# TD 13 – Fonctions caractéristiques

## 1 – Variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^d$

*Exercice 1.* Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la *fonction caractéristique* de $X$ par

$$\phi_X : \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\langle \xi, X\rangle}\right],$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$. On dit aussi que $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \phi_X(-\xi)$ est la *transformée de Fourier* de la mesure $P_X$ sur $\mathbb{R}^d$.

1. (*Le cas gaussien*) Soit $\sigma > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$g_\sigma^{(d)} : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-\|x\|^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}},$$

   c'est-à-dire la transformée de Fourier de la mesure de densité $g_\sigma^{(d)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ (cette loi de probabilité est une gaussienne $d$-dimensionnelle notée $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathrm{Id}_d)$).
2. (*Injectivité*) En reprenant la démonstration dans le cas $d = 1$, montrer que $\phi_X$ caractérise la loi de $X$.
3. (*Théorème de Lévy faible*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X$ si et seulement si $(\phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\phi_X$.

## 2 – Indépendance et fonction caractéristique

*Exercice 2.* Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \phi_{(X_1,\dots,X_n)}(\xi) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi_k).$$

2. Supposons que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi_{X_1+X_2}(\xi) = \phi_{X_1}(\xi)\phi_{X_2}(\xi)$. Montrer que $X_1$ et $X_2$ ne sont pas forcément indépendantes.

*Exercice 3.* Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles bornées sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[X^k Y^l\right] = \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right].$$

*Indication.* On pourra utiliser le critère de l'exercice 2.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

## 3 – Convergence en loi

*Exercice 4.* (*Limite de gaussiennes*) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles suivant respectivement une loi gaussienne $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle $Y$ si et seulement si les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers respectivement $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$, et identifier la loi limite.

*Exercice 5.* (*Lemme de Slutsky*) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et $X, Y$ deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose que les variables $X_n$ et $Y_n$ sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. (*Lemme de Slutsky*) On suppose que $Y$ est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

## 4 – Compléments (hors TD)

*Exercice 6.* En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

*Exercice 7.* (*Équation aléatoire*) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie $\sigma^2$. On suppose que $(X+Y)/\sqrt{2}$ a la même loi que $X$ et $Y$. Que dire de cette loi commune ?

*Exercice 8.* (*Formule d'inversion de Fourier*) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pour $\sigma > 0$, on note $g_\sigma$ la fonction gaussienne centrée de variance $\sigma^2$ :

$$g_\sigma(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tous $\sigma > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,
$$(g_\sigma * f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}\mathrm{e}^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$
2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

   *Remarque.* L'égalité est vraie partout si et seulement si $f$ est continue.

*Exercice 9.* (*Une autre loi stable*) La *loi de Cauchy* de paramètre $\theta > 0$ est la mesure sur $\mathbb{R}$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\theta}{\pi(\theta^2 + x^2)}.$$

1. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Cauchy de paramètre $\theta > 0$ est
$$\xi \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{e}^{-\theta|\xi|}.$$
*Indication.* On pourra utiliser la formule d'inversion de Fourier (voir l'exercice 8).
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètres $\theta_1, \dots, \theta_n$. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
3. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre 1. Déterminer la loi de $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ et en déduire une convergence. Commenter.

*Exercice 10.* Soit $\lambda > 1$ fixé et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une famille de variables aléatoires telle que, pour tout $t \geq 0$, $X_t$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-t}$, c'est-à-dire que

$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_t = k) = \mathrm{e}^{-t}(1 - \mathrm{e}^{-t})^{k-1}.$$

