TD 1 – Espaces mesurés

1 – Petites questions

1. Est-ce que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une tribu ?
2. Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus, est-ce que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est toujours une tribu ?
3. Soit $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Est-ce que la fonction dérivée f' est mesurable ?

Corrigé.

1. Non : il n'est pas stable par complémentaire.
2. Non : si Ω contient au moins 3 éléments, en considérant $\mathcal{F} := \{\emptyset, \Omega, \{\omega\}, \Omega \setminus \{\omega\}\}$ et $\mathcal{G} := \{\emptyset, \Omega, \{\omega'\}, \Omega \setminus \{\omega'\}\}$ où $\omega \neq \omega'$, $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ n'est pas stable par union.
3. Oui : f' est limite simple de taux d'accroissements qui sont des fonctions mesurables. Plus formellement, on définit
$$g_n : x \in]0,1[\mapsto \begin{cases} n\Big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\Big) & \text{si } x \in]0, 1-\frac{1}{n}[, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$
qui est continue par morceaux donc mesurable. Or $f' = \lim_{n\to\infty} g_n$, donc f' est mesurable.
Remarque. Il a été proposé lors du TD de répondre à cette question grâce au théorème de Darboux. Cela ne fonctionne pas, car la propriété des valeurs intermédiaires garantit que l'image d'un intervalle est un intervalle, mais ne dit rien sur l'image réciproque.

2 – Limites supérieure et inférieure d'une suite de réels

Exercice 1. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels. On définit les deux nombres suivants dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k.$$

1. Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens.
2. Montrer les assertions suivantes et écrire leurs analogues faisant intervenir $\liminf_{n\to\infty} a_n$:
   (a) $\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha \Rightarrow \exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha$.
   (b) $\exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \alpha$.
   (c) $\limsup_{n\to\infty} a_n > \alpha \Rightarrow \forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha$.
   (d) $\forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \geq \alpha$.
3. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} a_n$ et $\liminf_{n\to\infty} a_n$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$ de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.
4. Vérifier que a_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$.

Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Corrigé.

1. La suite de terme général $\sup_{k\geq n} a_k$ est décroissante, donc elle a bien une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. De même pour la lim inf et la limite croissante.

2. (a) $\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha \Rightarrow \exists n \geq 0, \sup_{k\geq n} a_k < \alpha \Rightarrow \exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha$.

   (b) $\exists n \geq 0, \forall k \geq n, a_k < \alpha \Rightarrow \exists n \geq 0, \sup_{k\geq n} a_k \leq \alpha \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \leq \alpha$, où la 2e implication découle du fait que la suite $(\sup_{k\geq n} a_k)$ est décroissante.

   (c) $\limsup_{n\to\infty} a_n > \alpha \Rightarrow \forall n \geq 0, \sup_{k\geq n} a_k > \alpha \Rightarrow \forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha$, où la 1re implication découle du fait que la suite $(\sup_{k\geq n} a_k)$ est décroissante.

   (d) $\forall n \geq 0, \exists k \geq n, a_k > \alpha \Rightarrow \forall n \geq 0, \sup_{k\geq n} a_k \geq \alpha \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \geq \alpha$.

   Pour la lim inf, on remarque que $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

3. Soit L la plus grande valeur d'adhérence de la suite (a_n). Il existe alors une extraction ϕ (c'est-à-dire une fonction injective croissante $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) telle que $a_{\phi(n)} \to L$. Comme $a_{\phi(n)} \leq \sup_{k\geq\phi(n)} a_k$, en passant à la limite lorsque $n \to \infty$ on en déduit que $L \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$.

   Notons $l = \limsup_{n\to\infty} a_n$ et montrons que l est une valeur d'adhérence de la suite (a_n). Pour cela on construit une extraction ϕ par récurrence en commençant par $\phi(0) := 0$. Soit $n \geq 1$, supposons que $\phi(n-1)$ est bien défini. Il existe un entier $N \geq \phi(n-1)$ tel que $l + 1/n > \sup_{k\geq N} a_k > l - 1/n$. Il existe donc un entier $\phi(n) \geq N$ tel que $l + 1/n > a_{\phi(n)} > l - 1/n$. Alors on a bien $a_{\phi(n)} \to l$, qui est bien valeur d'adhérence.

