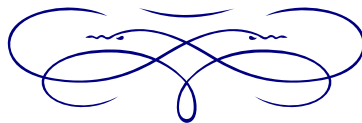


TD 12 – Loi des grands nombres et convergence en loi



1 – Petites questions

Soit $X, X_0, X_1, \dots$ des variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mu, \mu_0, \mu_1, \dots$ des mesures finies sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}$.

1. Rappeler les liens entre les différentes convergences.
2. Supposons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Y a-t-il convergence en loi de $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vers $f(X)$?
3. Supposons que $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$. Y a-t-il convergence étroite de $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers μ ?
4. Supposons que $\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \mathbb{E}[f(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X)]$. Y a-t-il convergence en loi de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers X ?
5. Supposons que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X . A-t-on $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \mathbb{E}[X]$?

Corrigé.

1. Convergence p.s. $\Rightarrow$ convergence en proba $\Rightarrow$ convergence en loi.
Convergence $L^p \Rightarrow$ convergence en proba.
Convergence $L^p \Rightarrow$ convergence L^q pour $q < p$.
Convergence en proba $\Rightarrow$ convergence d'une sous-suite p.s.
Convergence en loi vers une constante $\Rightarrow$ convergence en proba
2. Vrai : si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue bornée, alors $g \circ f$ est continue bornée et donc $\mathbb{E}[g(f(X_n))] \rightarrow \mathbb{E}[g(f(X))]$.
3. Faux : prendre $\mu_n = \delta_n$.
4. Vrai : cela a été vu dans le cours (en terme de mesures) : si une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vaguement vers une mesure de probabilité μ , alors $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement vers μ

Remontrons le, en travaillant dans le cadre plus général d'un espace polonais E (métrique complet séparable). Soit $\varepsilon > 0$. On sait que la loi de X est tendue, c'est-à-dire il existe K compact tel que $\mathbb{P}(X \in K) \geq 1 - \varepsilon$ (d'après le cours toute mesure borélienne finie sur un polonais est tendue). Soit $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact telle que $\mathbb{1}_K \leq g \leq 1$. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. On a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| &\leq |\mathbb{E}[fg(X_n)] - \mathbb{E}[fg(X)]| + |\mathbb{E}[f(1-g)(X_n)] - \mathbb{E}[f(1-g)(X)]| \\ &\leq |\mathbb{E}[fg(X_n)] - \mathbb{E}[fg(X)]| + \|f\|_\infty (\mathbb{E}[(1-g)(X_n)] + \mathbb{E}[(1-g)(X)]), \end{aligned}$$

car $1 - g \geq 0$. On a $\mathbb{E}[(1-g)(X_n)] = 1 - \mathbb{E}[g(X_n)]$ et, en appliquant l'hypothèse à fg et g qui sont continues à support compact, on obtient

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq 0 + \|f\|_\infty (1 - \mathbb{E}[g(X)] + \mathbb{E}[(1-g)(X)]) \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty,$$

car $\mathbb{E}[(1-g)(X)] \leq \mathbb{P}(X \notin K) \leq \varepsilon$. Cela conclut avec $\varepsilon > 0$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

5. Faux : même la convergence p.s. ne permet pas d'assurer la convergence des espérances. Par exemple, on peut prendre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = ([0, 1], \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $X_n(t)$ la fonction tente telle que $X_n(0) = 0, X_n(1/n) = n, X_n(2/n) = 0$. Alors X_n converge p.s. vers 0 mais $\mathbb{E}[X_n] = 1 \neq \mathbb{E}[0]$.

Un autre exemple davantage probabiliste : soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On note $Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et soit $T = \inf\{n \geq 1 : Z_n = 1\}$. On pose finalement :

$$W_n = Z_{\min(n, T)}.$$

Ainsi, (W_n) est la marche aléatoire issue de 0 qui fait des sauts ± 1 qui reste en 1 une fois qu'elle l'a atteint. Il est possible de vérifier que $T < \infty$ p.s. de sorte que (W_n) converge presque sûrement vers 1. Or il est facile de vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{E}[W_n] = 0$, de sorte que $\mathbb{E}[W_n]$ ne converge pas vers $\mathbb{E}[1]$. Avec le langage du cours de processus stochastiques, cela fournit l'exemple d'une martingale qui converge p.s. mais pas dans L^1 .

