# TD 13 – Fonctions caractéristiques

## 1 – Variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{R}^d$

*Exercice 1.* Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On définit la *fonction caractéristique* de $X$ par

$$\phi_X \colon \xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{i\langle \xi, X\rangle}\right],$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$. On dit aussi que $\xi \in \mathbb{R}^d \mapsto \phi_X(-\xi)$ est la *transformée de Fourier* de la mesure $P_X$ sur $\mathbb{R}^d$.

1. (*Le cas gaussien*) Soit $\sigma > 0$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$g_\sigma^{(d)} \colon x \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-\|x\|^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}},$$

c'est-à-dire la transformée de Fourier de la mesure de densité $g_\sigma^{(d)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ (cette loi de probabilité est une gaussienne $d$-dimensionnelle notée $\mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathrm{Id}_d)$).

2. (*Injectivité*) En reprenant la démonstration dans le cas $d = 1$, montrer que $\phi_X$ caractérise la loi de $X$.

3. (*Théorème de Lévy faible*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X$ si et seulement si $(\phi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\phi_X$.

*Corrigé.*

1. On calcule

$$\begin{aligned}
\widehat{g_\sigma^{(d)}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle \xi, x\rangle} \frac{\mathrm{e}^{-\|x\|^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \,\mathrm{d}x = \prod_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-i\xi_k x_k} \frac{\mathrm{e}^{-x_k^2/2\sigma^2}}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \,\mathrm{d}x_k \\
&= \prod_{i=1}^{k} \widehat{g_\sigma^{(1)}}(\xi_k) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi_k^2/2} = \mathrm{e}^{-\sigma^2\|\xi\|^2/2} = (2\pi\sigma^{-2})^{d/2} g_{1/\sigma}^{(d)}(\xi),
\end{aligned}$$

en utilisant le calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne unidimensionnelle, effectué dans le cours.

2. On va suivre la démonstration du cours en utilisant les gaussiennes de dimension $d$ introduites à la question 1. Soit $Y$ une gaussienne $d$-dimensionnelle $\mathcal{N}(0, \mathrm{Id}_d)$ indépendante de $X$. On rappelle que $Y$ a pour densité $g_1^{(d)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\sigma > 0$ et $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue à support compact. On calcule, en utilisant l'indépendance entre $X$ et $Y$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X + \sigma Y)] &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x + \sigma y) g_1^{(d)}(y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}P_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g_1^{(d)}\left(\frac{z - x}{\sigma}\right) \frac{\mathrm{d}z}{\sigma^d} \,\mathrm{d}P_X(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) g_\sigma^{(d)}(z - x) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}P_X(x),
\end{aligned}$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

avec le changement de variables $z = x + \sigma y$ et en notant que $g_1^{(d)}(x/\sigma)/\sigma^d = g_\sigma^{(d)}(x)$. Or par la question 1., on a

$$(2\pi\sigma^2)^{d/2} g_\sigma^{(d)}(z) = \widehat{g_{1/\sigma}^{(d)}}(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle z,v\rangle} g_{1/\sigma}^{(d)}(v)\,\mathrm{d}v,$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X+\sigma Y)] &= \int_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{z\in\mathbb{R}^d} f(z)\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}}\int_{v\in\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-i\langle z-x,v\rangle} g_{1/\sigma}^{(d)}(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}P_X(x)\\
&= \int_{z\in\mathbb{R}^d}\int_{v\in\mathbb{R}^d} f(z)\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}}\mathrm{e}^{-i\langle z,v\rangle} g_{1/\sigma}^{(d)}(v)\int_{x\in\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i\langle x,v\rangle}\,\mathrm{d}P_X(x)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}z\\
&= \int_{z\in\mathbb{R}^d}\int_{v\in\mathbb{R}^d} f(z)\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}}\mathrm{e}^{-i\langle z,v\rangle} g_{1/\sigma}^{(d)}(v)\phi_X(v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}$$

qui ne dépend de $X$ qu'à travers $\phi_X$. D'autre part, on a

$$\mathbb{E}[f(X+\sigma Y)] \xrightarrow[\sigma\to 0]{} \mathbb{E}[f(X)],$$

par convergence dominée car $f(X+\sigma Y) \to f(X)$ p.s. (car $f$ est continue) et est dominée par $\|f\|_\infty$ intégrable. Donc $\mathbb{E}[f(X)]$ ne dépend de $X$ qu'à travers $\phi_X$. Cela montre que la loi de $X$ est caractérisée par $\phi_X$.

*Remarque.* Pour être tout à fait rigoureux, il faudrait généraliser à la dimension $d$ le fait que les $\mathbb{E}[f(X)]$ pour $f$ continue à support compact caractérisent la loi de $X$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (mais cela se fait sans difficultés).

