TD 10 – Convergence de variables aléatoires

1 – Indépendance de familles de variables aléatoires

Exercice 1. Soit $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$ deux espaces mesurables et I et J deux ensembles. Soit $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_i)_{j\in J}$ deux familles de variables aléatoires à valeurs dans $(E,\mathcal{E})$ et $(F,\mathcal{F})$. Montrer que $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$ sont indépendantes si et seulement si, pour tous $m,n\geq 1$, $i_1,\dots,i_m\in I$ et $j_1,\dots,j_n\in J$, $(X_{i_1},\dots,X_{i_m})$ est indépendante de $(Y_{j_1},\dots,Y_{j_n})$.

Corrigé. La loi de (X,Y) est une mesure de probabilité sur $E^I\times F^J$, qui est un espace produit. La loi de (X,Y) est donc caractérisée par les lois fini-dimensionnelles (ou autrement dit par les valeurs sur les cylindres de $E^I\times F^J$). Ainsi on a

$$\begin{aligned} X \perp\!\!\!\perp Y \quad &\Leftrightarrow \quad P_{(X,Y)} = P_X\otimes P_Y \\ &\Leftrightarrow \quad \forall m,n\geq 1, \forall i_1,\dots,i_m\in I, \forall j_1,\dots,j_n\in J, \quad P_{(X_{i_1},\dots,X_{i_m},Y_{j_1},\dots,Y_{j_n})} = P_{(X_{i_1},\dots,X_{i_m})}\otimes P_{(Y_{j_1},\dots,Y_{j_n})}. \end{aligned}$$

ce qui conclut.

2 – Convergence de variables aléatoires

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ convergeant en probabilité vers X.

1. (*Lemme de Borel-Cantelli*) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}(A_n)<\infty$. Montrer que
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$
2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si et seulement si de toute sous-suite de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-sous-suite qui converge p.s. vers X.
3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Montrer que la suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.
4. (*Lemme de Fatou*) Supposons que $X_n\geq 0$ p.s. pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que
$$\mathbb{E}[X]\leq \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n].$$
5. (*Convergence dominée*) Supposons qu'il existe une variable aléatoire réelle Y telle que $\mathbb{E}[|Y|]<\infty$ et $|X_n|\leq Y$ p.s. pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}[|X_n-X|]\to 0$ quand $n\to\infty$.

Corrigé.

1. On l'a déjà au TD 1, mais proposons une autre démonstration. On a
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{\omega\in\Omega : \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = 1 \text{ pour une infinité de } n\right\} = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{A_n} = \infty\right\}.$$
Mais on a
$$\mathbb{E}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{A_n}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(A_n)<\infty,$$
donc $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{1}_{A_n}<\infty$ p.s. donc $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}A_n)=0$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

2. Montrons l'implication. On peut supposer sans perte de généralité que $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ et que $X = 0$: montrons que si $X_n \to 0$ en proba, alors il existe une extractrice ψ telle que $X_{\psi(n)} \to 0$ p.s. Construisons ψ par récurrence : on commence par $\psi(0) = 0$. Pour $k \geq 1$, on a $\mathbb{P}(|X_n| > 1/k) \to 0$ quand $n \to \infty$, donc on peut choisir $\psi(k) > \psi(k-1)$ tel que $\mathbb{P}(|X_{\psi(k)}| > 1/k) \leq 2^{-k}$. Alors, par Borel-Cantelli,
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{k\to\infty}\left\{|X_{\psi(k)}| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0,$$
c'est-à-dire, p.s. à partir d'un certain rang, $|X_{\psi(k)}| \leq 1/k$. Donc $X_{\psi(k)} \to 0$ p.s.
Pour la réciproque, raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une extractrice ϕ telle que $\mathbb{P}(|X_{\phi(n)} - X| < \varepsilon) > \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. Par hypothèse, il existe une extractice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge p.s., donc en probabilité vers X quand $n \to \infty$. Ceci contredit le fait que $\mathbb{P}(|X_{\phi(\psi(n))} - X| < \varepsilon) > \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$.
3. D'après la caractérisation par les sous-sous-suites, il suffit de montrer que si ϕ est une extractrice, il existe une extractrice ψ telle que $f(X_{\phi(\psi(n))})$ converge p.s. vers $f(X)$. D'après la première question, il existe une extractrice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge p.s. vers X. La conclusion en découle par continuité de f.
4. Il existe une extractice ϕ telle que $\mathbb{E}[X_{\phi(n)}] \to \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n]$. Alors il existe une extractice ψ telle que $X_{\phi(\psi(n))}$ converge p.s. vers X. Ainsi, en utlisant le lemme de Fatou,
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} X_{\phi(\psi(n))}\right] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[X_{\phi(\psi(n))}\right] = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n].$$
5. Il suffit de montrer que pour toute extraction ϕ, il existe une autre extraction ψ telle que $\mathbb{E}[X_{\phi\circ\psi(n)}] \to \mathbb{E}[Y]$ lorsque $n \to \infty$. Soit donc ϕ une extraction. D'après la première question, il existe une extraction ψ telle que $X_{\phi\circ\psi(n)}$ converge presque sûrement vers X lorsque $n \to \infty$. Le fait que $\mathbb{E}[X_{\phi\circ\psi(n)}] \to \mathbb{E}[Y]$ lorsque $n \to \infty$ est alors une conséquence du théorème de convergence dominée.