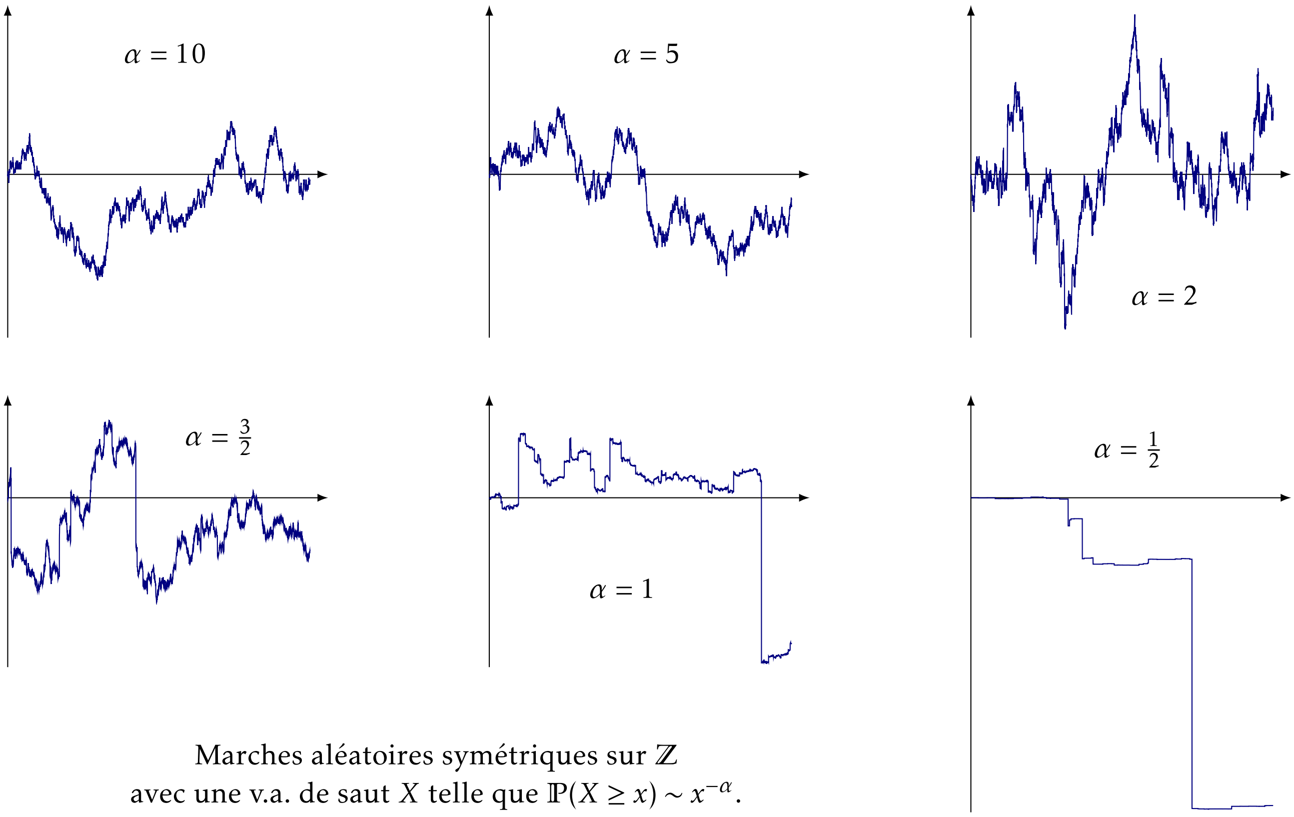
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\lambda U_n - \ln(n)$ converge en probabilité vers $-\ln(\mathcal{E})$ lorsque $n \to \infty$, où $\mathcal{E}$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que les deux familles $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.
Montrer que $X_{U_n}/n^{1/\lambda}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire exponentielle, dont le paramètre est aléatoire et vaut $\mathcal{E}^{1/\lambda}$.

*Exercice 11.* (*Théorème de Lévy fort*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une fonction $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue en 0, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(t).$$

1. Montrer que, pour tout $a > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{2}{a}\right) \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(1 - \mathrm{Re}(\phi_{X_n}(u))\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(1 - \phi_{X_n}(u)\right)\mathrm{d}u.$$
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on ait
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\left|1 - \phi_{X_n}(t)\right|\mathrm{d}t < \varepsilon.$$
3. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue (c'est-à-dire que la suite des lois $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue).
4. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.
*Rappel.* À l'exercice 9 du TD 12, il a été montré que si une suite de variables aléatoires est tendue, alors elle admet une sous-suite convergeant en loi.

*Exercice 12.* (*Magie gaussienne*) (✯) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ soient indépendantes. Montrer que les deux variables $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires gaussiennes.




Marches aléatoires symétriques sur $\mathbb{Z}$
avec une v.a. de saut $X$ telle que $\mathbb{P}(X \geq x) \sim x^{-\alpha}$.