3. On continue à calquer la démonstration du cours en utilisant les gaussiennes de dimension $d$.

## 2 – Indépendance et fonction caractéristique

*Exercice 2.* Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$.

1. Montrer que $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n,\quad \phi_{(X_1,\dots,X_n)}(\xi) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi_k).$$

2. Supposons que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi_{X_1+X_2}(\xi) = \phi_{X_1}(\xi)\phi_{X_2}(\xi)$. Montrer que $X_1$ et $X_2$ ne sont pas forcément indépendantes.

*Corrigé.*

1. Calculons la transformée de Fourier de la mesure $P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a, par Fubini-Lebesgue

$$\begin{aligned}
\phi_{P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d}}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{i(\xi_1x_1+\cdots+\xi_dx_d)}\,\mathrm{d}(P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d})(x_1,\dots,x_d)\\
&= \prod_{k=1}^n \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{i\xi_kx_k}\,\mathrm{d}P_{X_k}(x_k) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi_k).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
X_1,\dots,X_n \text{ sont indépendantes} &\Leftrightarrow P_{(X_1,\dots,X_n)} = P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d}\\
&\Leftrightarrow \phi_{(X_1,\dots,X_n)} = \phi_{P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_d}}\\
&\Leftrightarrow \forall\xi\in\mathbb{R}^d, \phi_{(X_1,\dots,X_n)}(\xi) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi_k),
\end{aligned}$$

en utilisant l'injectivité de Fourier pour la 2ᵉ équivalence (c'est-à-dire le fait que la fonction caractéristique d'un v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ caractérise sa loi).

2. On remarque que l'hypothèse "pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\phi_{X_1+X_2}(\xi) = \phi_{X_1}(\xi)\phi_{X_2}(\xi)$" est équivalente à "$X_1 + X_2$ a même loi que $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$ avec $\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_2$ indépendantes chacune ayant respectivement même loi que $X_1$ et $X_2$", par injectivité de Fourier.

   On prend $X_1$ et $X_2$ deux dés à trois faces correllés : on définit la loi du couple $(X_1, X_2)$ par

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} 1/9 & \text{si } (i,j) \in \{(1,1),(2,2),(3,3)\}, \\ 2p/9 & \text{si } (i,j) \in \{(1,2),(2,3),(3,1)\}, \\ 2(1-p)/9 & \text{si } (i,j) \in \{(1,3),(2,1),(3,2)\}, \end{cases}$$

   pour $p \in [0,1]$ un paramètre. Alors on vérifie aisément que $X_1$ et $X_2$ suivent chacun une loi uniforme sur $\{1,2,3\}$ et que

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \begin{cases} 1/9 & \text{si } k \in \{2,6\}, \\ 2/9 & \text{si } k \in \{3,5\}, \\ 1/3 & \text{si } k = 4, \end{cases}$$

   c'est-à-dire que $X_1 + X_2$ a la même loi que la somme de deux variables uniformes sur $\{1,2,3\}$ indépendantes. Ainsi $(X_1, X_2)$ vérifie bien l'hypothèse mais $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendantes dès que $p \neq 1/2$.

   *Remarque.* La démarche pour arriver à la loi de $(X_1, X_2)$ est la suivante. On se fixe un objectif pour la loi de $X_1$ et $X_2$ (ici des uniformes). Alors la loi de $X_1 + X_2$ doit être celle obtenue si $X_1$ et $X_2$ étaient indépendantes. On construit alors la loi de $(X_1, X_2)$ de sorte qu'elle vérifie toutes les équations qu'imposent les lois de $X_1$, $X_2$ et $X_1 + X_2$. Dans notre cas, il n'y a qu'un seul paramètre de liberté qui est $p$ et on le choisit de sorte que $X_1$ et $X_2$ ne soient pas indépendants.

*Exercice 3.* Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles bornées sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Montrer que $X$ et $Y$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall k, l \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[X^k Y^l\right] = \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right].$$

*Indication.* On pourra utiliser le critère de l'exercice 2.