Exercice 3. (*Problème du collectionneur*) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère
$$T_n := \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}$$
le premier instant où toutes les valeurs ont été observées.

1. Soit $\tau_k^n := \inf\{m \geq 1 : \#\{X_1, \ldots, X_m\} = k\}$. Montrer que les variables $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\leq k\leq n}$ sont indépendantes, et déterminer leurs lois respectives.
2. Calculer l'espérance de T_n et en déterminer un équivalent quand $n \to \infty$.
3. Calculer la variance de T_n et montrer que $\mathrm{Var}(T_n) = O(n^2)$ quand $n \to \infty$.
Rappel. La variance d'une variable aléatoire réelle X est $\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.
4. En déduire un résultat de convergence pour T_n après renormalisation par une suite déterministe bien choisie.

Corrigé.

1. On a $\tau_1^n = 1$. Soit $(t_2, \ldots, t_n) \in (\mathbb{N}^*)^{n-1}$. On veut calculer $\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \ldots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n)$.
On va décomposer l'espace de probabilité en fonction de σ la permutation de $[\![1, n]\!]$ qui à i associe le numéro de la i^{e} nouvelle valeur entrant dans la collection. En posant $t_1 = 1$, on a
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\tau_2^n - \tau_1^n = t_2, \ldots, \tau_n^n - \tau_{n-1}^n = t_n)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\left\{X_{t_1+\cdots+t_k} = \sigma(k), \forall i \in [\![1, t_{k+1}-1]\!], X_{t_1+\cdots+t_k+i} \in \{\sigma(1), \ldots, \sigma(k)\}\right\} \cap \{X_{t_1+\cdots+t_n} = \sigma(n)\}\right)\\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \frac{1}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{t_k-1} = \frac{n!}{n^n} \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{t_k-1} = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{n+1-k}{n}\right)\left(\frac{k-1}{n}\right)^{t_k-1}.
\end{aligned}$$

Donc les variables aléatoires $(\tau_k^n - \tau_{k-1}^n)_{2\le k\le n}$ sont indépendantes, et ont respectivement pour loi

$$\sum_{i\ge 1}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(\frac{k-1}{n}\right)^{i-1}\delta_i,$$

ce qui est une loi géométrique de paramètre $1-(k-1)/n$.

2. On a $T_n = \tau_1 + \sum_{k=2}^n (\tau_k - \tau_{k-1})$ et donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_n] &= 1 + \sum_{k=2}^n \mathbb{E}[\tau_k - \tau_{k-1}] = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n+1-k}{n}\sum_{i\ge 1} i\left(\frac{k-1}{n}\right)^{i-1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n+1-k}{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{-2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{n}{n+1-k} = 1 + nH_{n-1},\end{aligned}$$

en utilisant $\sum_{i\ge 1} i x^{i-1} = 1/(1-x)^2$ et où H_n est la série harmonique. On a donc l'équivalent

$$\mathbb{E}[T_n] \sim n\log n,$$

quand $n\to\infty$.

