TD 12 – Loi des grands nombres et convergence en loi

1 – Petites questions

Soit $X, X_0, X_1, \ldots$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mu, \mu_0, \mu_1, \ldots$ des mesures finies sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$.

1. Rappeler les liens entre les différentes convergences.
2. Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Y a-t-il convergence en loi de $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vers $f(X)$?
3. Supposons que $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \int f \,\mathrm{d}\mu_n \to \int f \,\mathrm{d}\mu$. Y a-t-il convergence étroite de $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers μ ?
4. Supposons que $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$. Y a-t-il convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X ?
5. Supposons que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X. A-t-on $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$?

2 – Loi des grands nombres

Exercice 1. (*Mesure empirique*) Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes de loi μ. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k},$$

qui est une mesure aléatoire appelée *mesure empirique* associée à l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que la mesure empirique converge vers la vraie mesure, c'est-à-dire qu'à partir des observations X_k, on arrive à retrouver la loi inconnue μ.

1. Montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est séparable pour la norme infini.
2. Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ et ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit H une partie dense de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ pour la norme infini. Montrer que ν_n converge étroitement vers ν si et seulement si
$$\forall h \in H, \quad \int_{\mathbb{R}} h \,\mathrm{d}\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} h \,\mathrm{d}\nu.$$
3. Montrer que presque sûrement, μ_n converge étroitement vers μ quand $n \to \infty$.

3 – Convergence en loi

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que la suite $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 3. (*Limite de constantes*) Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires constantes, respectivement égales p.s. à $x_n \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X$ en loi quand $n \to \infty$ si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x et $x_n \to x$ quand $n \to \infty$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 4.

1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite, quand $n \to \infty$, de
$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue bornée et $\lambda > 0$. Déterminer la limite, quand $n \to \infty$, de
$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 5. (*Théorème de Bernstein-Weierstrass*) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue. Le n^{e} *polynôme de Bernstein* de f est défini par
$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer sans calcul que B_n converge simplement vers f.
2. Montrer que B_n converge uniformément vers f.

Exercice 6. (*Discrétisation de mesure*)

1. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une mesure de probabilité μ_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :
$$\mu_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu([k/n, (k+1)/n[)\delta_{k/n}.$$
Montrer que μ_n converge étroitement vers μ quand $n \to \infty$.
2. En déduire que si $(X_n)_{n\geq1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, respectivement de loi géométrique de paramètre $\mathrm{e}^{-1/n}$, alors la suite $(X_n/n)_{n\geq1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Exercice 7. (*Loi toujours plus forte*) Soit $p \in]1,2[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^p] < \infty$.

1.(a) Majorer $\mathbb{E}[|X_1|^2 \mathbb{1}_{|X_1|\leq n^{1/p}}]$ en fonction des $\mathbb{P}(|X_1|^p \geq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que
$$\sum_{n\geq0} \mathrm{Var}\left(\frac{X_n}{n^{1/p}} \mathbb{1}_{|X_n|\leq n^{1/p}}\right) < \infty.$$

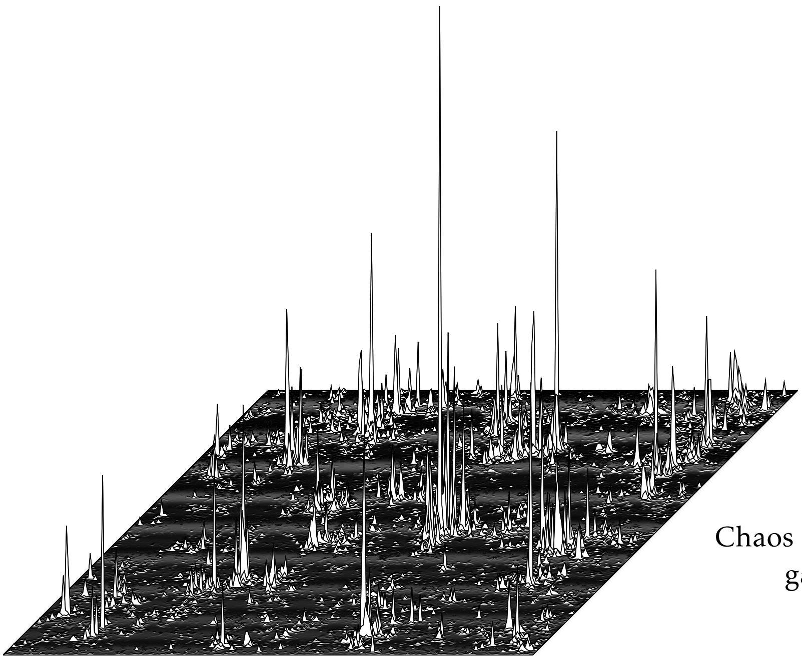
2. En utilisant le théorème des trois séries vu au TD 11, montrer que $\sum_{n\geq0} n^{-1/p} X_n$ converge p.s.
3. En déduire que
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{1/p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ p.s.}$$

Exercice 8. (*Les moments ne caractérisent pas la loi*) Cet exercice est motivé par la question 1.(d) de l'exercice 4 du DM 5.

1. Calculer
$$\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right) \mathrm{d}x.$$
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \sin(2\pi \ln x) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln^2 x}{2}\right).$$
Calculer $\int_0^\infty x^k f(x) \mathrm{d}x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. En déduire qu'il existe deux variables aléatoires X et Y positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n] < \infty$, mais n'ayant pas la même loi.

Exercice 9. (*Une partie du théorème de Prokhorov sur* $\mathbb{R}$) Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. On note F_n la fonction de répartition de μ_n. La suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *tendue* si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact} : \forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(K) \geq 1 - \varepsilon.$$
L'objectif de cet exercice est de montrer que, si la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue, alors elle admet une sous-suite qui converge étroitement. On suppose donc que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est tendue.

1. Montrer qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $F_{\varphi(n)}(q)$ converge vers une limite $G(q)$ quand $n \to \infty$.
2. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) := \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q} \cap]x, \infty[\}$. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que F soit la fonction de répartition de μ.
Rappel. Si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante, continue à droite et telle que $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$, alors il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que F soit la fonction de répartition de μ (voir l'exercice 2 du DM 2).
3. Montrer que $\mu_{\varphi(n)}$ converge étroitement vers μ quand $n \to \infty$.



Chaos multiplicatif
gaussien