*Corrigé.* L'implication est facile, car si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $X^k$ et $Y^l$ le sont également. Réciproquement, supposons que $\forall k, l \in \mathbb{N}, \mathbb{E}[X^k Y^l] = \mathbb{E}[X^k]\mathbb{E}[Y^l]$. La fonction caractéristique de $(X,Y)$ est donnée en $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ par :

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \mathbb{E}\left[e^{iuX} e^{iuY}\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iuX)^k}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(ivY)^l}{l!}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k,l \geq 0} i^{k+l} \frac{u^k v^l}{k!l!} X^k Y^l\right]$$

Pour échanger la série et l'espérance, on veut utiliser Fubini-Lebesgue : soit $C$ un majorant de $|X|$ et $|Y|$, on a

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k,l \geq 0} \left| i^{k+l} \frac{u^k v^l}{k!l!} X^k Y^l \right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k,l \geq 0} \frac{|u|^k |v|^l C^{k+l}}{k!l!}\right] = e^{|u|C} e^{|v|C} < \infty.$$

On peut donc appliquer Fubini-Lebesgue, qui nous donne

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \sum_{k,l \geq 0} i^{k+l} \frac{u^k v^l}{k!l!} \mathbb{E}\left[X^k Y^l\right].$$

D'après l'hypothèse, on a donc

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \sum_{k,l \geq 0} i^{k+l} \frac{u^k v^l}{k!l!} \mathbb{E}\left[X^k\right]\mathbb{E}\left[Y^l\right] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k \mathbb{E}[X^k]}{k!}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iv)^l \mathbb{E}[Y^l]}{l!}\right).$$

En appliquant Fubini-Lebesgue de la même manière pour chaque série, il en découle

$$\phi_{(X,Y)}(u,v) = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iu)^k X^k}{k!}\right] \mathbb{E}\left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(iv)^l Y^l}{l!}\right] = \phi_X(u)\phi_Y(v),$$

d'où le résultat, en utilisant la question 1. de l'exercice 2.
*Remarque.* Une autre méthode qui permet de se passer des fonctions caractéristiques est la suivante. À partir de $\mathbb{E}[X^k Y^l] = \mathbb{E}[X^k]\mathbb{E}[Y^l]$ pour tous $k,l \in \mathbb{N}$, on obtient facilement $\mathbb{E}[P(X)Q(Y)] = \mathbb{E}[P(X)]\mathbb{E}[Q(Y)]$ pour tous polynômes $P$ et $Q$. Ensuite, on utilise le théorème de Stone-Weierstrass pour montrer que $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$ pour toute $f,g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ (en utilisant que $X$ et $Y$ sont bornées donc à valeurs dans un compact, donc il suffit d'approcher $f$ et $g$ sur un compact). Cette dernière propriété est une caractérisation de l'indépendance.

## 3 – Convergence en loi

*Exercice 4.* (*Limite de gaussiennes*) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles suivant respectivement une loi gaussienne $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que cette suite converge en loi vers une variable réelle $Y$ si et seulement si les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers respectivement $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+$, et identifier la loi limite.

*Corrigé.* On rappelle que la fonction caractéristique d'une gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ de moyenne $m$ et de variance $\sigma^2$ est $\Phi_{m,\sigma^2}(t) = \exp(imt - \sigma^2 t^2/2)$. Par convention, lorsque $\sigma = 0$, la gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ est la masse de Dirac $\delta_m$.
La réciproque découle immédiatement du théorème de Lévy et la loi limite est alors la loi gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$.
Pour l'implication, supposons que $Y_n$ converge en loi vers $Y$. Le théorème de Lévy garantit que $\exp(im_n t - \sigma_n^2 t^2/2)$ converge pour tout réel $t$ lorsque $n \to \infty$, et donc que $\exp(-\sigma_n^2 t^2/2)$ converge (en prenant le module). Par positivité de $\sigma_n$, on obtient donc

$$\sigma_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Par l'absurde, si $\sigma = \infty$, alors on a, pour tout $t > 0$,

$$\left|\phi_Y(t)\right| = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-\sigma_n^2 t^2/2} = 0,$$

ce qui contredit que $\phi_Y(0) = 1$ et que $\phi_Y$ est continue en 0. Ainsi, on a bien $\sigma \in \mathbb{R}_+$.
Montrons à présent la convergence de $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\mathrm{e}^{-\sigma_n^2 t^2/2}$ converge vers une limite non nulle pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{im_n t}$ converge pour tout $t \in \mathbb{R}$ lorsque $n \to \infty$. Montrons que cela entraîne la convergence de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
*Méthode 1*. Si on sait a priori que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est facile : si $m$ et $m'$ sont deux valeurs d'adhérence on a $\exp(imt) = \exp(im't)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui entraîne $m = m'$. Montrons donc que la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On note $D_Y$ l'ensemble des points de discontinuité de $F_Y$. Soit $A > 0$ tel que $A, -A \notin D_Y$. Alors on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \in ]-\infty,-A]\cup]A,\infty]) &= F_Y(-A) + 1 - F_Y(A) = \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(-A) + 1 - F_{Y_n}(A) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \in ]-\infty,-A]\cup]A,\infty]).\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $A$ suffisamment grand tel que $\mathbb{P}(|Y| \geq A) < \varepsilon$ et $A, -A \notin D_Y$. Alors, à partir d'un certain rang, $\mathbb{P}(|Y_n| > A) < \varepsilon$ d'après l'équation ci-dessus. D'autre part, si $|m_n| > A$, alors