3. On a

$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=2}^n \mathrm{Var}(\tau_k - \tau_{k-1}) = \sum_{k=2}^n \mathbb{E}\left[(\tau_k-\tau_{k-1})^2\right] - \mathbb{E}[\tau_k - \tau_{k-1}]^2$$

Calculons donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(\tau_k-\tau_{k-1})^2\right] &= \frac{n+1-k}{n}\sum_{i\ge 1} i^2\left(\frac{k-1}{n}\right)^{i-1} = \frac{n+1-k}{n}\left(1+\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-1}{n}\right)^{-3} \\ &= \frac{n+k-1}{n}\left(\frac{n}{n+1-k}\right)^2 = n\frac{n+k-1}{(n+1-k)^2}.\end{aligned}$$

en utilisant $\sum_{i\ge 1} i^2 x^{i-1} = (1+x)/(1-x)^3$. On obtient ainsi, en réutilisant le calcul du moment d'ordre 1,

$$\mathrm{Var}(T_n) = \sum_{k=2}^n n\left(\frac{n+k-1}{(n+1-k)^2} - \frac{n}{(n+1-k)^2}\right) = \sum_{k=2}^n n\frac{k-1}{(n+1-k)^2} = \sum_{i=1}^{n-1} n\frac{n-i}{i^2} = n^2\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right) - n\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\right).$$

On a donc l'équivalent

$$\mathrm{Var}(T_n) \sim n^2\frac{\pi^2}{6},$$

quand $n\to\infty$.

4. Il faut noter ici que $\mathrm{Var}(T_n) = o(\mathbb{E}[T_n]^2)$ donc T_n est très concentré autour de sa moyenne et va en être équivalent. Plus précisément, cela nous amène à considérer la convergence dans L^2 suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\frac{T_n}{n\log n}-1\right)^2\right]^{1/2} &\le \mathbb{E}\left[\left(\frac{T_n}{n\log n} - \mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n\log n}\right]\right)^2\right]^{1/2} + \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n\log n}\right]-1\right)^2\right]^{1/2} \\ &= \frac{\mathrm{Var}(T_n)^{1/2}}{n\log n} + \left|\mathbb{E}\left[\frac{T_n}{n\log n}\right]-1\right| \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme L^2 puis les questions 2. et 3. Cela montre que

$$\frac{T_n}{n\log n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 1.$$

Il en découle que la convergence a aussi lieu en probabilité. La convergence en probabilité peut également être démontrée directement en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \geq \varepsilon n \log n) \leq \frac{\mathrm{Var}(T_n)}{(\varepsilon n \log n)^2} \leq \frac{C}{\varepsilon^2 \log(n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

donc $(T_n - \mathbb{E}[T_n])/(n\log(n)) \to 0$ en probabilité. Or $\mathbb{E}(T_n) \sim n\log(n)$ quand $n \to \infty$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\{|T_n - n\log(n)| \geq 2\varepsilon n \log(n)\} \subset \{|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \varepsilon n \log(n)\}$ pour n assez grand, ce qui montre la convergence en probabilité.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que Ω est dénombrable et que la tribu $\mathcal{F}$ est $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que les convergences "presque-sûre" et "en probabilité" sont équivalentes sur cet espace, pour des variables aléatoires à valeur dans un espace métrique (E, d).

Corrigé. On énumère $\Omega = \{\omega_i\}_{i\geq 1}$. Soit X et (X_n) des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que

$$X_n \xrightarrow{(P)} X.$$

Pour montrer que X_n converge p.s. vers X, il suffit de montrer que pour tout $k > 1$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega, \limsup_{n\to\infty} d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \frac{1}{k}\right\}\right) = 0.$$

Soit $\omega_i \in \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$. D'après la convergence en probabilité de X_n vers X, on a

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \frac{1}{k}\right\}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang, $\omega_i \notin \{\omega, d(X_n(\omega), X(\omega)) \geq \varepsilon\}$. On en déduit que pour tout ω_i de probabilité strictement positive, $\limsup d(X_n(\omega_i), X(\omega_i)) \leq 1/k$. La dénombrabilité de Ω permet de conclure.

