TD 11 – Lemmes de Borel-Cantelli, loi du 0-1 et séries

1 – Lemmes de Borel-Cantelli et convergence presque sûre

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ positives, indépendantes et de même loi.

1. Montrer que pour tout $\alpha>0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X_0]<\infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X_0\geq \alpha n)<\infty.$$

2. En déduire que, presque sûrement, on a

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=\begin{cases}0 & \text{si } \mathbb{E}[X_0]<\infty,\\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_0]=\infty.\end{cases}$$

Corrigé.

1. Soit X_0 une v.a. positive et $\alpha>0$, on a l'encadrement de X_0 suivant :

$$\sum_{n\geq 0}\alpha n\mathbb{1}_{\alpha n\leq X_0<\alpha(n+1)}\leq X_0\leq \sum_{n\geq 0}\alpha(n+1)\mathbb{1}_{\alpha n\leq X_0<\alpha(n+1)}.$$

La somme de droite peut se réécrire

$$\sum_{n\geq 0}\alpha(n+1)\mathbb{1}_{\alpha n\leq X_0<\alpha(n+1)}=\alpha\sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n}\mathbb{1}_{\alpha n\leq X_0<\alpha(n+1)}=\alpha\sum_{i\geq 0}\sum_{n=i}^{\infty}\mathbb{1}_{\alpha n\leq X_0<\alpha(n+1)}=\alpha\sum_{i\geq 0}\mathbb{1}_{\alpha i\leq X_0},$$

où on a le droit d'échanger les sommes car tout est positif. On procède de même pour celle de gauche :

$$\sum_{n\geq 0}\alpha n\mathbb{1}_{\alpha n\leq X_0<\alpha(n+1)}=\alpha\sum_{n\geq 1}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{\alpha n\leq X_0<\alpha(n+1)}=\alpha\sum_{i\geq 1}\mathbb{1}_{\alpha i\leq X_0}.$$

En prenant l'espérance dans l'encadrement (on échange espérance et somme par fubini-Tonelli), on obtient

$$\alpha\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(X_0\geq \alpha i)\leq \mathbb{E}[X_0]\leq \alpha\sum_{i\geq 0}\mathbb{P}(X_0\geq \alpha i),$$

dont il est facile de déduire que

$$\mathbb{E}[X_0]<\infty \Leftrightarrow \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(X_0\geq \alpha n)<\infty.$$

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

2. Supposons $\mathbb{E}[X_0] < \infty$. Soit $\alpha > 0$. D'après la question précédente, on a

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq \alpha\right) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X_0 \geq \alpha n) < \infty.$$

Par Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{n} \geq \alpha\right\}\right) = 0,$$

ce qui signifie que p.s. à partir d'un certain rang $X_n/n < \alpha$. On en déduit que

$$\forall \alpha > 0, \quad \text{p.s.} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \leq \alpha.$$

Quitte à remplacer α par $1/k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, on peut inverser le "$\forall \alpha > 0$" et le "p.s." et on obtient $\limsup_{n\to\infty} X_n/n = 0$ p.s.
Supposons à présent que $\mathbb{E}[X_0] = \infty$. Soit $\alpha > 0$. Cette fois-ci on a

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \geq \alpha\right) = \infty.$$

Par Borel-Cantelli (en utilisant ici que les événements $\{X_n \geq \alpha n\}$ sont indépendants), on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\frac{X_n}{n} \geq \alpha\right\}\right) = 1,$$

ce qui signifie que p.s. pour une infinité de n on a $X_n/n \geq \alpha$. On en déduit que p.s. $\limsup_{n\to\infty} X_n/n \geq \alpha$. Puis comme précédemment que $\limsup_{n\to\infty} X_n/n = \infty$ p.s.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour $n \geq 1$, on définit

$$L_n := \max\{k \geq 1 \mid \exists i \leq n-k : X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\},$$

la longueur de la plus grande série de 1 successifs obtenue avant l'instant n. On veut montrer $L_n/\ln n$ converge presque sûrement.

1. Montrer que, presque sûrement,
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln 2}.$$
Indication. On pourra commencer par montrer le résultat pour une sous-suite bien choisie.

