montrons que $\prod_{k=1}^{n}(1+z_{k,n}) \to 1$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ donné par la question précédente. Pour n suffisamment grand tel que $|\xi/\sqrt{\ln n}| \leq \eta$, on a $|\xi/\sqrt{k\ln n}| \leq \eta$ pour tout $k \geq 1$ et donc $|z_{k,n}| \leq \varepsilon\xi^2/(k\ln n)$. En développant le produit, en appliquant l'inégalité triangulaire puis en refactorisant le produit on a

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_{k,n}) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}\left(1+|z_{k,n}|\right) - 1 = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+|z_{k,n}|\right)\right) - 1.$$

Comme $\ln(1+x) \leq x$ pour $x \geq 0$, on en déduit

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_{k,n}) - 1\right| \leq \exp\left(\sum_{k=1}^{n}|z_{k,n}|\right) - 1 \leq \exp\left(\frac{\varepsilon\xi^2}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) - 1.$$

On a donc

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_{k,n}) - 1\right| \leq \mathrm{e}^{\varepsilon\xi^2} - 1,$$

qui est aussi petit que l'on veut pour ε petit. Donc $\prod_{k=1}^{n}(1+z_{k,n}) \to 1$ et ainsi

$$\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Mais, d'autre part, on a $\exp(\sum_{k=1}^{n}\frac{\sigma^2\xi^2}{2k\ln n}) \to \exp(\sigma^2\xi^2/2)$, donc finalement

$$\phi_{S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}}(\xi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}.$$

Par le théorème de Lévy faible, cela montre que $S_n^{(1/2)}/\sqrt{\ln n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

Remarque. Dans la solution ci-dessus, on se passe du logarithme complexe, qui n'a pas encore été vu en cours. Son utilisation rendrait le calcul plus naturel, même si elle oblige à vérifier que l'on est bien sur son domaine de définition.

2 – Se focaliser sur ses espérances

Exercice 2. (*Examen 2015-2016*) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements indépendants. Pour $n \geq 1$, on pose $a_n := \mathbb{P}(A_n)$ et

$$b_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{et} \quad S_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{A_k}.$$

On suppose que $b_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $S_n/b_n \to 1$ dans L^2 quand $n \to \infty$.
2. Pour tout $k \geq 1$, on pose $n_k := \inf\{n \in \mathbb{N} : b_n \geq k^2\}$. Montrer que $k^2 \leq b_{n_k} < k^2 + 1$ et que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
3. Montrer que $S_{n_k}/b_{n_k} \to 1$ presque sûrement quand $k \to \infty$.
4. En déduire que $S_n/b_n \to 1$ presque sûrement quand $n \to \infty$.

Corrigé.

1. On a
$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{S_n}{b_n} - 1\right)^2\right] = \mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{b_n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(\frac{\mathbb{1}_{A_k}}{b_n}\right) \leq \frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_k}^2\right] = \frac{1}{b_n^2} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
donc cela montre la convergence souhaitée.
2. On note tout d'abord que n_k est bien défini car $b_n \to \infty$. Par définition, $b_{n_k} \geq k^2$ et $b_{n_k-1} < k^2$. Or $a_{n_k} \leq 1$, donc on a $b_{n_k} < k^2 + 1$. En particulier, $b_{n_k} < (k+1)^2$ donc $n_k < n_{k+1}$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. On a, par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \mathrm{Var}\left(\frac{S_{n_k}}{b_{n_k}}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{b_{n_k}} \leq \frac{1}{\varepsilon^2 k^2},$$
qui est une suite sommable en k. Par Borel–Cantelli, on en déduit que presque sûrement, à partir d'un certain rang,
$$\left|\frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} - 1\right| < \varepsilon$$
et donc, presque sûrement,
$$1 - \varepsilon \leq \liminf_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} \leq \limsup_{k\to\infty} \frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} \leq 1 + \varepsilon.$$
On conclut en prenant une suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}} \downarrow 0$.
4. Soit $n \geq 1$. Il existe un unique $k \geq 1$ tel que $n_k \leq n < n_{k+1}$. Comme $(S_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(n_k)_{k\geq 1}$ sont croissantes, on a
$$\frac{S_{n_k}}{b_{n_{k+1}}} \leq \frac{S_n}{b_n} \leq \frac{S_{n_{k+1}}}{b_{n_k}}$$
et, comme $k^2 \leq b_{n_k} < k^2 + 1$,
$$\frac{S_{n_k}}{b_{n_k}} \frac{k^2}{k^2+1} \leq \frac{S_n}{b_n} \leq \frac{S_{n_{k+1}}}{b_{n_{k+1}}} \frac{k^2+1}{k^2}.$$
Sur l'événement de convergence de $(S_{n_k}/b_{n_k})_{k\geq 1}$ vers 1, on a donc $S_n/b_n \to 1$ quand $n \to \infty$ (car alors $k \to \infty$). On a donc montré que $S_n/b_n \to 1$ presque sûrement quand $n \to \infty$.