$$\mathbb{P}(|Y_n| > A) \geq \mathbb{P}(|Y_n| \geq |m_n|) \geq \begin{cases} \mathbb{P}(Y_n \geq m_n) & \text{si } m_n \geq 0 \\ \mathbb{P}(Y_n \leq m_n) & \text{si } m_n < 0 \end{cases} = \frac{1}{2},$$

par symétrie de la gaussienne autour de sa moyenne. Avec $\varepsilon = 1/2$, comme, à partir d'un certain rang, $\mathbb{P}(|Y_n| > A) < \varepsilon$, on ne peut pas avoir $|m_n| > A$. Donc $|m_n| \leq A$ à partir d'un certain rang.
*Méthode 2.* On note $\psi(\xi) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{im_n\xi}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$. Alors $\psi$ est continue de module 1. Si $m_n \neq 0$, on a, pour $a > 0$,

$$\int_0^a \mathrm{e}^{im_n\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{e}^{im_na} - 1}{im_n}.$$

D'autre part, par convergence dominée, on a

$$\int_0^a \mathrm{e}^{im_n\xi}\,\mathrm{d}\xi \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^a \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

On choisit alors $a > 0$ tel que $\int_0^a \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \neq 0$ (ce qui est possible car $|\psi| = 1$ et $\psi$ continue en 0). Alors pour $n$ suffisamment grand on a $\int_0^a \mathrm{e}^{im_n\xi} \neq 0$ et donc

$$m_n = \frac{\mathrm{e}^{im_na} - 1}{i\int_0^a \mathrm{e}^{im_n\xi}\,\mathrm{d}\xi},$$

en remarquant que c'est aussi vrai si $m_n = 0$. Finalement, on obtient

$$m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\psi(a) - 1}{i\int_0^a \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

donc on a bien montré la convergence de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

*Exercice 5.* (*Lemme de Slutsky*) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles, et $X, Y$ deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, telles que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. On suppose que les variables $X_n$ et $Y_n$ sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables $X$ et $Y$ sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. (*Lemme de Slutsky*) On suppose que $Y$ est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

*Corrigé.*

1. D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer que $\phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') \to \phi_{(X,Y)}(t,t')$ pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2$. Et l'on a par indépendance,

$$\phi_{(X_n,Y_n)}(t,t') = \phi_{X_n}(t)\phi_{Y_n}(t') \to \phi_X(t)\phi_Y(t') = \phi_{(X,Y)}(t,t').$$

2. Il n'est pas vrai en général que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi. En effet, considérons les variables aléatoires $X_n = Z = Y_n$ pour tout $n \geq 1$, avec $Z$ gaussienne centrée. La variable $Z$ étant symétrique, on a $X_n \to -Z$ en loi. Si $(X_n, Y_n) \to (-Z, Z)$ en loi, alors $X_n + Y_n \to -Z + Z$ en loi (car la fonction $(x,y) \mapsto x + y$ est continue), c'est-à-dire $2Z = 0$ en loi, ce qui est absurde.
3. Il suffit de montrer que $\mathbb{E}[F(X_n, Y_n)] \to \mathbb{E}[F(X, Y)]$ pour une fonction $F$ continue à support compact. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $Y = a$ p.s. On a alors $Y_n \to a$ en probabilité (résultat important à savoir prouver). Et

$$|\mathbb{E}[F(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[F(X, a)]| \leq |\mathbb{E}[F(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[F(X_n, a)]| + |\mathbb{E}[F(X_n, a)] - \mathbb{E}[F(X, a)]|.$$

La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, a)$ est continue et bornée donc $|\mathbb{E}[F(X_n, a)) - \mathbb{E}[F(X, a))| \to 0$. De plus, la fonction $F$ est uniformément continue. Pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta$ tel que $|F(x,y) - F(x',y')| \leq \varepsilon$ pour $|x - x'| + |y - y'| \leq \delta$. Alors, on a

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[F(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[F(X_n, a)]| &\leq \mathbb{E}[|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|] \\ &\leq \mathbb{E}[|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n - a| \geq \delta\}}] + \mathbb{E}[|F(X_n, Y_n) - F(X_n, a)|\mathbb{1}_{\{|Y_n - a| < \delta\}}] \\ &\leq 2\|F\|_\infty \mathbb{P}(|Y_n - a| \geq \delta) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}[F(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[F(X_n, a)]| \leq \varepsilon$$

et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon$, on en déduit que $|\mathbb{E}[F(X_n, Y_n)] - \mathbb{E}[F(X_n, a)]| \to 0$, puis le résultat.