2. Montrer que, presque sûrement,
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n}{\ln n} \geq \frac{1}{\ln 2}.$$
Indication. On pourra se contenter de considérer les $A_i := \{X_{(i-1)k_n+1} = X_{(i-1)k_n+2} = \cdots = X_{ik_n} = 1\}$, pour k_n bien choisi.

Corrigé.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $j \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(L_n \geq j) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n-j}\{X_{i+1} = \cdots = X_{i+j} = 1\}\right) \leq \sum_{i=0}^{n-j} \mathbb{P}(\{X_{i+1} = \cdots = X_{i+j} = 1\}) = \sum_{i=0}^{n-j} \frac{1}{2^j} = \frac{n-j+1}{2^j} \leq \frac{n}{2^j}.$$

Soit $j_n := \lfloor (1+\varepsilon)\ln(n)/\ln(2) \rfloor$. Alors $\mathbb{P}(L_n \geq j_n) \leq 2/n^{\varepsilon}$. Posons $n = n_k = \lfloor k^{2/\varepsilon} \rfloor$ de sorte que $\sum_k \mathbb{P}(L_{n_k} \geq j_{n_k}) < \infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout k suffisamment grand on a

$$L_{n_k} < j_{n_k} \leq (1+\varepsilon)\frac{\ln(n_k)}{\ln(2)}.$$

Pour $n \in [n_{k-1}, n_k[$ avec k suffisamment grand, on a

$$L_n \leq L_{n_k} < (1+\varepsilon)\frac{\ln(n_k)}{\ln(2)} \leq (1+2\varepsilon)\frac{\ln(n_{k-1})}{\ln(2)} \leq (1+2\varepsilon)\frac{\ln(n)}{\ln(2)},$$

donc on a presque sûrement

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{L_n}{\ln n} \leq \frac{1+2\varepsilon}{\ln 2}.$$

On conclut en faisant tendre $\varepsilon \to 0$.

2. Posons $k_n := \lfloor (1-\varepsilon)\ln(n)/\ln(2) \rfloor$ et $N_n := \lfloor n/k_n \rfloor$. Pour $1 \leq i \leq N_n$, on définit

$$A_i := \{X_{(i-1)k_n+1} = X_{(i-1)k_n+2} = \cdots = X_{ik_n} = 1\}.$$

Alors $\bigcup_{i=1}^{N_n} A_i \subset \{L_n \geq k_n\}$. Puisque les événements $A_i, 1 \leq i \leq N_n$ sont indépendants, ceci entraîne que

$$\mathbb{P}(L_n < k_n) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N_n} A_i^c\right) = \prod_{i=1}^{N_n} \mathbb{P}(A_i^c) = \mathbb{P}(A_1^c)^{N_n} = \left(1 - \frac{1}{2^{k_n}}\right)^{N_n} = \exp\left(\left\lfloor \frac{n}{k_n} \right\rfloor \ln\left(1 - \frac{1}{2^{k_n}}\right)\right),$$

qui est sommable en n, car

$$\left\lfloor \frac{n}{k_n} \right\rfloor \ln\left(1 - \frac{1}{2^{k_n}}\right) \sim -\frac{n\ln(2)}{(1-\varepsilon)\ln(n)} \frac{1}{2^{k_n}} \leq -\frac{n\ln(2)}{(1-\varepsilon)\ln(n)} \frac{1}{2n^{1-\varepsilon}} = -\frac{\ln(2)}{2(1-\varepsilon)} \frac{n^{\varepsilon}}{\ln(n)}.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., pour tout n suffisamment grand,

$$L_n \geq k_n \geq (1-\varepsilon)\frac{\ln(n)}{\ln(2)} - 1,$$

donc on a presque sûrement

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{L_n}{\ln n} \geq \frac{1-\varepsilon}{\ln 2}.$$

On conclut en faisant tendre $\varepsilon \to 0$.

2 – Séries aléatoires

Exercice 3. (*Théorème des trois séries de Kolmogorov*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes.