3 – Un peu de marche

Exercice 3. (*Nombre de retours en 0*) Soit $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note N le nombre de retours en 0 de la marche avant l'instant $2n$ inclus : $N := \#\{k \in [\![1,n]\!] : S_{2k} = 0\}$.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(N = r) = \mathbb{P}(N \geq r, S_{2n} = 0)$.
   Rappel. Pour $n \geq 0$, $\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.
2. Notons T_i est l'instant du i^{e} retour en 0, pour $i \geq 1$. Soit $r \in [\![0,n]\!]$. Montrer que
$$\mathbb{P}(N = r) = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(T_i = 2n).$$

3. Soit $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer que
$$\mathbb{P}(N = r) = \frac{1}{2^{2n-r}}\binom{2n-r}{n-r}.$$

Rappel. Pour $n \geq i$, on a
$$\mathbb{P}(T_i = 2n) = \frac{i}{2^{2n-i}(2n-i)}\binom{2n-i}{n-i}.$$

Corrigé.

1. On note T_r l'instant du r^e retour en 0, qui est bien défini dès que $N \geq r$ et qui est pair et inférieur à $2n$. Donc on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = r) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k, N = r) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k, S_{2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(T_r = 2k, \tilde{S}_1^{(2k)} \neq 0, \ldots, \tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} \neq 0\right),\end{aligned}$$
où $\tilde{S}_i^{(2k)} := S_{2k+i} - S_{2k} = \sum_{j=1}^{i} X_{2k+j}$. On a $\{T_r = 2k\} \in \sigma(X_j, j \leq 2k)$ et $\{\tilde{S}_1^{(2k)} \neq 0, \ldots, \tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} \neq 0\} \in \sigma(X_j, 2k+1 \leq j \leq 2n)$, donc ces événements sont indépendants, donc
$$\mathbb{P}(N = r) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k)\mathbb{P}\left(\tilde{S}_1^{(2k)} \neq 0, \ldots, \tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} \neq 0\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k)\mathbb{P}\left(\tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} = 0\right),$$
par le lemme fondamental appliqué à la marche $\tilde{S}^{(2k)}$. En utilisant de nouveau l'indépendance, on obtient alors
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = r) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(T_r = 2k, \tilde{S}_{2n-2k}^{(2k)} = 0\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k, S_{2n} = 0)\\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_r = 2k, N \geq r, S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(N \geq r, S_{2n} = 0),\end{aligned}$$
où l'on peut rajouter $N \geq r$ car $T_r = 2k \Rightarrow N \geq r$, puis où l'on utilise que $N \geq r \Rightarrow T_r \leq 2n$ pour se débarasser de la somme.

2. On remarque que $N \leq n$ et donc, en utilisant la question précédente, on a
$$\mathbb{P}(N = r) = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(N = i, S_{2n} = 0) = \sum_{i=r}^{n} \mathbb{P}(T_i = 2n).$$

3. Avec la loi du r^e retour en 0, la question précédente donne
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = r) &= \sum_{i=r}^{n} \frac{i}{2^{2n-i}(2n-i)}\binom{2n-i}{n-i} = \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{2^{2n-i}}\left(1 - \frac{2(n-i)}{2n-i}\right)\binom{2n-i}{n-i}\\ &= \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{2^{2n-i}}\binom{2n-i}{n-i} - \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{2^{2n-i}}\frac{2(n-i)}{2n-i}\binom{2n-i}{n-i}\\ &= \sum_{i=r}^{n} \frac{1}{2^{2n-i}}\binom{2n-i}{n-i} - \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{2^{2n-i-1}}\binom{2n-i-1}{n-i-1} = \frac{1}{2^{2n-r}}\binom{2n-r}{n},\end{aligned}$$
car les deux sommes se télescopent.