2 – Loi des grands nombres

Exercice 1. (*Mesure empirique*) Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes de loi μ . Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{X_k},$$

qui est une mesure aléatoire appelée *mesure empirique* associée à l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$. L'objectif de cet exercice est de montrer que la mesure empirique converge vers la vraie mesure, c'est-à-dire qu'à partir des observations X_k , on arrive à retrouver la loi inconnue μ .

1. Montrer que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est séparable pour la norme infini.
2. Soit $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ et ν une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. Soit H une partie dense de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ pour la norme infini. Montrer que ν_n converge étroitement vers ν si et seulement si

$$\forall h \in H, \quad \int_{\mathbb{R}} h d\nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h d\nu.$$

3. Montrer que presque sûrement, μ_n converge étroitement vers μ quand $n \rightarrow \infty$.

Corrigé.

1. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Pour $k, n \in \mathbb{N}$, on fixe $f_{n,k} \in \mathbb{Q}$ tel que

$$\begin{cases} |f_{n,k} - f(k/n)| \leq 1/n & \text{si } f(k/n) \notin \mathbb{Q}, \\ f_{n,k} = f(k/n) & \text{si } f(k/n) \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

On définit pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n comme étant la fonction affine par morceaux interpolant les $f_{n,k}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et on vérifie, en utilisant l'uniforme continuité de f , que

$$\|f - f_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc l'ensemble des fonctions affines par morceaux à support compact interpolant un nombre fini de points à coordonnées rationnelles est dense dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ pour la norme infini et il est aussi dénombrable.

Montrons proprement que $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$. Il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k/n \leq x < (k+1)/n$. alors on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x) - \left(f_{n,k} + n \left(x - \frac{k}{n} \right) (f_{n,k+1} - f_{n,k}) \right) \right| \\ &\leq \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f_{n,k} \right| + |(nx - k)(f_{n,k+1} - f_{n,k})| \\ &\leq \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f_{n,k} \right| + \left| f_{n,k+1} - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right| + \left| f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f_{n,k} \right|, \end{aligned}$$

en utilisant que $|nx - k| \leq 1$. Par définition des $f_{n,k}$ on en déduit que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{3}{n} + \sup_{y, z \in \mathbb{R}, |y-z| \leq 1/n} |f(y) - f(z)|,$$

ce qui nous donne une borne indépendante de x et qui tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

2. Le sens direct est clair, montrons la réciproque : on suppose que

$$\forall h \in H, \quad \int_{\mathbb{R}} h d\nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h d\nu.$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $h \in H$ telle que $\|h - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n - \int_{\mathbb{R}} f d\nu \right| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n - \int_{\mathbb{R}} h d\nu_n \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} h d\nu_n - \int_{\mathbb{R}} h d\nu \right| + \left| \int_{\mathbb{R}} h d\nu - \int_{\mathbb{R}} f d\nu \right| \\ &\leq \|h - f\|_\infty + \left| \int_{\mathbb{R}} h d\nu_n - \int_{\mathbb{R}} h d\nu \right| + \|h - f\|_\infty. \end{aligned}$$

Par hypothèse, on a donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n - \int_{\mathbb{R}} f d\nu \right| \leq 2\varepsilon,$$

et avec $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit

$$\forall f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} f d\nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f d\nu,$$

c'est-à-dire que ν_n converge vaguement vers ν . Comme ν et les ν_n sont des mesures de probabilités, cela implique la convergence étroite.

3. Soit H une partie dénombrable dense de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ pour la norme infini, qui existe par la question 1. Soit $h \in H$. On a

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} h d\mu \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(X_k) - \mathbb{E}[h(X_1)] \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{presque sûrement,}$$

par la loi forte des grands nombres, car $\mathbb{E}[h(X_1)] < \infty$. Comme H est dénombrable, on peut échanger le " $\forall h \in H$ " et le "presque sûrement" : on a donc presque sûrement

$$\forall h \in H, \quad \int_{\mathbb{R}} h d\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h d\mu.$$

Par la question 2., on en déduit que presque sûrement, μ_n converge étroitement vers μ quand $n \rightarrow \infty$.