1. (*Prolégomènes*)
   (a) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et que $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Var}(X_n) < \infty$. Montrer que $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s.
   (b) Montrer que, s'il existe $c > 0$ tel que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > c) < \infty$, alors

   $$\sum_{n\geq 0} X_n \text{ converge p.s.} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq c} \text{ converge p.s.}$$

   (c) Montrer que, si $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s., alors, pour tout $c > 0$, $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(|X_n| > c) < \infty$.
   (d) Montrer que, si $\sum_{n\geq 0} \operatorname{Var}(X_n) < \infty$, alors $\sum_{n\geq 0} X_n - \mathbb{E}[X_n]$ converge p.s.

(e) Montrer que, si $|X_n| \le c$ p.s. et $\sum_{n\ge0} X_n$ converge p.s., alors $\sum_{n\ge0} \mathrm{Var}(X_n) < \infty$.
Indication. On pourra considérer $Z_n := X_n - Y_n$, où $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une copie indépendante de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (*Les trois séries*) Montrer que $\sum_{n\ge0} X_n$ converge p.s. si et seulement s'il existe $c > 0$ tel que les trois conditions suivantes soient vérifiées :
   (i) $\sum_{n\ge0} \mathbb{P}(|X_n| > c) < \infty$,
   (ii) $\sum_{n\ge0} \mathrm{Var}(X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c}) < \infty$,
   (iii) $\sum_{n\ge0} \mathbb{E}[X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c}]$ converge.

   Montrer que l'on peut remplacer "il existe $c > 0$" par "pour tout $c > 0$".

Corrigé.

1.(a) Il suffit de montrer la convergence en probabilité d'après le cours. Montrons que $(\sum_{n=0}^N X_n)_{N\ge0}$ est de Cauchy en probabilité : soit $p \ge q \ge N \ge 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{n=0}^{p} X_n - \sum_{n=0}^{q} X_n\right| \ge \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\left|\sum_{n=q}^{p} X_n\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{Var}\left(\sum_{n=q}^p X_n\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{n=q}^p \mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2} \le \frac{\sum_{n\ge N} \mathrm{Var}(X_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Chebychev (en rappelant que $\mathbb{E}[X_n] = 0$) puis l'indépendance des X_n.

(b) Par Borel-Cantelli, on a

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| > c\}\right) = 0,$$

c'est-à-dire, p.s. à partir d'un certain rang $|X_n| \le c$. Ainsi p.s. les séries $\sum_{n\ge0} X_n$ et $\sum_{n\ge0} X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c}$ ont les mêmes termes à partir d'un certain rang, donc si l'une converge p.s. alors l'autre aussi.

(c) Montrons la contraposée : supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $\sum_{n\ge0} \mathbb{P}(|X_n| > c) = \infty$. Alors, comme les $\{|X_n| > c\}$ sont des événements indépendants, par Borel-Cantelli, on obtient

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n| > c\}\right) = 1,$$

c'est-à-dire, p.s., pour une infinité de n, $|X_n| > c$. Donc p.s. X_n ne tend pas vers 0 et la série $\sum_{n\ge0} X_n$ est divergente.

(d) Notons $\tilde{X}_n = X_n - \mathbb{E}[X_n]$. Alors $\mathbb{E}[\tilde{X}_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(\tilde{X}_n) = \mathrm{Var}(X_n)$ est sommable. Donc la série $\sum_{n\ge0} \tilde{X}_n$ converge p.s.

(e) Les séries $\sum_{n\ge0} X_n$ et $\sum_{n\ge0} Y_n$ convergent p.s. donc la série $\sum_{n\ge0} Z_n$ converge p.s. Or on a $|Z_n| \le 2c$ p.s. et $\mathbb{E}[Z_n] = 0$, donc par le cours on a $\sum_{n\ge0} \mathrm{Var}(Z_n) < \infty$. Enfin, on remarque que, par indépendance, $\mathrm{Var}(Z_n) = \mathrm{Var}(X_n) + \mathrm{Var}(-Y_n) = 2\,\mathrm{Var}(X_n)$ et cela conclut la question.

2. *Sens direct*. Supposons que $\sum_{n\ge0} X_n$ converge. Montrons que, pour tout $c > 0$, (i), (ii) et (iii) sont vérifiés. Soit $c > 0$.

   ▷ Par 1.(b), on sait que (i) est vérifié.

   ▷ Ainsi, par 1.(a), on sait que $\sum_{n\ge0} X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c}$ converge p.s. Alors par 1.(d) avec $X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c}$ à la place de X_n, on obtient (ii).