4 – Donner son maximum

Exercice 4. (*Examen 2007-2008*) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$M_n := \max\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{U_n}}\right).$$

1. Calculer la fonction de répartition de M_n.
2. Soit $p > 0$. Déterminer les valeurs de p telles que M_n a un moment d'ordre p fini.
3. Montrer que $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire dont on précisera la fonction de répartition et la densité.

Corrigé.

1. Pour $x < 1$, on a $F_{M_n}(x) = 0$. Pour $x \geq 1$, on a

$$F_{M_n}(x) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} \leq x\right)^n = \mathbb{P}\left(U_1 \geq \frac{1}{x^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^n.$$

2. Comme $M_n \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[M_n^p\right] = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n^p \geq y\right) \mathrm{d}y = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(M_n \geq y^{1/p}\right) \mathrm{d}y.$$

Or on a , pour $y \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(M_n \geq y^{1/p}\right) = 1 - F_{M_n}(y^{1/p}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{y^{2/p}}\right)^n \sim_{y\to\infty} \frac{n}{y^{2/p}},$$

donc $\mathbb{E}[M_n^p] < \infty$ si et seulement si $p < 2$.

3. On passe par les fonctions de répartition. Pour $x \leq 0$, on a $F_{M_n/\sqrt{n}}(x) = 0$. Pour $x > 0$, on a, à partir d'un certain rang tel que $x\sqrt{n} \geq 1$,

$$F_{M_n/\sqrt{n}}(x) = F_{M_n}(x\sqrt{n}) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-1/x^2}.$$

On pose $F(x) := \mathrm{e}^{-1/x^2} \mathbb{1}_{x>0}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Alors F est continue croissante et tend vers 0 en $-\infty$ et en 1 en $+\infty$ donc c'est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z, et donc $M_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers Z.
En outre, on a $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x p_Z(z)\,\mathrm{d}z$, avec

$$p_Z(z) := F_Z'(z) = \frac{2}{z^3} \mathrm{e}^{-1/z^2} \mathbb{1}_{z>0},$$

donc Z admet p pour densité.

5 – Exploser ses records

Exercice 5. (*Convergence en loi mais pas en proba*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $0 < \mathbb{E}[X_1^2] < \infty$. On pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. Soit $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice. En utilisant la loi du 0–1 de Kolmogorov, montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} = -\infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} = +\infty, \quad \text{presque sûrement.}$$

2. En déduire que la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

Corrigé.

1. Par symétrie, il suffit de montrer la limite supérieure. On considère $A > 0$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} \geq A\right\} = \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_N + \cdots + X_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} \geq A\right\} = \bigcap_{p\geq 1} \limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{X_N + \cdots + X_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} \geq A - \frac{1}{p}\right\}$$
$$= \bigcap_{p\geq 1}\bigcap_{k\geq 1}\bigcup_{n\geq k} \left\{\frac{X_N + \cdots + X_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} > A\right\} \in \mathcal{F}_N,$$

et, comme cela est vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, cet événement appartient à la tribu asymptotique de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Par la loi du 0-1 de Kolmogorov, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} > A\right) \in \{0,1\}.$$

En outre, on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} > A\right) \geq \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \left\{\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} > A\right\}\right) = \lim_{k\to\infty} \downarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq k}\left\{\frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} > A\right\}\right)$$
$$\geq \limsup_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_{\varphi(k)}}{\sqrt{\varphi(k)}} > A\right)$$

Or, d'après le TCL, la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire N de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. La variable N ayant une fonction de répartition continue partout et jamais égale à 1, on a donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > A\right) = \mathbb{P}(N > A) > 0,$$

ce qui implique que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} \geq A\right) > 0.$$

Comme cette probabilité est dans $\{0,1\}$, on a donc

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{S_{\varphi(n)}}{\sqrt{\varphi(n)}} \geq A\right) = 1.$$

En considérant une suite $(A_k)_{k\geq 1} \uparrow +\infty$, on en déduit le résultat.