   Pour la lim inf, on utilise de nouveau que $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$.

4. Si a_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors l est son unique valeur d'adhérence donc $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$ par la question 3.

   Si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$, alors, comme on a $\inf_{k\geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\geq n} a_k$, par théorème d'encadrement on déduit que a_n converge vers l.

3 – Tribus

Exercice 2. (*Opérations sur les tribus*)

1. (*Tribu induite*) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur Ω et $B \in \mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur B.

2. (*Tribu réciproque*) Soit $f\colon X \to Y$ une application et $\mathcal{G}$ une tribu sur Y. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{G}\}$ est la plus petite tribu sur X rendant f mesurable.

3. (*Tribu image*) Soit $f\colon X \to Y$ une application et $\mathcal{F}$ une tribu sur X. Montrer que $f(\mathcal{F}) := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ est la plus grande tribu sur Y rendant f mesurable.

4. (*Union croissante de tribus*) On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geq 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\},\{1\},\ldots,\{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geq 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

   Indication. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser le sous-ensemble $2\mathbb{N}$.

Corrigé.

1. On vérifie les 3 points de la définition :
   - ▷ $B = \Omega \cap B \in \mathcal{F}_B$.
   - ▷ Soit $C = B \cap D \in \mathcal{F}_B$ avec $D \in \mathcal{F}$. Alors $D^c \in \mathcal{F}$ et $C_B^c = B \cap D^c$ appartient à $\mathcal{F}_B$ (où C_B^c est le complémentaire de C dans B).
   - ▷ Soit $C_n = B \cap D_n \in \mathcal{F}_B$ avec $D_n \in \mathcal{F}$. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{F}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = B \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ appartient à $\mathcal{F}_B$.

2. Montrons tout d'abord que $f^{-1}(\mathcal{G})$ est une tribu :
   - ▷ $X = f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\mathcal{G})$ car $Y \in \mathcal{G}$.
   - ▷ Soit $A \in f^{-1}(\mathcal{G})$. Alors $A = f^{-1}(B)$ avec $B \in \mathcal{G}$ et $A^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathcal{G})$ car $B^c \in \mathcal{G}$.

▷ Soit $A_n = f^{-1}(B_n)$ avec $B_n \in \mathcal{G}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \in f^{-1}(\mathcal{G})$ car $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{G}$.

Il est immédiat par définition que f est mesurable de $(X, f^{-1}(\mathcal{G})) \to (Y,\mathcal{G})$. En outre, si f est mesurable de $(X,\mathcal{F}) \to (Y,\mathcal{G})$ avec $\mathcal{F}$ une tribu sur X, alors, pour tout $B \in \mathcal{G}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ et donc $f^{-1}(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}$.

3. On vérifie, toujours avec les 3 points de la définition, que $f(\mathcal{F})$ est bien une tribu sur Y. Il est ensuite immédiat que c'est la plus grande rendant f mesurable.

   Remarque. Si l'espace mesurable $(X,\mathcal{F})$ est aussi muni d'une mesure μ, on peut définir la *mesure image* de μ par f, notée $f\cdot\mu$, par

$$\forall B \in f(\mathcal{F}), \quad f\cdot\mu(B) := \mu(f^{-1}(B)).$$

4. Posons

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n,$$

   et supposons que $\mathcal{F}$ soit une tribu. On a

$$\{2n\} \in \mathcal{F}_{2n} \subset \mathcal{F} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N} = \bigcup_{n\geq 0} \{2n\}.$$

   Ainsi, $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}_{n_0}$. Or, les seuls éléments de cardinal infini de $\mathcal{F}_{n_0}$ sont de la forme $\mathbb{N}\backslash A$, où A est une partie de $\{0,1,\dots,n_0\}$. On obtient donc une contradiction.

   Remarque. Une autre manière de voir que $\mathcal{F}$ n'est pas une tribu est d'utiliser l'exercice 3 du DM1 : $\mathcal{F}$ est infini dénombrable donc ne peut pas être une tribu.