3 – Convergence en loi

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que la suite $(n(1 - M_n))_{n \geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.

Corrigé. Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $n(1 - M_n)$ est à valeurs dans $[0, n]$. On a donc, pour tout $t < 0$, $\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) = 0$. Soit $t \geq 0$ fixé. Pour tout $n \geq t$, on a

$$\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) = \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Donc $\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) \rightarrow (1 - e^{-t}) \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$, et la fonction $t \mapsto (1 - e^{-t}) \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, la suite $(n(1 - M_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.



Exercice 3. (Limite de constantes) Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires constantes, respectivement égales p.s. à $x_n \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \rightarrow X$ en loi quand $n \rightarrow \infty$ si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que X est de loi δ_x et $x_n \rightarrow x$ quand $n \rightarrow \infty$.

Corrigé. Si $x_n \rightarrow x$ et si X est de loi δ_x alors pour toute fonction continue $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a $\mathbb{E}[g(X_n)] = g(x_n) \rightarrow g(x) = \mathbb{E}[g(X)]$, ce qui signifie que $X_n \rightarrow X$ en loi.

Si $X_n \rightarrow X$ en loi alors $F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t)$ pour tout $t \in D$ où D est l'ensemble des points de continuité de F (D est dense car le complémentaire d'un ensemble dénombrable). Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $F_{X_n}(t) \in \{0, 1\}$ et donc $F_X(t) \in \{0, 1\}$ pour tout $t \in D$. Comme F_X est continue à droite, on a $F_X(t) \in \{0, 1\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme F_X est croissante (et $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(+\infty) = 1$), il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $F_X = \mathbb{1}_{[x, \infty[}$. Donc X est de loi δ_x . En outre, pour $t > x$ (on a $t \in D$), on a $\mathbb{1}_{x_n \leq t} = F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t) = 1$. Donc $x_n \leq t$ à partir d'un certain rang, donc $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq t$ et avec $t \downarrow x$ on obtient $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq x$. On procède de même pour $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \geq x$.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 4.

1. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n.$$

2. Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée et $\lambda > 0$. Déterminer la limite, quand $n \rightarrow \infty$, de

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Corrigé.

1. On a

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 \dots dx_n = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{U_1 + \dots + U_n}{n}\right)\right]$$

où $U_1, \dots, U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$. D'après la loi forte des grands nombres, $n^{-1}(U_1 + \dots + U_n)$ converge p.s. et donc en loi vers $1/2$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]^n} dx_1 \dots dx_n f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

2. On a

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{P_1 + \dots + P_n}{n}\right)\right],$$

où $P_1, \dots, P_n$ sont des variables aléatoires de Poisson de paramètre λ indépendantes. D'après la loi forte des grands nombres, $n^{-1}(P_1 + \dots + P_n)$ converge p.s. et donc en loi vers λ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda).$$

Remarque. On a utilisé les résultats suivants que vous pourrez vérifier à titre d'exercice :

- ▷ La moyenne d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est λ .
- ▷ Soient $n \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ et $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes, chaque X_i suivant une loi de Poisson de paramètre λ_i . Alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ (pour le voir, il suffit de faire le calcul pour $n = 2$).



Exercice 5. (Théorème de Bernstein-Weierstrass) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue. Le n^{e} polynôme de Bernstein de f est défini par

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer sans calcul que B_n converge simplement vers f .
2. Montrer que B_n converge uniformément vers f .

Corrigé.