   ▷ En appliquant 1.(c) avec $X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c}$ à la place de X_n, on obtient que

   $$\sum_{n\ge0} X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c} - \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c}\right] \text{ converge p.s.}$$

   Mais $\sum_{n\ge0} X_n \mathbb{1}_{|X_n|\le c}$ converge p.s., donc cela montre (iii).

Sens réciproque. Supposons qu'il existe $c > 0$, tel que (i), (ii) et (iii) soient vérifiés. Montrons que $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s. Par (i) avec la question 1.(a), il suffit de montrer que $\sum_{n\geq 0} X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq c}$ converge p.s. Alors, par (iii), il suffit de montrer que

$$\sum_{n\geq 0} X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq c} - \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{|X_n|\leq c}\right] \text{ converge p.s.}$$

Mais c'est une série aléatoire de terme général centré et de variance sommable par (ii), donc par le cours elle converge.

3 – Loi du 0-1

Exercice 4. (*Percolation*) Soit $d \geq 1$ et $p \in [0,1]$. On note E l'ensemble des arêtes de $\mathbb{Z}^d$, défini par

$$E := \{\{x,y\} : x,y \in \mathbb{Z}^d \text{ et } |x-y| = 1\}.$$

Soit $(X_e)_{e\in E}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre p et définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère le sous-ensemble aléatoire d'arêtes

$$E' := \{e \in E : X_e = 1\}$$

ainsi que le graphe $G := (\mathbb{Z}^d, E')$. Montrer que la probabilité que G admette au moins une composante connexe infinie est soit 0, soit 1.

Corrigé. Vérifions tout d'abord que l'événement

$$A := \{G \text{ admet au moins une composante connexe infinie}\}$$

est mesurable. Pour $x \in \mathbb{Z}^d$, notons $C(x)$ la composante connexe de x dans G. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $V_n(x) := \{y \in \mathbb{Z}^d : |y-x| \leq n\}$, $E_n(x) := \{\{y,z\} \in E : y,z \in V_n(x)\}$ et enfin $G_n(x) := (V_n(x), E_n(x))$ le sous-graphe de $(\mathbb{Z}^d, E)$ obtenu en ne gardant que les sommets à distance plus petite que n de x. L'événement $\{\#C(x) \geq n\}$ est mesurable car il s'écrit comme

$$\bigcup_{\substack{(W,F) \text{ sous-graphe de } G_n(x) \\ \text{tel que la composante connexe de } x \\ \text{soit de cardinal supérieur à } n}} \bigcap_{f\in F} \{X_f = 1\},$$

où l'union et l'intersection sont finies. Alors on a

$$A = \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{\#C(x) \geq n\}$$

donc A est bien mesurable.
Soit $\{e_k, k \in \mathbb{N}\} = E$ une énumération de E. Retirer (ou ajouter) une arête à un graphe qui a au moins une composante infinie donne un graphe qui a au moins une composante infinie. Ainsi, par récurrence, retirer (ou ajouter) un nombre fini d'arête ne change pas non plus cette propriété. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$A = \{\text{le sous-graphe } (\mathbb{Z}^d, E' \setminus \{e_0, \ldots, e_k\}) \text{ admet au moins une composante connexe infinie}\}.$$

En notant de manière analogue à ce qui précède $G_n^k(x)$ le sous-graphe de $(\mathbb{Z}^d, E \setminus \{e_0, \ldots, e_k\})$ obtenu en ne gardant que les sommets à distance plus petite que n de x, on a

$$\begin{aligned} A &= \bigcup_{x\in\mathbb{Z}^d} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{(W,F) \text{ sous-graphe de } G_n^k(x) \\ \text{tel que la composante connexe de } x \\ \text{soit de cardinal supérieur à } n}} \bigcap_{f\in F} \{X_f = 1\} \\ &\in \sigma\left(X_{e_n}, n > k\right), \end{aligned}$$

car les événement $\{X_f = 1\}$ apparaissant ci-dessus le sont toujours avec $f \notin \{e_0, \ldots, e_k\}$. Ainsi A appartient à la tribu queue de la suite $(X_{e_n})_{n\in\mathbb{N}}$, donc par la loi du 0-1 a probabilité 0 ou 1.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1 et on suppose que X_1 n'est pas p.s. constante. On pose $\alpha := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ et $\beta := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$.