## 4 – Compléments (hors TD)

*Exercice 6.* En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

*Corrigé.* On a

$$\mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(P_1 + \ldots + P_n \leq n),$$

où $P_1, \ldots, P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre 1 indépendantes (car alors $P_1 + \ldots + P_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n$). On écrit ensuite

$$\mathbb{P}(P_1 + \ldots + P_n \leq n) = \mathbb{P}\left(\frac{P_1 + \ldots + P_n - n}{\sqrt{n}} \leq 0\right).$$

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda$ étant égales à $\lambda$, on a, d'après le TCL,

$$\frac{P_1 + \ldots + P_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} N,$$

où $N$ est une variable gaussienne centrée réduite. Or la fonction de répartition de $N$ est continue en 0 donc

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \mathbb{P}(N \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

*Exercice 7.* (*Équation aléatoire*) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de même loi, de variance finie $\sigma^2$. On suppose que $(X+Y)/\sqrt{2}$ a la même loi que $X$ et $Y$. Que dire de cette loi commune ?

*Corrigé.* Tout d'abord, comme $(X+Y)/\sqrt{2}$ et $X$ ont même loi, on a $(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])/\sqrt{2} = \sqrt{2}\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]$. D'où $\mathbb{E}[X] = 0$.
Ensuite, si $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que $X$, on démontre aisément par récurrence sur $n$ que

$$Z_n := \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{i=1}^{2^n} X_i$$

a la même loi que $X$. Or d'après le théorème central limite, $Z_n$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (en effet, le numérateur de $Z_n$ est une somme de $2^n$ variables aléatoires réelles centrées indépendantes de même loi et de variance $\sigma^2$). On conclut donc que $X$ a la même loi que $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

*Exercice 8.* (*Formule d'inversion de Fourier*) Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on définit sa *transformée de Fourier* $\hat{f}$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-i\xi x} \, \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Pour $\sigma > 0$, on note $g_\sigma$ la fonction gaussienne centrée de variance $\sigma^2$ :

$$g_\sigma(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tous $\sigma > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$(g_\sigma * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi.$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi.$$

   *Remarque.* L'égalité est vraie partout si et seulement si $f$ est continue.

*Corrigé.*

1. Rappelons que, pour $\sigma > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{g_\sigma}(\xi) = \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} g_{1/\sigma}(\xi),$$

   avec le changement de variable $y = x/\sigma$. Pour $\sigma > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on a, en utilisant la question 1.,

$$\begin{aligned}
(g_\sigma * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2\sigma^2} f(x-y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \widehat{g_{1/\sigma}}(y) f(x-y) \, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\sigma \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-iy\xi} \, \mathrm{d}\xi \right) f(x-y) \, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \mathrm{e}^{-i(x-y)(-\xi)} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-ix\xi} \, \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\xi) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-ix\xi} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi} \, \mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

   en utilisant le théorème de Fubini-Lebesgue, car on a bien $\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{-iy\xi} f(x-y)| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}\xi = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \, \mathrm{d}\xi < \infty$.
   *Remarque.* C'est l'analogue du calcul de $\mathbb{E}[h(X + \sigma Y)]$ avec $X$ une variable aléatoire réelle et $Y$ une gaussienne centrée réduite, où ici $X$ serait la variable aléatoire de loi $f(x)\mathrm{d}x$ (dans le cas $f$ positive d'intégrale 1, auquel on peut se ramener facilement). On peut alors utiliser directement le résultat du cours : les intégrales de $h$ contre deux mesures coïncident pour tout $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ donc les deux mesures sont égales.

2. Par la question 1., on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(g_\sigma * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\sigma^2\xi^2/2} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \xrightarrow[\sigma \to 0]{} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi,$$

   par convergence dominée (la convergence $\lambda$-p.p. est claire et on domine par $|\hat{f}| \in L^1$). D'autre part, $g_\sigma * f$ converge vers $f$ dans $L^1$ quand $\sigma \to 0$. Pour le montrer, voici deux méthodes :
   *Méthode 1.* On vérifie que $(g_\sigma)_{\sigma>0}$ est une approximation de Dirac (quand $\sigma \to 0$). Comme $f \in L^1$, on a $g_\sigma * f \to f$ dans $L^1$, par l'exercice 5 question 2.(b) du TD 7.
   *Méthode 2.* On le montre à la main pour $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, puis on étend à $L^1$ par densité.

Ainsi $g_\sigma * f$ converge vers $f$ dans $L^1$ et vers $x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi$ simplement donc les deux limites coïncident presque partout (cf petite question 3. du TD 4).