2. Si la suite $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire X, alors on peut extraire une sous-suite $(S_{\varphi(n)}/\sqrt{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ telle que $S_{\varphi(n)}/\sqrt{\varphi(n)} \to X$ p.s. Or par la question précédente $(S_{\varphi(n)}/\sqrt{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ diverge presque sûrement, donc $(S_n/\sqrt{n})_{n\geq 1}$ ne converge pas en probabilité.

6 – Augmenter sa précision

Exercice 6. (*Contrôle des fluctuations d'une marche aléatoire*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles centrées indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{\delta|X_1|}] < \infty$. On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

1. En étendant la définition de la fonction caractéristique de X_1 au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, montrer que l'on a

$$\mathbb{E}\left[e^{S_n/\sqrt{n}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\sigma^2/2},$$

où $\sigma^2 := \mathbb{E}[X_1^2]$.

2. Soit $\alpha > 1$. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \le \alpha, \quad \text{presque sûrement.}$$

3. En déduire que
$$\frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{presque sûrement.}$$

Remarque. Le bonne renormalisation a été trouvée en 1924 par Khinchine, pour les sommes de variables de Bernoulli, puis a été étendue en 1941 par Hartman et Wintner, au cas général où les X_i suivent une loi centrée et de variance finie σ^2. Ils ont montré le résultat suivant
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = -\sigma \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}} = \sigma, \quad \text{presque sûrement,}$$
appelé la *loi du logarithme itéré*.

Corrigé.

1. On pourrait vouloir appliquer la convergence en loi du TCL mais la fonction $x \mapsto e^x$ n'est pas bornée donc on ne peut pas.
On va plutôt recalquer la démonstration mais en remplaçant la fonction caractéristique par la fonction φ définie par
$$\forall t \in [-\delta,\delta], \quad \varphi(t) := \mathbb{E}\left[e^{tX_1}\right],$$
qui est bien à valeurs finies car $\mathbb{E}[e^{tX_1}] \le \mathbb{E}[e^{\delta|X_1|}]$. Cela revient à $\varphi(t) = \phi_{X_1}(it)$ (l'hypothèse $\mathbb{E}[e^{\delta|X_1|}] < \infty$ permet en fait de prolonger ϕ_{X_1} sur $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \in]-\delta,\delta[\}$ en une fonction analytique).
Par récurrence, on montre que φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\delta,\delta[$ et que
$$\forall t \in]-\delta,\delta[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \varphi^{(k)}(t) := \mathbb{E}\left[X_1^k e^{tX_1}\right],$$
en utilisant que $\mathbb{E}[|X_1^k e^{tX_1}|] < \infty$ pour tous $t \in]-\delta,\delta[$ et $\forall k \in \mathbb{N}$: en effet il existe une constante $C > 0$ (dépendant de k et t) telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x^k e^{tx}| \le Ce^{\delta|x|}$.
En particulier, on a le développement suivant quand $t \to 0$,
$$\varphi(t) = 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o\left(t^2\right).$$
Ainsi, on obtient
$$\mathbb{E}\left[e^{S_n/\sqrt{n}}\right] = \mathbb{E}\left[e^{X_1/\sqrt{n}}\right]^n = \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\sigma^2/2}.$$

2. On a, quand $n \to \infty$, par l'inégalité de Markov,
$$\mathbb{P}\left(S_n \ge \alpha\sqrt{n}\ln n\right) = \mathbb{P}\left(e^{S_n/\sqrt{n}} \ge n^\alpha\right) \le \frac{\mathbb{E}\left[e^{S_n/\sqrt{n}}\right]}{n^\alpha} \sim \frac{e^{\sigma^2/2}}{n^\alpha}$$
donc, comme $\alpha > 1$,
$$\sum_{n\ge 2} \mathbb{P}\left(S_n \ge \alpha\sqrt{n}\ln n\right) < \infty.$$
Par Borel-Cantelli, on en déduit que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\ln n} \le \alpha, \quad \text{presque sûrement.}$$
Par symétrie, on a aussi
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}\ln n} \ge -\alpha, \quad \text{presque sûrement}$$
et les deux combinés donnent le résultat.