4 – Limites supérieure et inférieure d'ensembles

Exercice 3. On considère un ensemble E et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subset E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

1. Décrire avec des mots les ensembles suivants

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k.$$

   Relier les fonctions indicatrices $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$ et $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geq 1$.

2. Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées.
   (a) $(\limsup_{n\to\infty} A_n)^c = \liminf_{n\to\infty} (A_n)^c$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$.
   (b) $\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\right\}$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n = \left\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\right\}$.
   (c) $\limsup_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$ et $\limsup_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) \subset \limsup_{n\to\infty} A_n \cap \limsup_{n\to\infty} B_n$.
3. Calculer $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$ dans les cas suivants.
   (a) $A_{2n} = F$ et $A_{2n+1} = G$, où $F, G \subset E$ sont fixés.
   (b) $A_{2n} =]0, 3+1/(2n)[$ et $A_{2n+1} =]-1-1/(3n), 2]$.
   (c) $A_n = p_n\mathbb{N}$, où $(p_n)_{n\geq 1}$ est la suite des nombres premiers.
   (d) $A_n = [\sin(n)-1, \sin(n)+1]$.

Corrigé.

1. L'ensemble $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang, ou, en d'autres mots, l'ensemble $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

   L'ensemble $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une infinité de A_n.

   On a l'égalité
$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}. \tag{1}$$
   En effet,
$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to\infty} A_n &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, x \in A_n \\ &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \inf_{n\geq n_0} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1. \end{aligned}$$
   L'égalité
$$\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n} = \limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}$$
   se démontre de façon similaire à (1) ou en passant au complémentaire dans (1) en utilisant la question 2(a).

2. (a) Pour la première égalité, il suffit d'écrire
$$\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k\right)^c = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} (A_k)^c.$$
   Pour la deuxième, on peut dire que si un élément appartient à tous les A_n, sauf un nombre fini d'entre eux, alors il appartient à une infinité de A_n.

   (b) L'ensemble $\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{A_n} = \infty\}$ est l'ensemble des éléments appartenant à une infinité de A_n et l'ensemble $\{\sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{(A_n)^c} < \infty\}$ est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent à tous les A_n sauf un nombre fini, d'où le résultat d'après la question 1.

   (c) La première égalité provient du fait qu'un élément appartient à une infinité de $A_n \cup B_n$ si et seulement si il appartienent à une infinité de A_n ou bien à une infinité de B_n.

   La seconde provient du fait que si on appartient à une infinité de $A_n \cap B_n$ alors on appartient à une infinité de A_n et une infinité de B_n.

3. (a) On a $\limsup A_n = F \cup G$ et $\liminf A_n = F \cap G$.

   (b) On a $\limsup A_n = [-1,3]$ et $\liminf A_n =]0,2]$.

   (c) On a $\liminf A_n = \limsup A_n = \{0\}$.

   (d) On a $\limsup A_n =]-2,2[$ et $\liminf A_n = \{0\}$. En effet, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,1]$ (voir ci-dessous), donc pour tout $0 < x < 2$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\sin(n) > x-1$ et aussi une infinité de n tels que $\sin(n) < x-1$. La première famille montre que $x \in \limsup A_n$ et la deuxième famille que $x \notin \liminf A_n$. Il est ensuite facile de vérifier que $\pm 2 \notin \limsup A_n$ (car π est irrationnel donc on n'a jamais $\sin(n) \in \{-1,1\}$) et $0 \in \liminf A_n$.

   Vérifions à présent que $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,1]$. Tout d'abord le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas monogène car π est irrationel (si $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, alors, comme $1 \in a\mathbb{Z}$, on a $a \in \mathbb{Q}$ et on en déduit que $\pi \in \mathbb{Q}$), donc dense dans $\mathbb{R}$. Montrons que $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On sait qu'il existe $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tels que $p_n + 2\pi q_n \to \pi$. Par irrationnalité de π, on voit que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être bornée. Elle admet donc une sous-suite $(p_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Comme $-p_n - 2\pi(q_n - 1) \to \pi$, on peut supposer que $p_{\varphi(n)} \to \infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $(p'_n)_{n\in\mathbb{N}}, (q'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ tels que $p'_n + 2\pi q'_n \to x$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $\psi(n)$ tel que $p'_n + 2p_{\varphi(\psi(n))} \geq 0$. Et on a $p'_n + 2p_{\varphi(\psi(n))} + 2\pi(q'_n + 2q_n - 1) \to x$ donc on a bien approché x par des éléments de $\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z}$. Enfin, on remarque que $\{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\} = \sin(\mathbb{N} + 2\pi\mathbb{Z})$ qui est dense dans $[-1,1]$ car $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est continue et surjective.

