TD 11 – Lemmes de Borel-Cantelli, loi du 0-1 et séries

1 – Lemmes de Borel-Cantelli et convergence presque sûre

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ positives, indépendantes et de même loi.

1. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X_0] < \infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_0 \geq \alpha n) < \infty.$$

2. En déduire que, presque sûrement, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_0] < \infty, \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_0] = \infty. \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour $n \geq 1$, on définit

$$L_n := \max\{k \geq 1 \mid \exists i \leq n-k : X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\},$$

la longueur de la plus grande série de 1 successifs obtenue avant l'instant n. On veut montrer $L_n / \ln n$ converge presque sûrement.

1. Montrer que, presque sûrement,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$
Indication. On pourra commencer par montrer le résultat pour une sous-suite bien choisie.
2. Montrer que, presque sûrement,
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\ln 2}.$$
Indication. On pourra se contenter de considérer les $A_i := \{X_{(i-1)k_n+1} = X_{(i-1)k_n+2} = \cdots = X_{ik_n} = 1\}$, pour k_n bien choisi.

2 – Séries aléatoires

Exercice 3. (*Théorème des trois séries de Kolmogorov*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes.

1. (*Prolégomènes*)
   (a) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et que $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

(b) Montrer que, s'il existe $c > 0$ tel que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > c) < \infty$, alors

$$\sum_{n\geq 0} X_n \text{ converge p.s.} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq c} \text{ converge p.s.}$$

(c) Montrer que, si $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s., alors, pour tout $c > 0$, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > c) < \infty$.

(d) Montrer que, si $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$, alors $\sum_{n\geq 0} X_n - \mathbb{E}[X_n]$ converge p.s.

(e) Montrer que, si $|X_n| \leq c$ p.s. et $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s., alors $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$.
Indication. On pourra considérer $Z_n := X_n - Y_n$, où $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une copie indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (*Les trois séries*) Montrer que $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s. si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que les trois conditions suivantes soient vérifiées :
   (i) $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > c) < \infty$,
   (ii) $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Var}(X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq c}) < \infty$,
   (iii) $\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq c}]$ converge.

   Montrer que l'on peut remplacer "il existe $c > 0$" par "pour tout $c > 0$".

3 – Loi du 0-1

Exercice 4. (*Percolation*) Soit $d \geq 1$ et $p \in [0, 1]$. On note E l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^d$, défini par

$$E := \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ et } |x - y| = 1\}.$$

Soit $(X_e)_{e\in E}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère le sous-ensemble aléatoire d'arêtes

$$E' := \{e \in E : X_e = 1\}$$

ainsi que le graphe $G := (\mathbb{Z}^d, E')$. Montrer que la probabilité que G admette au moins une composante connexe infinie est soit 0, soit 1.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1 et on suppose que X_1 n'est pas p.s. constante. On pose $\alpha := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ et $\beta := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

1. Montrer que $\alpha < \beta$, que $\alpha \neq +\infty$ et que $\beta \neq -\infty$.
2. Montrer que, presque sûrement,

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} X_n = \beta.$$

Exercice 6. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, respectivement de loi exponentielle de paramètre n.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.

3. On suppose ici que les variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Calculer la somme

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n \geq Z_1).$$

4. Commenter.

Exercice 7. (*Séries à termes positifs*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires positives définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes. À l'aide du théorème des trois séries, montrer que

$$\sum_{n\geq 0} X_n \text{ converge p.s.} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[X_n \wedge 1] < \infty.$$

Exercice 8. (*Série entière aléatoire*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n z^n$ est presque sûrement constant.
2. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ ont même loi. Montrer la dichotomie suivante

$$\begin{cases} R = 0 \text{ p.s. si } \mathbb{E}[\ln(|X_0|)^+] = \infty, \\ R \geq 1 \text{ p.s. si } \mathbb{E}[\ln(|X_0|)^+] < \infty. \end{cases}$$

Exercice 9. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \geq 1$, la probabilité de l'ensemble des multiples de n soit égale à $1/n$.

Exercice 10. (*Théorème de Jessen-Wintner*) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X a une loi de *type pur* si l'on est dans l'un de ces trois cas

(i) il existe un ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \in D) = 1$,

(ii) il existe un ensemble de mesure de Lebesgue nulle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}(X \in B) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$,

(iii) La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

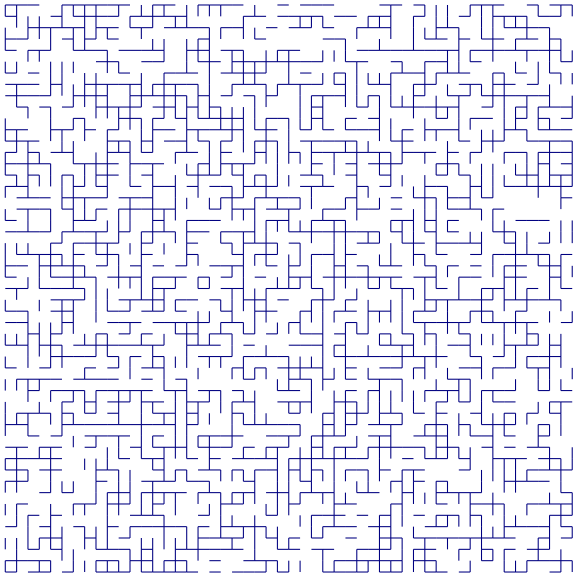
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes, telles que $X := \sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n a une loi discrète, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble F_n dénombrable tel que $\mathbb{P}(X_n \in F_n) = 1$.

1. On note G le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par $\bigcup_{n\geq 0} F_n$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note $G + B = \{g + b : g \in G, b \in B\}$. Enfin, posons

$$A := \{X \in G + B\} \cap \left\{\sum_{n\geq 0} X_n \text{ converge}\right\}.$$

   Montrer que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
2. En déduire que X a une loi de type pur.
3. Construire un exemple de série aléatoire pour chaque cas de loi de type pur.

Percolation critique sur $\mathbb{Z}^2$.



Existe-t-il un chemin traversant vertical ou horizontal ?