3. Si l'on prend α le plus petit possible on ne peut obtenir que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \leq 1, \quad \text{presque sûrement}$$
ce qui n'est pas satisfaisant.
Ce qu'il faut remarquer ici c'est que la limite ne dépend pas de σ^2 et ça c'est louche ! On considère donc $A > 0$ et $(AS_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une marche aléatoire de loi de saut la loi de AX_1 qui est centrée et vérifie $\mathbb{E}[e^{\delta A^{-1}|AX_1|}] < \infty$ avec $\delta A^{-1} > 0$. On peut donc lui appliquer le résultat précédent qui donne
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|AS_n|}{\sqrt{n}\ln n} \leq 1, \quad \text{presque sûrement}$$
ou encore
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}\ln n} \leq \frac{1}{A}, \quad \text{presque sûrement}$$
qui donne le résultat souhaité avec $A \to \infty$.

7 – Passage au vestiaire

Exercice 7. (*Théorème de Portmanteau*) Soit $X, X_0, X_1, \ldots$ des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique (E, d) muni de sa tribu borélienne, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On veut montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X ;

(ii) pour tout $f\colon E \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ quand $n \to \infty$;

(iii) pour tout fermé $F \subset E$, on a $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$;

(iv) pour tout ouvert $G \subset E$, on a $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in G) \geq \mathbb{P}(X \in F)$;

(v) pour tout borélien $A \subset E$ tel que $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, on a $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$ quand $n \to \infty$.

Ce résultat est appelé *théorème de Portmanteau*, mais il n'y a pas de mathématicien portant le nom de Portmanteau : il s'agit d'un canular possiblement initié par Billingsley qui, dans l'un de ses livres, attribue le théorème à Jean-Pierre Portmanteau, en faisant référence à un article de 1915 des Annales de l'Université Felletin ayant pour titre « Espoir pour l'ensemble vide ? ».

1. Montrer les implications faciles : (i) $\Rightarrow$ (ii), (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) puis (iii) + (iv) $\Rightarrow$ (v).
2. Montrer que (ii) $\Rightarrow$ (iii).
3. En considérant tout d'abord $f \in \mathcal{C}_b(E)$ positive et en utilisant que $\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^\infty \mathbb{P}(f(X_n) > y)\,\mathrm{d}y$, montrer que (v) $\Rightarrow$ (i).

Corrigé.

1. (i) $\Rightarrow$ (ii) : la convergence en loi implique la convergence $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ si f est continue bornée donc en particulier si f est lipschitzienne bornée.
(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) : il suffit de passer au complémentaire.
(iii) + (iv) $\Rightarrow$ (v) : on rappelle que $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ et donc, si $\mathbb{P}(X \in \partial A) = 0$, on a
$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X \in \overline{A}\right) = \mathbb{P}\left(X \in \mathring{A}\right).$$
On a ainsi, par (iv),
$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) \geq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n \in \mathring{A}\right) \geq \mathbb{P}\left(X \in \mathring{A}\right) = \mathbb{P}(X \in A)$$
et, par (iii),
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in A) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(X_n \in \overline{A}\right) \leq \mathbb{P}\left(X \in \overline{A}\right) = \mathbb{P}(X \in A),$$
ce qui montre que $\mathbb{P}(X_n \in A) \to \mathbb{P}(X \in A)$.

2. Supposons (ii). Soit F un fermé. On pose, pour $k \geq 1$,

$$f_k : x \in E \mapsto 0 \vee (1 - kd(x,F)),$$

qui est bornée par 1 et k-lipschitzienne. Donc, par (ii), on a $\mathbb{E}[f_k(X_n)] \to \mathbb{E}[f_k(X)]$ pour tout $k \geq 1$. Soit $k \geq 1$, on a $f_k \geq \mathbb{1}_F$, donc

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}[f_k(X_n)] = \mathbb{E}[f_k(X)]$$