1. Montrer que $\alpha < \beta$, que $\alpha \neq +\infty$ et que $\beta \neq -\infty$.
2. Montrer que, presque sûrement,

$$\liminf_{n\to\infty} X_n = \alpha \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} X_n = \beta.$$

Corrigé.

1. On a $\alpha \leq \beta$ car F est croissante. Supposons que $\alpha = \beta$. Alors par continuité à droite $F(\alpha) = 1$ et F est la fonction de répartition de la mesure δ_α ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Si $\beta = +\infty$ cela signifie que $F \equiv 1$ ce qui n'est pas possible car $F(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$. De même $\alpha \neq +\infty$.
2. Montrons tout d'abord que, pour $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < F(a) < 1$, on a p.s.

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \leq a \leq \limsup_{n\to\infty} X_n.$$

On a $\limsup\{X_n > a\} \subset \{\limsup_{n\to\infty} X_n \geq a\}$ et $\mathbb{P}(X_n > a) = 1 - F(a) \in]0,1[$. Donc $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n > a) = +\infty$ et d'après le lemme de Borel-Cantelli (les événements $\{X_n > a\}$ étant indépendants), on a

$$\mathbb{P}(\limsup\{X_n > a\}) = 1.$$

Ainsi p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq a$. De même, $\limsup\{X_n \leq a\} \subset \{\liminf_{n\to\infty} X_n \leq a\}$, et on montre comme précedemment que p.s. $\liminf_{n\to\infty} X_n \leq a$.

Soit $(\beta_k)_{k\geq 1}$ une suite croissante qui tend vers β telle que $\alpha < \beta_k < \beta$. D'après le petit résultat montré juste avant, on a pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq \beta_k$. Ainsi, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \geq \beta$. Supposons $\beta < +\infty$. Soit $k \geq 1$. On a $\{\limsup_{n\to\infty} X_n > \beta + 1/k\} \subset \limsup\{X_n > \beta + 1/k\}$. Or $F(\beta + 1/k) = 1$, donc $\mathbb{P}(X_n > \beta + 1/k) = 0$

$$\mathbb{P}(\limsup\{X_n > \beta + 1/k\}) = 0.$$

Ainsi pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \beta + 1/k$ puis, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \beta$.

Pour l'autre limite, ça marche pareil. Soit $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ une suite décroissante qui tend vers α telle que $\alpha < \beta_k < \beta$. D'après le petit résultat montré juste avant, on a pour tout $k \geq 1$, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \alpha_k$. Ainsi, p.s., $\limsup_{n\to\infty} X_n \leq \alpha$. Supposons $\alpha > -\infty$. Soit $k \geq 1$. On a $\{\liminf_{n\to\infty} X_n < \alpha - 1/k\} \subset \limsup\{X_n < \alpha - 1/k\}$. Comme $F(\alpha - 1/k) = 0$ pour tout $k \geq 1$, on conclut comme précedemment que, p.s., $\liminf_{n\to\infty} X_n \geq \alpha$.

Exercice 6. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, respectivement de loi exponentielle de paramètre n.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.
3. On suppose ici que les variables aléatoires $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Calculer la somme

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n \geq Z_1).$$

4. Commenter.

Corrigé.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On a $\mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) = \mathrm{e}^{-n\varepsilon}$. Donc
$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Z_n > \varepsilon) < \infty.$$
D'après le lemme Borel-Cantelli, pour tout $\varepsilon > 0$, presque sûrement, à partir d'un certain rang on a $Z_n \leq \varepsilon$. Donc presque sûrement, pour entier $k \geq 1$, à partir d'un certain rang $0 \leq Z_n \leq 1/k$. On en déduit que Z_n converge presque sûrement vers 0.
2. Soit $A := \{\omega \in \Omega : Z_n(\omega) \to 0 \text{ et } Z_1 > 0\}$. Soit $\omega \in A$. Alors à partir d'un certain rang $Z_n(\omega) < Z_1(\omega)$. Comme $\mathbb{P}(A) = 1$, ceci conclut.
3. On a $\mathbb{P}(Z_n > Z_1) = 1/(n+1)$ pour $n \geq 2$. Ainsi
$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n > Z_1) = \infty.$$
Ici le lemme Borel-Cantelli (version série divergente) ne s'applique pas car les événements $\{Z_n > Z_1\}$ ne sont pas indépendants.