3 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. (*Une amélioration de la loi faible des grands nombres*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles bornée dans L^2 (c'est-à-dire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que $\mathbb{E}[X_n^2] \leq M$ pour tout $n \geq 1$) et vérifiant $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = 0$ pour tous $n \neq m$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Remarque. Si X et Y sont des v.a. L^2, on note $\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ la *covariance* de X et Y.

1. Montrer que $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/n \to 0$ dans L^2.
2. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que $(S_{n^2} - \mathbb{E}[S_{n^2}])/n \to 0$ presque sûrement.
3. En déduire que $(S_n - \mathbb{E}[S_n])/n \to 0$ presque sûrement.

Corrigé. Quitte à poser $\widetilde{X}_n = X_n - \mathbb{E}(X_n)$, on peut supposer que les variables X_n sont centrées.

1. Soit $\varepsilon > 0$. On a par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \varepsilon n) \leq \frac{\mathbb{E}((S_n)^2)}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i^2) \leq \frac{M}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui montre la convergence en probabilité.

2. Soit $\varepsilon > 0$. On a par ce qui précède

$$\mathbb{P}\left(|S_{n^2}| \geq \varepsilon n^2\right) \leq \frac{M}{\varepsilon^2 n^2},$$

qui est sommable D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s. il existe $n_0 \geq 1$ tel que $n^{-2}|S_{n^2}| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, $\limsup n^{-2}|S_{n^2}| \leq \varepsilon$. Puis en prenant une suite $\varepsilon_k \downarrow 0$, on obtient le résultat.

3. Considérons $k \in \mathbb{N}$ et n tel que $n^2 < k \leq (n+1)^2$. Alors, $S_k = S_{n^2} + (S_k - S_{n^2})$, et on voit qu'il suffit de montrer que p.s. $\max_{n^2<k\leq(n+1)^2} |S_k - S_{n^2}| = o(n^2)$. Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{n^2<k\leq(n+1)^2} |S_k - S_{n^2}| \geq n^2\varepsilon\right) &\leq \sum_{n^2<k\leq(n+1)^2} \mathbb{P}(|S_k - S_{n^2}| \geq n^2\varepsilon) \\
&\leq \sum_{n^2<k\leq(n+1)^2} \frac{(k-n^2)M}{\varepsilon^2 n^4} \\
&\leq \frac{(2n+1)^2 M}{\varepsilon^2 n^4}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, p.s., il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\max_{n^2<k\leq(n+1)^2} |S_k - S_{n^2}| \leq n^2\varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Puis en prenant une suite $\varepsilon_k \downarrow 0$, on obtient le résultat.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, convergeant en probabilité sous $\mathbb{P}$ vers une variable aléatoire X. Montrer que si $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

Corrigé. *Méthode 1.* On peut utiliser le résultat montré à l'exercice 2 du TD 7 (quantification de l'absolue continuité) : comme $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ est finie, on a

$$\forall \delta > 0, \exists \eta > 0 : \forall A \in \mathcal{A}, \quad (\mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \mathbb{Q}(A) \leq \delta).$$

Soit $\varepsilon, \delta > 0$. On considère $\eta > 0$ fourni par la quantification de l'absolue continuité. À partir d'un certain rang, on a $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \eta$ donc on a $\mathbb{Q}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \delta$, ce qui montre que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.
Méthode 2. D'après Radon-Nikodym on peut trouver une fonction f mesurable positive qui vérifie

$$\forall A \in \mathcal{A}, \mathbb{Q}(A) = \int f \mathbb{1}_A \, \mathrm{d}\mathbb{P},$$

et de plus $\int f \, \mathrm{d}\mathbb{P} = 1 < \infty$, donc f est intégrable. Soit $\varepsilon > 0$, on note $A_n = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$. Pour tout $M > 0$, on a

$$\mathbb{Q}(A_n) = \int f \mathbb{1}_{A_n} \mathrm{d}\mathbb{P} = \int f \mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_{f\leq M} \mathrm{d}\mathbb{P} + \int f \mathbb{1}_{A_n} \mathbb{1}_{f>M} \mathrm{d}\mathbb{P} \leq M\mathbb{P}(A_n) + \int f \mathbb{1}_{f>M} \mathrm{d}\mathbb{P}$$

On obtient donc, en utilisant que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{P}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{Q}(A_n) \leq \int f \mathbb{1}_{f>M} \mathrm{d}\mathbb{P} \xrightarrow[M\to\infty]{} 0,$$

par convergence dominée (domination par f). Cela montre que $X_n \to X$ en probabilité sous $\mathbb{Q}$.