1. On remarque que

$$B_n(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right],$$

avec S_n qui suit une loi binomiale de paramètre (n, x) . On peut prendre $S_n = X_1 + \dots + X_n$ avec $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p . Alors, d'après la loi forte des grands nombres, S_n/n converge p.s. vers $\mathbb{E}[X_1] = x$. Donc, par continuité de f et par convergence dominée, $B_n(x) \rightarrow f(x)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta > 0$ le module d'uniforme continuité de f associé à ε . Alors on a

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &= \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n/n)|] \\ &\leq \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n/n)| \mathbf{1}_{|S_n/n - x| \leq \eta}] + \mathbb{E}[|f(x) - f(S_n/n)| \mathbf{1}_{|S_n/n - x| \geq \eta}] \\ &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\infty} \mathbb{P}(|S_n/n - x| \geq \eta) \end{aligned}$$

Pour évaluer $\mathbb{P}(|S_n/n - x| \geq \eta)$, on utilise l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(|S_n/n - x| \geq \eta) \leq \frac{\text{Var}(|S_n/n|)}{\eta^2} = \frac{x(1-x)}{n\eta^2} \leq \frac{1}{2n\eta^2}.$$

La majoration ci-dessus est uniforme en x , ce qui permet de conclure.



Exercice 6. (Discrétisation de mesure)

1. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Pour tout $n \geq 1$, on définit une mesure de probabilité μ_n sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par :

$$\mu_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu([k/n, (k+1)/n]) \delta_{k/n}.$$

Montrer que μ_n converge étroitement vers μ quand $n \rightarrow \infty$.

2. En déduire que si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, respectivement de loi géométrique de paramètre $e^{-1/n}$, alors la suite $(X_n/n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

Corrigé.

1. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ de loi μ . Alors on voit que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $Y_n = \lfloor nX \rfloor / n$ ($\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x) suit la loi μ_n . Et $Y_n \rightarrow X$ p.s. Donc $Y_n \rightarrow X$ en loi, ce qui signifie que $\mu_n \rightarrow \mu$ étroitement.
2. On pose $m(dx) = e^{-x} \mathbb{1}_{\{x > 0\}} dx$. Alors on vérifie que pour tout $n \geq 1$, m_n est la loi de la variable aléatoire X_n/n . En effet,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = e^{-k/n} - e^{-(k+1)/n} = \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-x} dx = m_n(\{k/n\}).$$

Exercice 7. (Loi toujours plus forte) Soit $p \in]1, 2[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^p] < \infty$.

- 1.(a) Majorer $\mathbb{E}[|X_1|^2 \mathbb{1}_{|X_1| \leq n^{1/p}}]$ en fonction des $\mathbb{P}(|X_1|^p \geq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
 (b) En déduire que

$$\sum_{n \geq 0} \text{Var} \left(\frac{X_n}{n^{1/p}} \mathbb{1}_{|X_n| \leq n^{1/p}} \right) < \infty.$$

2. En utilisant le théorème des trois séries vu au TD 11, montrer que $\sum_{n \geq 0} n^{-1/p} X_n$ converge p.s.
 3. En déduire que

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{1/p}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ p.s.}$$

Corrigé.

- 1.(a) On pose $p_k := \mathbb{P}(|X_1|^p \geq k)$, on a alors

$$\mathbb{E}[|X_1|^2 \mathbb{1}_{|X_1| \leq n^{1/p}}] = \mathbb{E}[(|X_1|^p)^{2/p} \mathbb{1}_{|X_1|^p \leq n}] \leq \sum_{k=0}^n k^{2/p-1} p_k.$$

- (b) On a donc

$$\sum_{n \geq 0} \text{Var} \left(\frac{X_n}{n^{1/p}} \mathbb{1}_{|X_n| \leq n^{1/p}} \right) \leq \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^{2/p}} \mathbb{E}[|X_1|^2 \mathbb{1}_{|X_1| \leq n^{1/p}}] \leq \sum_{k \geq 0} k^{2/p-1} p_k \sum_{n \geq k} n^{-2/p} \leq C \sum_{k \geq 0} p_k < +\infty.$$

$$\text{car } \mathbb{E}[X_1^p] < \infty \Leftrightarrow \sum_{k \geq 0} p_k < \infty.$$

2. On veut appliquer le théorème des trois séries. On a en a déjà une. Ensuite on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n/n^{1/p} \geq 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1^p \geq n) \leq \mathbb{E}(X_1^p) < +\infty.$$