Exercice 7. (*Séries à termes positifs*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires positives définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes. À l'aide du théorème des trois séries, montrer que
$$\sum_{n\geq 0} X_n \text{ converge p.s.} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[X_n \wedge 1] < \infty.$$

Corrigé. On va utiliser le théorème des trois séries.
Sens direct. Supposons que $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s. Alors, pour tout $c > 0$, (i), (ii) et (iii) sont vérifiés. On prend $c = 1$, on a alors
$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[X_n \wedge 1] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{X_n\leq 1}\right] + \mathbb{P}(X_n > 1) < \infty$$
Sens réciroque. Supposons que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[X_n \wedge 1] < \infty$. Alors par l'égalité précédente, (i) et (iii) sont vérifiés pour $c = 1$. En outre, on a
$$\sum_{n\geq 0} \mathrm{Var}(X_n \mathbb{1}_{X_n\leq 1}) \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[X_n^2 \mathbb{1}_{X_n\leq 1}\right] \leq \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left[X_n \mathbb{1}_{X_n\leq 1}\right] < \infty,$$
donc (ii) et aussi vérifié et $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s.

Exercice 8. (*Série entière aléatoire*) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} X_n z^n$ est presque sûrement constant.
2. On suppose maintenant que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ ont même loi. Montrer la dichotomie suivante
$$\begin{cases} R = 0 \text{ p.s. si } \mathbb{E}[\ln(|X_0|)^+] = \infty, \\ R \geq 1 \text{ p.s. si } \mathbb{E}[\ln(|X_0|)^+] < \infty. \end{cases}$$

Corrigé.

1. Le rayon de convergence R est donné par la formule

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |X_n|^{1/n}}.$$

Mais la variable aléatoire $\limsup_{n\to\infty} |X_n|^{1/n}$ est mesurable par rapport à la tribu queue des $(X_n)_{n\geq 1}$, elle est donc constante presque sûrement d'après le petit lemme suivant (voir l'exercice 5 du TD 9) combiné avec la loi du 0-1 de Kolmogorov.

Petit lemme. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{C}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ telle que si $C \in \mathcal{C}$, alors $\mathbb{P}(C) = 0$ ou $\mathbb{P}(C) = 1$. Si X est $\mathcal{C}$-mesurable, alors X est constante presque sûrement.

Démonstration. On note F la fonction de répartition de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{X \leq x\} \in \mathcal{C}$ et donc $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$ ou 1. Comme $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, on a $x_0 := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) = 1\} \in \mathbb{R}$. Comme F est croissante et continue à droite, on a $F = \mathbb{1}_{[x_0,\infty[}$, qui est la fonction de répartition de δ_{x_0}. Donc X a pour loi δ_{x_0}, car la fonction de répartition caractérise la loi. Ainsi, $\mathbb{P}(X = x_0) = 1$ et donc $X = x_0$ p.s.

2. On écrit

$$|X_n|^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(|X_n|)^+}{n}\right)\exp\left(-\frac{\ln(|X_n|)^-}{n}\right).$$

Si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] < \infty$, alors, d'après l'exercice 1, $\limsup_{n\to\infty} \ln(|X_n|)^+/n = 0$ et donc $\ln(|X_n|)^+/n \to 0$. On a alors $R \geq 1$ car $\exp\left(-\frac{\ln(|X_n|)^-}{n}\right) \leq 1$.

Si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] = \infty$, alors, d'après l'exercice 1, $\limsup_{n\to\infty} \ln(|X_n|)^+/n = \infty$. Ceci implique que $\limsup_{n\to\infty} \ln(|X_n|)/n = \infty$ et donc $R = 0$ presque sûrement.

Exercice 9. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $n \geq 1$, la probabilité de l'ensemble des multiples de n soit égale à $1/n$.