Exercice 7. Considérons n urnes et plaçons r boules indépendamment et uniformément dans une l'une des urnes. Notons $N_{n,r}$ le nombre d'urnes vides.

1. Formaliser cette expérience aléatoire.
2. Calculer l'espérance de $N_{n,r}$.
3. Calculer la variance de $N_{n,r}$.
4. Soit $c \geq 0$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $r_n/n \to c$. Déduire de ce qui précède un résultat de convergence pour N_{n,r_n} renormalisé convenablement.

Corrigé.

1. Soit $(X_i)_{1\leq i\leq r}$ des variables indépendantes de loi uniforme dans $[\![1,n]\!]$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. La variable X_i indique l'urne dans laquelle se trouve la i^{e} boule. Pour $k\in[\![1,n]\!]$, notons $A_k := \{\forall i\in[\![1,r]\!], X_i \neq k\}$ l'événement correspondant au fait que la k^{e} urne soit vide. Alors, on a $N_{n,r} = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k}$.
2. Calculons le premier moment :
$$\mathbb{E}[N_{n,r}] = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^r \mathbb{P}(X_i \neq k) = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^r,$$
où l'on a utilisé l'indépendance des X_i. Calculons maintenant le moment d'ordre 2 :
$$\mathbb{E}[N_{n,r}^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^n \mathbb{1}_{A_k}\mathbb{1}_{A_l}\right] = \sum_{k,l=1}^n \mathbb{P}(A_k\cap A_l) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) + \sum_{1\leq k\neq l\leq n} \mathbb{P}(A_k\cap A_l).$$
Or $\mathbb{P}(A_k\cap A_l) = \mathbb{P}(\forall i\in[\![1,r]\!], X_i\notin\{k,l\}) = ((n-2)/n)^r$ et donc on obtient
$$\mathbb{E}[N_{n,r}^2] = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^r + n(n-1)\left(\frac{n-2}{n}\right)^r.$$
et finalement
$$\mathrm{Var}(N_{n,r}) = n\left(\frac{n-1}{n}\right)^r + n(n-1)\left(\frac{n-2}{n}\right)^r - n^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2r}.$$
3. On a alors l'équivalent
$$\mathbb{E}[N_{n,r}] \sim n\mathrm{e}^{-c}$$
et
$$\mathrm{Var}(N_{n,r}) = o(n^2).$$
Il en découle que
$$\frac{N_{n,r}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} \mathrm{e}^{-c}$$
de la même manière que dans l'exercice 3.

Exercice 8. (*Retours en 0 de la marche aléatoire simple asymétrique*) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, indépendantes avec la loi suivante :
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1-p,$$
pour $p\in[0,1]$. On pose $S_0 := 0$ et, pour $n\geq 1$,
$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k.$$
On suppose que $p\neq 1/2$. En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, montrer que, presque sûrement, le nombre de passages en 0 de la marche $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fini.

Corrigé. On pose $A_n := \{S_n = 0\}$, de sorte que $\limsup_{n\to\infty} A_n$ soit l'événement "$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ passe une infinité de fois en 0". D'après le lemme de Borel-Cantelli, il suffit de montrer que $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge. Or $\mathbb{P}(A_n)$ est nul si n est impair et

$$\mathbb{P}(A_{2n}) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

Or $\mathbb{P}(A_{2n+2})/\mathbb{P}(A_{2n}) = \frac{(2n+1)(2n+1)}{(n+1)^2} p(1-p) \to 4p(1-p)$ quand $n \to \infty$. Or $4p(1-p) < 1$ puisque $p \neq 1/2$, d'où la convergence de la série.

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Pour X et Y des variables aléatoires réelles, on définit

$$d(X,Y) := \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{|X-Y|+1}\right].$$

1. Montrer que d est une distance sur l'espace des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ quotienté par la relation d'équivalence "être égales presque sûrement".
2. Montrer que d métrise la convergence en probabilité.
3. Montrer que l'espace des variables aléatoires muni de d est complet.