Or $f_k \downarrow \mathbb{1}_F$ quand $k \to \infty$, donc, par convergence dominée, $\mathbb{E}[f_k(X)] \to \mathbb{P}(X \in F)$. donc en prenant $k \to \infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F).$$

3. Soit $f \in \mathcal{C}_b(E)$, on peut supposer f positive (quitte à considérer f^+ puis f^-). On a donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^\infty \mathbb{P}(f(X_n) > y)\,\mathrm{d}y = \int_0^M \mathbb{P}(X_n \in \{f > y\})\,\mathrm{d}y,$$

en posant $M := \|f\|_\infty$. On a aussi la même relation avec X au lieu de X_n.
Montrons que $\mathbb{P}(X \in \partial\{f > y\}) = 0$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$. Comme f est continue, $\{f > y\}$ est ouvert et $\{f \geq y\}$ est un fermé contenant $\{f > y\}$ donc $\partial\{f > y\} \subset \{f = y\}$. En outre, on a, par Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(X \in \{f = y\})\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x\in\{f=y\}}\,\mathrm{d}P_X(x)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{f(x)=y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}P_X(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda(\{f(x)\})\,\mathrm{d}P_X(x) = 0,\end{aligned}$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Ainsi $y \mapsto \mathbb{P}(X \in \{f = y\})$ est une fonction positive d'intégrale nulle, donc elle est nulle presque partout.
Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \in \partial\{f > y\}) = 0$ donc, par (v), on a

$$\mathbb{P}(X_n \in \{f > y\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \in \{f > y\}).$$

En outre, on peut dominer par 1 qui est intégrable sur $[0, M]$ et on obtient par convergence dominée

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_0^M \mathbb{P}(X_n \in \{f > y\})\,\mathrm{d}y \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^M \mathbb{P}(X \in \{f > y\})\,\mathrm{d}y = \mathbb{E}[f(X)].$$

8 – Assurer la survie du club

Exercice 8. (*Processus de Galton-Watson*) Soit $\mu = (\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu_0 + \mu_1 < 1$. Le *processus de Galton-Watson* $(Z_n)_{n\geq 0}$ est défini récursivement par $Z_0 := 1$ et, pour $n \geq 0$:

$$Z_{n+1} := \sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)},$$

où les variables aléatoires $(X_j^{(n)})_{j,n\geq 0}$ sont i.i.d. de loi μ. Ainsi, $(Z_n)_{n\geq 0}$ modélise l'évolution d'une population dont à chaque instant n les individus meurent en donnant naissance à des nombres d'enfants i.i.d. de loi μ. On introduit la *fonction génératrice* ψ associée à μ :

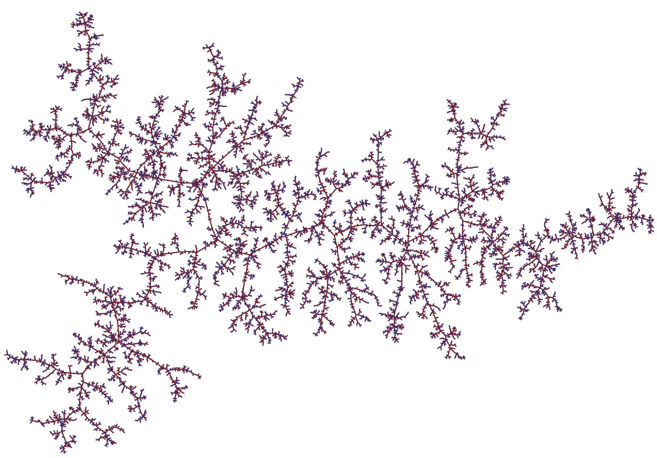
$$\psi(s) := \sum_{n\geq 0} \mu_n s^n, \quad s \in [0, 1].$$

On note finalement $m := \sum_{n\geq 0} \mu_n n$ la moyenne du nombre d'enfants et $q := \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N} : Z_n = 0)$ la probabilité que la population s'éteigne au bout d'un certain temps.
La question, que se sont posée Bienaymé en 1845 puis Galton et Watson en 1874, est la suivante : quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que la population ne s'éteigne jamais ? L'objectif ici est de démontrer leur résultat : $q < 1 \Leftrightarrow m > 1$.
Bien qu'ayant démontré ce résultat plus tôt, Bienaymé n'a pas laissé son nom à ce fameux processus. Ultime injustice, la démonstration de Galton et Watson était fausse.