*Remarque.* On peut écrire cela sous la forme plus synthétique : pour presque tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{f}}(-x).$$

***Exercice 9.*** (*Une autre loi stable*) La *loi de Cauchy* de paramètre $\theta > 0$ est la mesure sur $\mathbb{R}$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\theta}{\pi(\theta^2 + x^2)}.$$

1. Montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de Cauchy de paramètre $\theta > 0$ est
$$\xi \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\theta|\xi|}.$$
*Indication.* On pourra utiliser la formule d'inversion de Fourier (voir l'exercice 8).
2. Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètres $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_n$.
3. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Cauchy de paramètre 1. Déterminer la loi de $(X_1 + \cdots + X_n)/n$ et en déduire une convergence. Commenter.

*Corrigé.*

1. On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-\theta|x|}$ et on commence par calculer $\hat{f}$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta|x|}e^{-i\xi x}dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} e^{-\theta|x|}e^{-i\xi x}dx,$$
par convergence dominée. Puis on a
$$\int_{-n}^{n} e^{-\theta|x|}e^{-i\xi x}dx = \int_0^n e^{-\theta x}e^{-i\xi x}dx + \int_{-n}^0 e^{\theta x}e^{-i\xi x}dx = \frac{1-e^{-\theta n}e^{-i\xi n}}{\theta + i\xi} + \frac{1-e^{-\theta n}e^{i\xi n}}{\theta - i\xi} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\theta}{\theta^2+\xi^2},$$
et donc
$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\theta}{\theta^2+\xi^2}.$$
Ainsi $\hat{f}$ est $L^1$ et on peut utiliser l'inversion de Fourier : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,
$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\frac{2\theta}{\theta^2+x^2}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\frac{\theta}{\pi(\theta^2+x^2)}dx$$
et donc $f$ est bien la fonction caractéristique de la loi de Cauchy de paramètre $\theta$.
2. Pour déterminer la loi d'une somme de v.a. indépendantes, il est très pratique de passer par les fonctions caractéristiques. On calcule donc, pour $\xi \in \mathbb{R}$,
$$\phi_{X_1+\cdots+X_n}(\xi) = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(\xi) = \prod_{k=1}^n e^{-\theta_k|\xi|} = e^{-(\theta_1+\cdots+\theta_n)|\xi|}.$$
On en déduit que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Cauchy de paramètre $\theta_1 + \cdots + \theta_n$.
*Remarque 1.* En particulier, toute loi de Cauchy est *infiniment divisible* : si $X$ suit une loi de Cauchy de paramètre $\theta$ et si $k \geq 1$, alors il existe $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $X$ ait même loi que $X_1 + \cdots + X_k$ (il suffit de prendre les $X_i$ avec une loi de Cauchy de paramètre $\theta/k$).
*Remarque 2.* Les lois de Cauchy sont aussi des lois *stables* (ce qui est plus fort que infiniment divisible) : si $X_1$ et $X_2$ sont deux copies indépendantes de $X$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $aX_1 + bX_2$ a même loi que $cX + d$. Les lois gaussiennes sont aussi stables. Les lois stables jouent un rôle majeur en probabilité pour généraliser le théorème central limite à des variables aléatoires de variance infinie (voir la question suivante pour un exemple).

3. On pose $S_n := X_1+\cdots+X_n$, qui suit une loi de Cauchy de paramètre $n$ par la question précédente. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a
$$\phi_{S_n/n}(\xi) = \phi_{S_n}(\xi/n) = \mathrm{e}^{-n|\xi/n|} = \mathrm{e}^{-|\xi|}.$$
Donc $S_n/n$ suit une loi de Cauchy de paramètre 1 et converge donc évidemment en loi vers une loi de Cauchy de paramètre 1.

Ici on est dans le cas de variables aléatoires i.i.d. n'admettant pas de moment d'ordre 1, donc $S_n/n$ diverge presque sûrement par l'exercice 8 du TD 12, et il y a pourtant convergence en loi.

En outre, le théorème central limite ne s'applique pas car il n'y a pas de moment d'ordre 1 (et donc pas de moment d'ordre 2) : ici on a besoin d'une renormalisation par $n$ au lieu de $\sqrt{n}$ dans le TCL.