Corrigé.

1. Il est clair que $d(X,Y) = d(Y,X)$ et que $d(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$ p.s. Montrons l'inégalité triangulaire : soit X, Y, Z des v.a. réelles. La fonction $f : x \mapsto x/(x+1)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\frac{|X-Z|}{|X-Z|+1} \leq \frac{|X-Y|+|Y-Z|}{|X-Y|+|Y-Z|+1} \leq \frac{|X-Y|}{|X-Y|+1} + \frac{|Y-Z|}{|Y-Z|+1},$$

   ce qui donne $d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z)$. Donc d définit bien une distance.

2. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f introduite plus haut est croissante et bornée par 1 donc

$$d(X_n, X) = \mathbb{E}[f(|X_n - X|)] \leq f(\varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon),$$

   ce qui permet de montrer que la convergence en probabilité implique la convergence pour d (car $f(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$). Réciproquement, on a

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(f(|X_n - X|) \geq f(\varepsilon)) \leq \frac{\mathbb{E}[f(|X_n - X|)]}{f(\varepsilon)} = \frac{d(X_n, X)}{f(\varepsilon)},$$

   ce qui montre que la convergence pour d implique la convergence en probabilité.

3. On procède d'une manière proche de la démonstration de la complétude de L^p. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour d. Il existe une extractrice ϕ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}\left(\left|X_{\phi(n+1)} - X_{\phi(n)}\right| \geq \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

   Alors, par Borel-Cantelli, p.s. il existe seulement un nombre fini de n tels que $\left|X_{\phi(n+1)} - X_{\phi(n)}\right| \geq \frac{1}{2^n}$ donc p.s. $\sum_{n\geq 0} \left|X_{\phi(n+1)} - X_{\phi(n)}\right| < \infty$. Ainsi on peut définir $X = X_0 + \sum_{n\geq 0} X_{\phi(n+1)} - X_{\phi(n)}$ et X est limite de ses sommes partielles p.s., c'est-à-dire $X_{\phi(n)} \to X$ p.s. En particulier, $X_{\phi(n)} \to X$ en probabilité.

Exercice 10. (*Une inégalité de concentration*) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

1. Soit $a \leq b$ et X une variable aléatoire à valeur dans $[a,b]$ telle que $\mathbb{E}[X]=0$. Montrer que, pour tout $s \geq 0$,
$$\mathbb{E}\left[e^{sX}\right] \leq \frac{b}{b-a}e^{sa} + \frac{-a}{b-a}e^{sb} =: f(s)$$
et, en étudiant la fonction $\log f$, en déduire que
$$\mathbb{E}\left[e^{sX}\right] \leq \exp\left(\frac{s^2(b-a)^2}{8}\right).$$

2. (*Inégalité de Hoeffding*) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $a_i \leq b_i$ tels que X_i soit à valeurs dans $[a_i, b_i]$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}\right).$$

3. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes d'espérance nulle telles qu'il existe $M > 0$ tel que $|X_k| \leq M$ pour tout $k \geq 1$. Montrer que, pour tout $\alpha > 1/2$,
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} 0.$$

Corrigé.

1. Par convexité de la fonction $x \in [a,b] \mapsto e^{sx}$, on a
$$e^{sX} \leq \frac{b-X}{b-a}e^{sa} + \frac{X-a}{b-a}e^{sb}$$
et donc en passant à l'espérance
$$\mathbb{E}\left[e^{sX}\right] \leq \frac{b}{b-a}e^{sa} + \frac{-a}{b-a}e^{sb},$$
car $\mathbb{E}[X]=0$. Notons maintenant $g(s) = \log(\frac{b}{b-a}e^{sa} + \frac{-a}{b-a}e^{sb})$. On calcule les dérivées :
$$g'(s) = \frac{ab(e^{sa}-e^{sb})}{be^{sa}-ae^{sb}} \quad \text{et} \quad g''(s) = ab\frac{(b-a)^2e^{s(a+b)}}{(be^{sa}-ae^{sb})^2}.$$
Or par formule de Taylor avec reste intégral, on a
$$g(s) = g(0) + g'(0)s + \int_0^s g''(u)u\,\mathrm{d}u.$$
Remarquons alors que $g(0) = g'(0) = 0$ et
$$g''(u) = (b-a)^2\frac{abe^{u(a+b)}}{(be^{ua}-ae^{ub})^2} = -(b-a)^2\frac{xy}{(x+y)^2}$$
avec $x = be^{ua} \geq 0$ et $y = -ae^{ub} \geq 0$ (en effet on a $a \leq 0 \leq b$ car $\mathbb{E}[X]=0$). Finalement, on en déduit que $|g''(u)| \leq (b-a)^2/4$ et donc
$$|g(s)| = \left|\int_0^s g''(u)u\,\mathrm{d}u\right| \leq \frac{(b-a)^2s^2}{8},$$
ce qui donne le résultat souhaité.