Enfin, en utilisant que $\mathbb{E}[X_0] = 0$, on a $\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n^{1/p}}] = -\mathbb{E}[X_1 \mathbb{1}_{|X_1| > n^{1/p}}]$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/p}} |\mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{|X_n| \leq n^{1/p}}]| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/p}} \mathbb{E}[|X_1| \mathbb{1}_{|X_1| > n^{1/p}}] \leq \mathbb{E} \left[|X_1| \sum_{n=1}^{|X_1|^p} \frac{1}{n^{1/p}} \right] \leq \frac{p}{p-1} \mathbb{E}[|X_1|^p] < +\infty,$$

$$\text{car } \sum_{n=1}^N n^{-1/p} \leq \int_0^N x^{-1/p} dx = \frac{p}{p-1} N^{(p-1)/p}.$$

3. Cela découle du lemme de Kronecker : si $\sum u_n < +\infty$ et (b_n) est une suite croissante positive qui tend vers $+\infty$, alors

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k u_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En effet, en notant $S_k := \sum_{i=1}^k u_i$, on a

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n b_k u_k = \frac{1}{b_n} \left(\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) S_k \right) - S_{n+1}.$$

On sait que $S_n \rightarrow S_\infty$ quand $n \rightarrow \infty$, donc par un argument proche de la démo du théorème de Césaro, on a

$$\frac{1}{b_n} \left(\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) S_k \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_\infty.$$

En revenant à l'équation précédente, cela montre le lemme de Kronecker.

Exercice 8. (Les moments ne caractérisent pas la loi) Cet exercice est motivé par la question 1.(d) de l'exercice 4 du DM 5.

1. Calculer

$$\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2}\right) dx.$$

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2}\right).$$

Calculer $\int_0^\infty x^k f(x) dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. En déduire qu'il existe deux variables aléatoires X et Y positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n] < \infty$, mais n'ayant pas la même loi.

Corrigé.

1. Avec le changement de variable $u = \ln(x)$, on a

$$\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2}\right) dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du = 1.$$

2. Soit $k \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et le changement de variable $u = \ln(x)$ aboutit à

$$\int_0^\infty x^k f(x) dx = \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{2} + ku\right) \sin(2\pi u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du.$$

En remarquant que $-u^2/2 + nu = -1/2(u - n/2)^2 + n^2/2$, le changement de variable $v = u - n/2$ donne

$$\int_0^\infty x^k f(x) dx = \text{cste} \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-v^2/2} \sin(2\pi v) dv = 0.$$

3. On considère les v.a. X et Y de densité respectives

$$x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2}\right) \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2}\right),$$

qui sont bien définies par les questions 1. et 2. (les densités sont bien d'intégrale 1). Alors X et Y admettent des moments à tout ordre et, pour $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}[Y^k] = \int_0^\infty x^k (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{2}\right) dx = \mathbb{E}[X^k] + \int_0^\infty x^k f(x) dx = \mathbb{E}[X^k],$$

mais X et Y sont bien de lois différentes !

Exercice 9. (Une partie du théorème de Prokhorov sur $\mathbb{R}$) Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. On note F_n la fonction de répartition de μ_n . La suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *tendue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \text{ compact} : \forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

L'objectif de cet exercice est de montrer que, si la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue, alors elle admet une sous-suite qui converge étroitement. On suppose donc que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est tendue.

1. Montrer qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $F_{\varphi(n)}(q)$ converge vers une limite $G(q)$ quand $n \rightarrow \infty$.
2. On définit, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) := \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q} \cap]x, \infty[\}$. Montrer qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que F soit la fonction de répartition de μ .
Rappel. Si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, continue à droite et telle que $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$, alors il existe une mesure de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ telle que F soit la fonction de répartition de μ (voir l'exercice 2 du DM 2).
3. Montrer que $\mu_{\varphi(n)}$ converge étroitement vers μ quand $n \rightarrow \infty$.

Corrigé.