Corrigé. Supposons qu'il existe une telle probabilité $\mathbb{P}$. Soit $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers, on a

$$\mathbb{P}(p_1\mathbb{N} \cap \cdots \cap p_k\mathbb{N}) = \mathbb{P}((p_1 \cdots p_k)\mathbb{N}) = \frac{1}{p_1 \cdots p_k} = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(p_i\mathbb{N}),$$

donc $p_1\mathbb{N}, \ldots, p_k\mathbb{N}$ sont des événements indépendants. En outre,

$$\sum_{p \text{ premier}} \mathbb{P}(p\mathbb{N}) = \sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p} = \infty,$$

où l'on utilise que la série des inverses des nombres premiers diverge (voir sur Wikipédia pour une preuve). Donc, par le lemme de Borel-Cantelli, presque tout entier $n \in \mathbb{N}$ (pour $\mathbb{P}$) appartient à une infinité de $p\mathbb{N}$, c'est-à-dire est multiple d'une infinité de nombres premiers distincts. Mais, il n'y a que 0 qui vérifie cette propriété. Donc $\mathbb{P}(\mathbb{N}^*) = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 10. (*Théorème de Jessen-Wintner*) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que X a une loi de *type pur* si l'on est dans l'un de ces trois cas

(i) il existe un ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \in D) = 1$,

(ii) il existe un ensemble de mesure de Lebesgue nulle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}(X \in B) = 1$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$,

(iii) La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ indépendantes, telles que $X := \sum_{n\geq 0} X_n$ converge p.s. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n a une loi discrète, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble F_n dénombrable tel que $\mathbb{P}(X_n \in F_n) = 1$.

1. On note G le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par $\bigcup_{n\geq 0} F_n$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on note $G + B = \{g + b : g \in G, b \in B\}$. Enfin, posons

$$A := \{X \in G + B\} \cap \left\{ \sum_{n\geq 0} X_n \text{ converge} \right\}.$$

   Montrer que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.
2. En déduire que X a une loi de type pur.
3. Construire un exemple de série aléatoire pour chaque cas de loi de type pur.

Corrigé.

1. Montrons que A est mesurable. Pour cela, il faut vérifier que $G + B$ est borélien. Comme B est borélien, $\{g\} + B$ est borélien (car $f : x \mapsto x - g$ est mesurable). Et on a ensuite

$$G + B = \bigcup_{g\in G} \{g\} + B$$

   qui est mesurable car G est dénombrable (en effet $G = \{n_1 f_1 + \cdots + n_k f_k : k \geq 1, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}, f_1, \ldots, f_k \in \bigcup_{i\geq 0} F_i\}$).
   En fait, A n'est pas forcément dans la tribu queue des X_n. Il faut plutôt considérer

$$\widetilde{A} := \{\widetilde{X} \in G + B\} \cap \left\{ \sum_{n\geq 0} \widetilde{X}_n \text{ converge} \right\},$$

   où $\widetilde{X}_n := X_n \mathbb{1}_{X_n \in F_n} + f_n \mathbb{1}_{X_n \notin F_n}$, avec $f_n \in F_n$ fixé, et $\widetilde{X} := \sum_{n\geq 0} \widetilde{X}_n$. Ainsi, on a d'une part $\widetilde{X}_n = X_n$ p.s. et donc $\widetilde{X} = X$ p.s. et $\mathbb{P}(\widetilde{A}) = \mathbb{P}(A)$. Et d'autre part on est sûr que $\widetilde{X}_n \in F_n$ (et pas seulement presque sûr). Montrons que $\widetilde{A}$ est dans la tribu queue des $\widetilde{X}_n$. Soit $k \geq 0$, on a $\widetilde{X} = \widetilde{X}_1 + \cdots + \widetilde{X}_k + \sum_{n>k} \widetilde{X}_n$ avec $\widetilde{X}_1 + \cdots + \widetilde{X}_k \in G$ donc

$$\widetilde{X} \in G + B \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n>k} \widetilde{X}_n \in G + B.$$