*Exercice 10.* Soit $\lambda > 1$ fixé et soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une famille de variables aléatoires telle que, pour tout $t \geq 0$, $X_t$ suit une loi géométrique de paramètre $1-\mathrm{e}^{-t}$, c'est-à-dire que
$$\forall k \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_t = k) = \mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-t})^{k-1}.$$
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que $\lambda U_n - \ln(n)$ converge en probabilité vers $-\ln(\mathcal{E})$ lorsque $n \to \infty$, où $\mathcal{E}$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que les deux familles $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes.
Montrer que $X_{U_n}/n^{1/\lambda}$ converge en loi quand $n \to \infty$ vers une variable aléatoire exponentielle, dont le paramètre est aléatoire et vaut $\mathcal{E}^{1/\lambda}$.

*Corrigé.* On va utiliser les fonctions caractéristiques. Pour cela, calculons d'abord la fonction caractéristique de $X_t$ :
$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuX_t}\right] = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{t}(1-\mathrm{e}^{-iu})}, \quad u \in \mathbb{R}.$$
Par indépendance de $(X_t)_{t\geq 0}$ et $U_n$, on a donc
$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuX_{U_n}/n^{1/\lambda}}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{1-\mathrm{e}^{U_n}(1-\mathrm{e}^{-iu/n^{1/\lambda}})}\right].$$
En faisant un développant limité, on voit que, presque sûrement,
$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{U_n}(1-\mathrm{e}^{-iu/n^{1/\lambda}})} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\mathcal{E}^{1/\lambda}}{\mathcal{E}^{1/\lambda}-iu}.$$
Or
$$\forall s \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|\frac{1}{1-\mathrm{e}^{s}(1-\mathrm{e}^{-it})}\right| \leq 1.$$
D'après le théorème de convergence dominé, on en déduit que
$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iuX_{U_n}/n^{1/\lambda}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[\frac{\mathcal{E}^{1/\lambda}}{\mathcal{E}^{1/\lambda}-iu}\right].$$
Le résultat en découle car, on a $x/(x-iu) = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{iu\mathsf{Exp}(x)}\right]$, où $\mathsf{Exp}(x)$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $x$.

*Exercice 11.* (*Théorème de Lévy fort*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une fonction $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue en 0, telle que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(t).$$

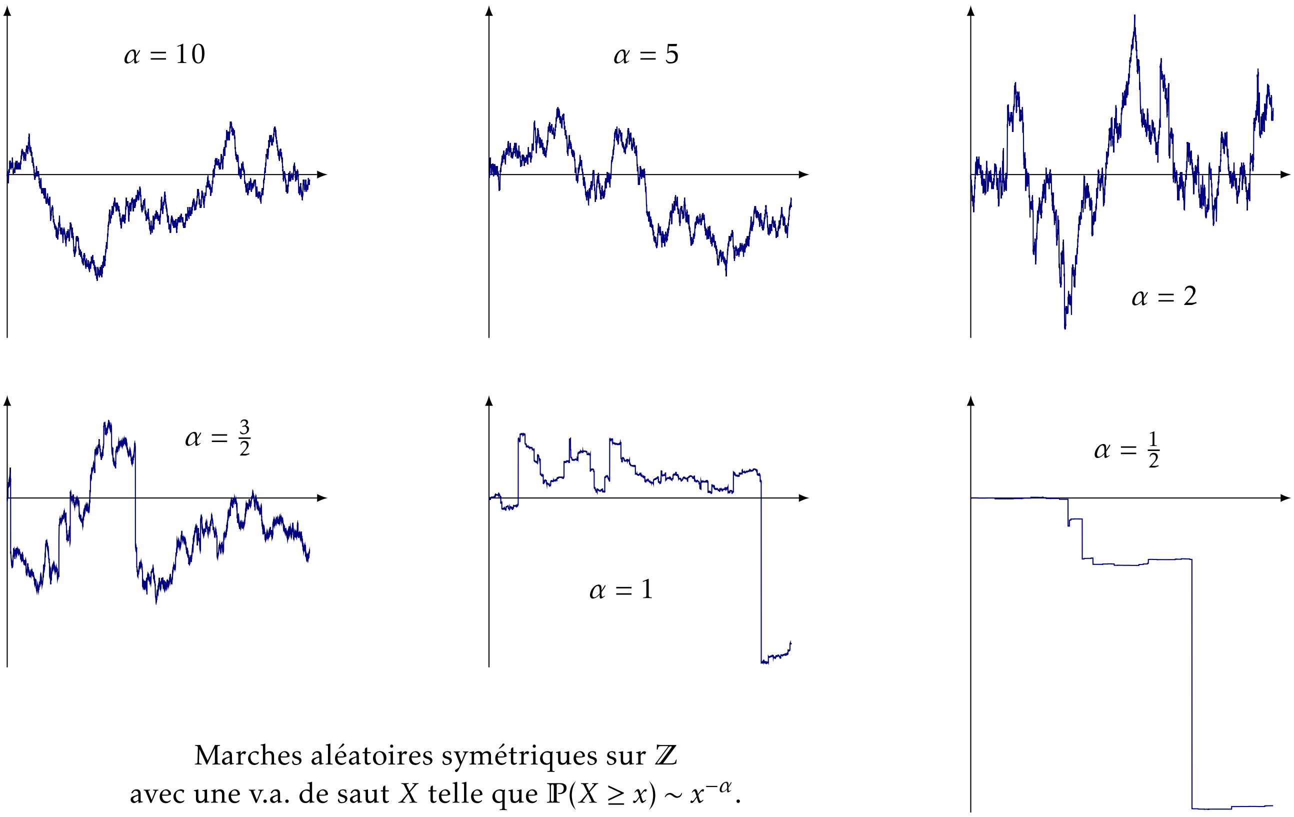
1. Montrer que, pour tout $a > 0$, on a
$$\mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{2}{a}\right) \leq \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(1 - \mathrm{Re}(\phi_{X_n}(u))\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(1-\phi_{X_n}(u)\right)\mathrm{d}u.$$
2. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, on ait
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}\left|1-\phi_{X_n}(t)\right|\mathrm{d}t < \varepsilon.$$
3. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue (c'est-à-dire que la suite des lois $(P_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue).
4. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi.
   *Rappel.* À l'exercice 9 du TD 12, il a été montré que si une suite de variables aléatoires est tendue, alors elle admet une sous-suite convergeant en loi.