1. Montrer que ψ est strictement croissante, que ψ' est strictement croissante et que $\psi(1) = 1$.
2. Pour $s \in [0,1]$, on note $\psi_n(s) := \mathbb{E}[s^{Z_n}]$. Montrer que $\psi_{n+1} = \psi_n \circ \psi$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(T < \infty)$ est le plus petit point fixe de ψ. Conclure.

Corrigé.

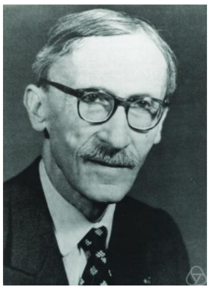
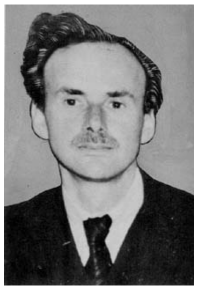
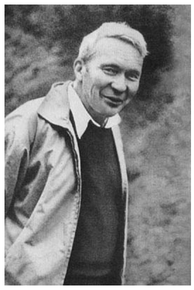
1. Pas de difficulté en dérivant sous le signe somme.
2. On démontre aisément par récurrence sur n que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(X_j^{(k)} : j \geq 0, 0 \leq k \leq n-1)$. Ainsi Z_n est indépendant de $\sigma(X_j^{(n)} : j \geq 0)$.
   On obtient alors
$$\begin{aligned}
\psi_{n+1}(s) &= \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{Z_n} X_j^{(n)}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{k} X_j^{(n)}} \mathbb{1}_{\{Z_n = k\}}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\,\mathbb{E}\left[s^{\sum_{j=1}^{k} X_j^{(n)}}\right] \qquad \text{car } Z_n \text{ et } (X_1^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}) \text{ sont indépendants} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\,\mathbb{E}\left[s^{X_1^{(n)}}\right]^k \qquad \text{car } X_1^{(n)}, \dots, X_k^{(n)} \text{ sont iid} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_n = k)\,\psi(s)^k \\
&= \psi_n(\psi(s)).
\end{aligned}$$
   D'où le résultat.
3. La probabilité d'extinction q est la réunion croissante des événements $\{Z_n = 0\}$. En remarquant que $\psi_n(0) = \mathbb{P}(Z_n = 0)$, il s'ensuit que q est la limite de $\psi^{(n)}(0)$ lorsque $n \to \infty$.
   Lorsque $m \leq 1$, on introduit la fonction $h(s) = \psi(s) - s$ qui vérifie, pour $0 \leq s < 1$ $h'(s) = \psi'(s) - 1 < \psi'(1) - 1 \leq 0$. Ainsi h est strictement décroissante sur $[0,1]$ avec $h(1) = 0$. On en déduit que $\psi(t) > t$ pour tout $t \in [0,1)$. Lorsque $m > 1$, on démontre de manière similaire que que $\psi(s) = s$ admet une unique solution sur $[0,1)$. Il est alors classique de montrer que la suite $\psi^{(n)}(0)$ converge vers le plus petit point fixe de ψ sur $[0,1]$ lorsque $n \to \infty$.



Arbre de Galton-Watson critique conditionné à avoir une grande taille donnée (par Igor Kortchemski)

9 – Apprendre le nom de ses camarades

Exercice 9. (*Trombinoscope*) Saurez-vous reconnaître parmi les portraits ci-dessous Émile Borel, Paul Dirac, Andreï Kolmogorov, Henri-Léon Lebesgue, Paul Lévy, et Siméon Denis Poisson ?

Indication. Les portraits sont triés par date de naissance croissante.

Corrigé. De gauche à droite :

- ▹ Siméon Denis Poisson (1781-1840)
- ▹ Émile Borel (1871-1956)
- ▹ Henri-Léon Lebesgue (1875-1941)
- ▹ Paul Lévy (1886-1971)
- ▹ Paul Dirac (1902-1984)
- ▹ Andreï Kolmogorov (1903-1987)