2. On va utiliser une méthode assez classique en probabilité : on passe à l'exponentielle avec un facteur s de chaque côté dans la probabilité, puis on applique Markov et enfin on optimise en s. Commençons par remarquer qu'on peut remplacer X_i par $\tilde{X}_i = X_i - \mathbb{E}[X_i]$, ce qui change a_i et b_i en $\tilde{a}_i = a_i - \mathbb{E}[X_i]$ et $\tilde{b}_i = b_i - \mathbb{E}[X_i]$ mais on a toujours $b_i - a_i = \tilde{b}_i - \tilde{a}_i$: cela montre que l'on peut supposer sans perte de généralité que $\mathbb{E}[X_i] = 0$. Pour $s \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) = \mathbb{P}\left(e^{sS_n} \geq e^{st}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[e^{sS_n}\right]}{e^{st}},$$

par l'inégalité de Markov. On a alors, par indépendance,

$$\mathbb{E}\left[e^{sS_n}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{sX_i}\right] \leq \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{s^2(b_i - a_i)^2}{8}\right),$$

en appliquant la question 1. On a donc montré que

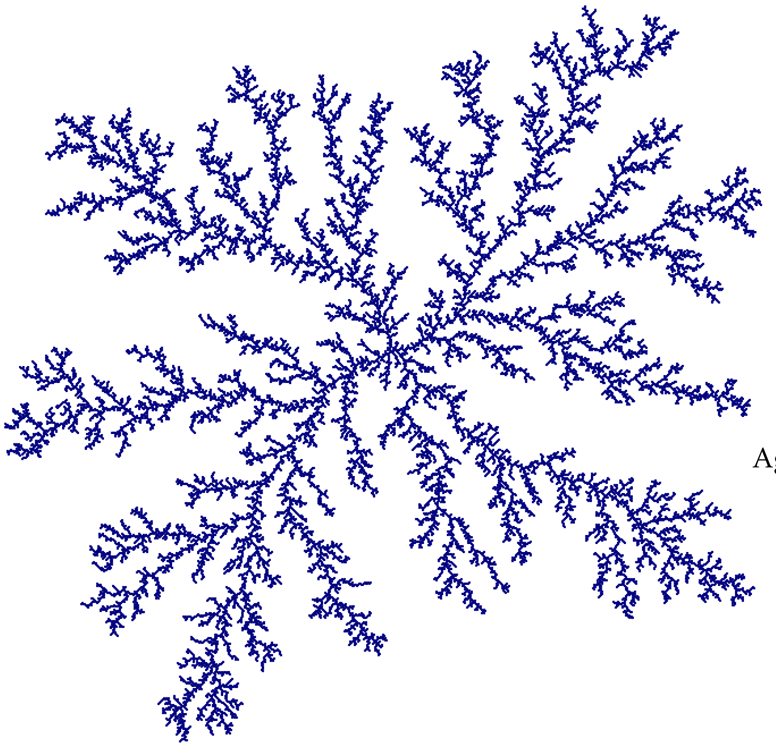
$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq \exp\left(-st + \frac{s^2}{8}\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2\right).$$

Finalement, on cherche le s qui minimise cette expression et c'est :

$$s = \frac{4t}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2},$$

qui donne le résultat.

3. On applique l'inégalité de Hoeffing, puis le lemme de Borel-Cantelli.



Agrégation limitée par diffusion