*Corrigé.*

1. D'après le théorème de Fubini–Tonelli,
$$\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}(1-\phi_{X_n}(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\left(\int_{\mathbb{R}}(1-\mathrm{e}^{itx})\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-a}^{a}(1-\mathrm{e}^{itx})\,\mathrm{d}t\right)\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x)$$
$$= 2\int_{\mathbb{R}}\left(1-\frac{\sin(ax)}{ax}\right)\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x) \geq \int_{|x|>2/u}\left(1-\frac{1}{|ax|}\right)\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x)$$
   car pour tout réel $t$ on a $1-\sin(t)/t \geq 0$ et $1-\sin(t)/t \geq 1-1/|t|$. Comme
$$2\int_{|x|>2/a}\left(1-\frac{1}{|ax|}\right)\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x) \leq 2\int_{|x|>2/a}\left(1-\frac{1}{2}\right)\mathbb{P}_{X_n}(\mathrm{d}x) = \mathbb{P}(|X_n| > 2/a),$$
   ceci conclut.
2. Comme $|\phi(t)| = \lim_{n\to\infty}|\phi_{X_n}(t)| \leq 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(0) = \lim_{n\to\infty}|\phi_{X_n}(0)| = 1$ et que $\phi$ est continue en 0, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $u > 0$ tel que $|1-\phi(t)| < \varepsilon/2$ pour $|t| < u$. Ainsi
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$
   Or $|1-\phi_{X_n}(t)| \leq 2$ et $|1-\phi_{X_n}(t)| \to |1-\phi(t)|$ quand $n\to\infty$. Par convergence dominée, il s'ensuit que
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi_{X_n}(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{u}\int_{-u}^{u}|1-\phi(t)|\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$
   Le résultat désiré en découle.
3. D'après la première question, pour $n \geq n_0$, $\mathbb{P}\left(|X_n| > \frac{2}{u}\right) > 2\varepsilon$. Comme les variables aléatoires $X_i$ sont réelles, il existe des réels positifs $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1}$ tels que
$$\mathbb{P}(|X_i| > a_i) < 2\varepsilon, \qquad 0 \leq i \leq n_0 - 1.$$
   En posant $a = \max(2/u, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0-1})$, on a bien
$$\mathbb{P}(|X_n| > a) < 2\varepsilon$$
   pour tout entier $n \geq 1$, c'est-à-dire
$$\mathbb{P}(X_n \in [-a,a]) \geq 1-2\varepsilon.$$
4. Comme la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, elle admet une sous-suite $(X_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge en loi vers une variable aléatoire $X$. On a alors
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_{X_{\varphi(n)}}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_X(t).$$
   et donc $\phi_X = \phi$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Lévy faible.

*Exercice 12.* (*Magie gaussienne*) Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires réelles indépendantes et telles que les variables aléatoires $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes. Montrer que les deux variables $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires gaussiennes.

*Corrigé.* Grandes étapes de la solution : en utilisant une équation fonctionnelle vérifiée par les fonctions caractéristiques, trouver le module de la fonction caractéristique de $X+Y$, puis son argument.




Marches aléatoires symétriques sur $\mathbb{Z}$
avec une v.a. de saut $X$ telle que $\mathbb{P}(X \geq x) \sim x^{-\alpha}$.