1. Pour $q \in \mathbb{Q}$, la suite $(F_n(q))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$ donc admet une sous-suite convergente. Il s'agit ensuite d'utiliser un procédé d'extraction diagonale pour construire une extractrice φ commune à tous les $q \in \mathbb{Q}$.
2. Il suffit de montrer que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, continue à droite et telle que $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$.
 - ▷ Les F_n sont croissantes donc G est croissante sur $\mathbb{Q}$, et ainsi F est croissante.
 - ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons la continuité à droite de F en x . On sait déjà que $F(x+)$ existe. D'autre part, il existe $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels strictement supérieurs à x telle que $G(q_k) \rightarrow F(x)$ quand $k \rightarrow \infty$. Alors on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F(x+) \leq F\left(\frac{x + q_k}{2}\right) \leq G(q_k).$$

En passant à la limite, on obtient $F(x+) \leq F(x)$. Par croissance on en conclut que $F(x+) = F(x)$.

- ▷ Montrons que $F(-\infty) = 0$ et $F(+\infty) = 1$. Comme G est à valeurs dans $[0, 1]$, F aussi et donc on a déjà $0 \leq F(-\infty) \leq F(+\infty) \leq 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la tension, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n([-M, M]) \geq 1 - \varepsilon.$$

Alors, on a $F_n(M) - F_n(-M) \geq 1 - \varepsilon$ et, en passant à la limite $n \rightarrow \infty$,

$$F(+\infty) - F(-\infty) \geq G(M) - G(-M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Avec $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient $F(+\infty) - F(-\infty) \geq 1$ et cela donne le résultat espéré.

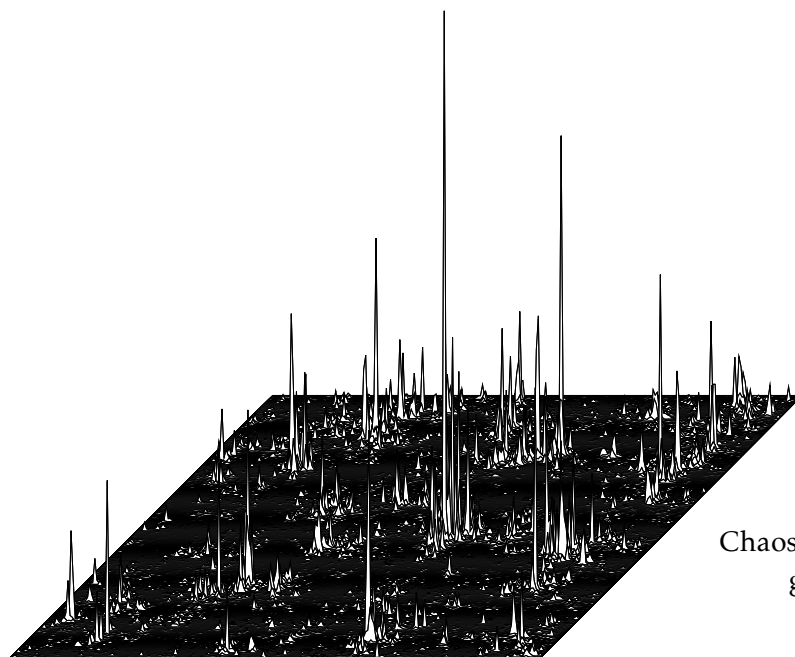
3. Il suffit de montrer, pour $x \in \mathbb{R}$ point de continuité de F , que $F_{\varphi(n)}(x) \rightarrow F(x)$ quand $n \rightarrow \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $y \in [x - \eta, x + \eta]$, $|F(x) - F(y)| \leq \varepsilon$. Soit $x - \eta < q < x < r < x + \eta$ avec $q, r \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} |F_{\varphi(n)}(x) - F(x)| &\leq |F_{\varphi(n)}(x) - F_{\varphi(n)}(r)| + |F_{\varphi(n)}(r) - G(r)| + |G(r) - F(x)| \\ &\leq [F_{\varphi(n)}(r) - F_{\varphi(n)}(q)] + |F_{\varphi(n)}(r) - G(r)| + [F(x + \eta) - F(x)] \end{aligned}$$

et donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |F_{\varphi(n)}(x) - F(x)| \leq [G(r) - G(q)] + [F(x + \eta) - F(x)] \leq 2[F(x + \eta) - F(x - \eta)] \leq 4\varepsilon.$$

Cela montre que $F_{\varphi(n)}(x) \rightarrow F(x)$ quand $n \rightarrow \infty$.



Chaos multiplicatif
gaussien