TD 10 – Convergence de variables aléatoires

1 – Indépendance de familles de variables aléatoires

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables et I et J deux ensembles. Soit $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_i)_{j \in J}$ deux familles de variables aléatoires à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$. Montrer que $(X_i)_{i \in I}$ et $(Y_j)_{j \in J}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tous $m, n \geq 1$, $i_1, \dots, i_m \in I$ et $j_1, \dots, j_n \in J$, $(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ est indépendante de $(Y_{j_1}, \dots, Y_{j_n})$.

2 – Convergence de variables aléatoires

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ convergeant en probabilité vers X.

1. (*Lemme de Borel-Cantelli*) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \to \infty} A_n\right) = 0.$$
2. Montrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si et seulement si de toute sous-suite de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-sous-suite qui converge p.s. vers X.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.
4. (*Lemme de Fatou*) Supposons que $X_n \geq 0$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\mathbb{E}[X] \leq \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}[X_n].$$
5. (*Convergence dominée*) Supposons qu'il existe une variable aléatoire réelle Y telle que $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$ et $|X_n| \leq Y$ p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ quand $n \to \infty$.

Exercice 3. (*Problème du collectionneur*) Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \dots, n\}$. On considère

$$T_n := \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \dots, X_m\} = \{1, 2, \dots, n\}\}$$

le premier instant où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n := \inf\{m \geq 1 : \#\{X_1, \dots, X_m\} = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2 \leq k \leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.
2. Calculer l'espérance de T_n et en déterminer un équivalent quand $n \to \infty$.
3. Calculer la variance de T_n et montrer que $\mathrm{Var}(T_n) = O(n^2)$ quand $n \to \infty$.
Rappel. La variance d'une variable aléatoire réelle X est $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

4. En déduire un résultat de convergence pour T_n après renormalisation par une suite déterministe bien choisie.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûre" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace, pour des variables aléatoires à valeur dans un espace métrique (E, d).

3 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. (*Une amélioration de la loi faible des grands nombres*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles bornée dans L^2 (c'est-à-dire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que $\mathbb{E}[X_n^2] \leq M$ pour tout $n \geq 1$) et vérifiant $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = 0$ pour tous $n \neq m$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Remarque. Si X et Y sont des v.a. L^2, on note $\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ la *covariance* de X et Y.

1. Montrer que $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/n \to 0$ dans L^2.
2. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que $(S_{n^2} - \mathbb{E}[S_{n^2}])/n \to 0$ presque sûrement.
3. En déduire que $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/n \to 0$ presque sûrement.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, convergeant en probabilité sous $\mathbb{P}$ vers une variable aléatoire X. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

Exercice 7. Considérons n urnes et plaçons r boules indépendamment et uniformément dans une l'une des urnes. Notons $N_{n,r}$ le nombre d'urnes vides.

1. Formaliser cette expérience aléatoire.
2. Calculer l'espérance de $N_{n,r}$.
3. Calculer la variance de $N_{n,r}$.
4. Soit $c \geq 0$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $r_n/n \to c$. Déduire de ce qui précède un résultat de convergence pour N_{n,r_n} renormalisé convenablement.

Exercice 8. (*Retours en 0 de la marche aléatoire simple asymétrique*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes avec la loi suivante :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p,$$

pour $p \in [0,1]$. On pose $S_0 := 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On suppose que $p \neq 1/2$. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que, presque sûrement, le nombre de passages en 0 de la marche $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fini.

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour X et Y des variables aléatoires réelles, on définit

$$d(X,Y) := \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{|X-Y|+1}\right].$$

1. Montrer que d est une distance sur l'espace des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ quotienté par la relation d'équivalence "être égales presque sûrement".
2. Montrer que d métrise la convergence en probabilité.
3. Montrer que l'espace des variables aléatoires muni de d est complet.

Exercice 10. (*Une inégalité de concentration*) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Soit $a \leq b$ et X une variable aléatoire à valeur dans $[a,b]$ telle que $\mathbb{E}[X] = 0$. Montrer que, pour tout $s \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{sX}\right] \leq \frac{b}{b-a}\mathrm{e}^{sa} + \frac{-a}{b-a}\mathrm{e}^{sb} =: f(s)$$

   et, en étudiant la fonction $\log f$, en déduire que

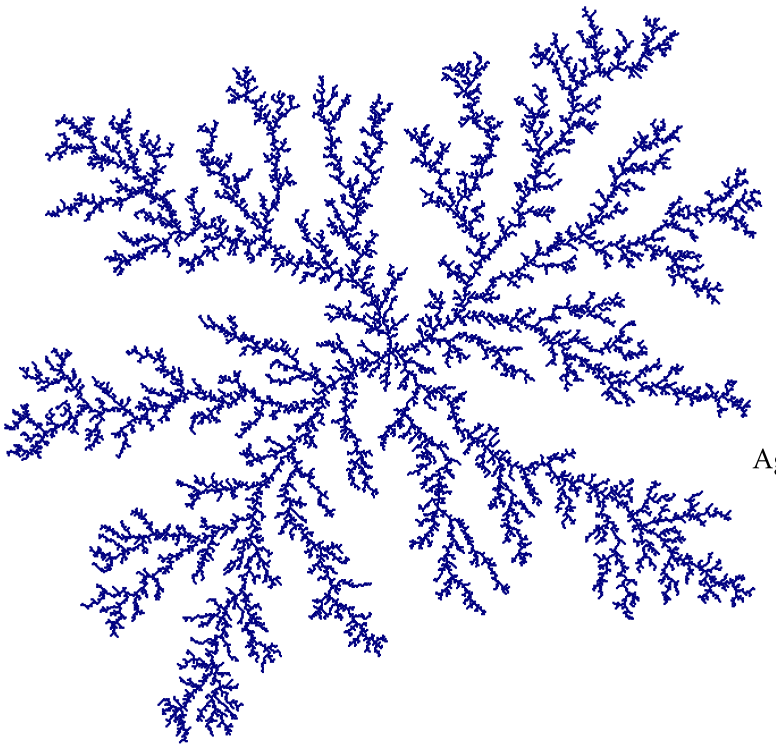
$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{sX}\right] \leq \exp\left(\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$

2. (*Inégalité de Hoeffding*) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $a_i \leq b_i$ tels que X_i soit à valeurs dans $[a_i, b_i]$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right).$$

3. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle telles qu'il existe $M > 0$ tel que $|X_k| \leq M$ pour tout $k \geq 1$. Montrer que, pour tout $\alpha > 1/2$,

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0.$$



Agrégation limitée par diffusion