   Cela donne

$$\widetilde{A} = \left\{ \sum_{n>k} \widetilde{X}_n \in G + B \right\} \cap \left\{ \sum_{n>k} \widetilde{X}_n \text{ converge} \right\} \in \sigma\left(\widetilde{X}_n, n > k\right),$$

   et donc $\widetilde{A}$ est dans la tribu queue des $\widetilde{X}_n$. En outre, il faut noter que les $(\widetilde{X}_n)$ sont toujours indépendantes. Par loi du 0-1, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\widetilde{A}) \in \{0, 1\}$.
2. Procédons par élimination.
   - S'il existe un ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \in D) = 1$, alors on est dans le cas (i). Supposons dorénavant que ce n'est pas le cas.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\mathbb{P}(X = x) > 0$, alors en prenant $B = \{x\}$, on obtient $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(X = x) > 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 1$ et ainsi $\mathbb{P}(X \in G + \{x\}) = 1$, et cela contredit l'hypothèse qu'on vient de faire car $G + \{x\}$ est dénombrable. Donc $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe un ensemble de mesure de Lebesgue nulle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\mathbb{P}(X \in B) = 1$, alors on est dans le cas (ii). Supposons dorénavant que ce n'est pas le cas.
   - Montrons que l'on est alors dans le cas (iii). Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(B) = 0$. Si $\mathbb{P}(X \in B) > 0$, alors, avec A construit à partir de B, on a $\mathbb{P}(A) > 0$ donc $\mathbb{P}(A) = 1$ et ainsi $\mathbb{P}(X \in G + B) = 1$. Mais, comme $G + B = \bigcup_{g\in G} \{g\} + B$ avec G dénombrable, on a $\lambda(G + B) = 0$. Donc cela contredit l'hypothèse faite précédemment. Donc $\mathbb{P}(X \in B) = 0$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $\lambda(B) = 0$. Cela signifie exactement que la loi de X est absolument continue devant la mesure de Lebesgue : on est dans le cas (iii).

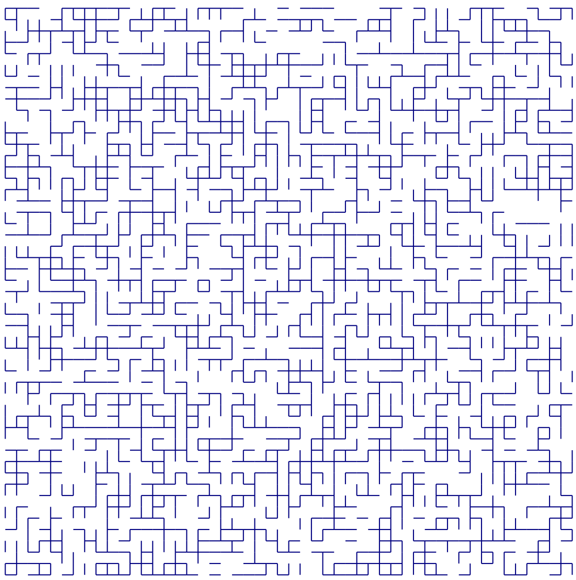
3. Créons un exemple pour chaque cas.

- *Cas (i).* Il suffit de prendre $X_n = 0$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- *Cas (iii).* On commence par le cas (iii) qui peut sembler plus naturel. Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de Bernoulli de paramètre 1/2 indépendantes. On pose $X_n = 2^{-n} Z_n$ pour $n \geq 1$ et $X_0 = 0$. Alors il est clair que la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ est absolument convergente p.s. Ensuite on vérifie que X suit la mesure uniforme sur $[0,1]$ (on a fait la procédure inverse de la constuction d'une suite de Bernoulli i.i.d. à partir de la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$). Donc on est bien dans le cas (iii).
- *Cas (ii).* On va modifier légèrement ce qui a été fait pour le cas (iii). Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de Bernoulli de paramètre 1/2 indépendantes. On pose $X_n = 3^{-n} 2 Z_n$ pour $n \geq 1$ et $X_0 = 0$. Alors la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ est toujours absolument convergente p.s. et on a

$$X = \sum_{n\geq 0} \frac{2Z_n}{3^n}.$$

Alors X est à valeurs dans le Cantor triadique qui est de mesure de Lebesgue nulle. En outre, on peut vérifier que chaque intervalle $[k3^{-n}, (k+1)3^{-n}[$ a une mesure inférieure à 2^n pour la loi de X et donc on en déduit que pour tout $x \in [0,1[$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

Percolation critique sur $\mathbb{Z}^2$.



Existe-t-il un chemin traversant vertical ou horizontal ?