Exercice 4. (*Lemme de Borel-Cantelli*) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que
$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n),$$
et que si $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) < \infty$, alors
$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
Que se passe-t-il si $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) = \infty$?
2. (*Lemme de Borel-Cantelli*) On suppose que $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que
$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$
3. (*Une application du lemme de Borel-Cantelli*) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0,1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de couple (p,q) avec $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que
$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$
c'est-à-dire presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$".

Corrigé.

1. On remarque que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $k \geq n$,
$$\mu\left(\bigcap_{p\geq n} A_p\right) \leq \mu(A_k).$$
Ainsi,
$$\mu\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right) \leq \inf_{k\geq n} \mu(A_k). \tag{2}$$
Or la suite $(\bigcap_{k\geq n} A_k)_{n\geq 0}$ est croissante. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (2). De même, on a
$$\mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \geq \sup_{k\geq n} \mu(A_k). \tag{3}$$
Or la suite $(\bigcup_{k\geq n} A_k)_{n\geq 0}$ est décroissante et $\mu(\bigcup_{n\geq 0} A_n) < +\infty$. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand $n \to \infty$ dans (3).
On peut aussi utiliser le résultat précédent et raisonner en passant au complémentaire. En effet, posons $F = \bigcup_{n\geq 0} A_n$. On a alors
$$F \setminus \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} (F \setminus A_n).$$
Donc,
$$\mu\left(F \setminus \limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(F \setminus A_n),$$
et ainsi, en utilisant que $\mu(F) < \infty$,
$$\mu(F) - \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \mu(F) - \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Comme $\mu(F) < \infty$, cela implique le résultat.

Enfin, si l'on a $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \infty$, la formule n'est plus forcément valable : par exemple, en considérant μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et $A_n = \{n\}$, on a $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mu(\emptyset) = 0$ mais, d'autre part, $\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) = 1$.

2. On a, pour tout $n \geq 0$,

$$\mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq n} \mu(A_k).$$

Or $\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$ pour tout $n \geq 0$ et $\sum_{k\geq n} \mu(A_k)$ est le reste d'une série convergente et donc tend vers 0 quand $n \to \infty$. On obtient ainsi le résultat.

3. Pour tout $q \geq 1$, on note

$$A_q = [0,1] \cap \bigcup_{p=0}^{q} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}\right].$$

Ainsi, $\lambda(A_q) \leq 2/q^{1+\varepsilon}$. Par conséquent,

$$\sum_{q\geq 1} \lambda(A_q) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, $\lambda(\limsup_{q\to\infty} A_q) = 0$, or l'ensemble $\limsup_{q\to\infty} A_q$ contient l'ensemble des réels bien approchables par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$.

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. (*Support d'une mesure*) Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable, c'est-à-dire admettant une suite dense). On définit

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n : \forall r > 0, \mu(B(x,r)) > 0\}.$$

1. Montrer que S est fermé.
2. Montrer que, pour tout fermé F strictement contenu dans S, $\mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$.
3. Montrer que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$.

Remarque. On appelle S le *support* de la mesure μ et on vient de montrer que c'est le plus petit fermé portant toute la masse de μ.

Corrigé.

1. Soit $x \notin S$. Par définition, il existe $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x,r_x)) = 0$. Alors, pour tout $z \in B(x,r_x)$, on a $B(z, r_x - |z-x|) \subset B(x,r_x)$ et donc $\mu(B(z, r_x - |z-x|)) = 0$ et $z \in S^c$. On a montré que $B(x,r_x)$ est incluse dans S^c et donc S^c est ouvert.
2. Soit F est un fermé strictement contenu dans S. Soit $x \in S \setminus F$. Comme F^c est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset F^c$ et donc $\mu(F^c) \geq \mu(B(x,r)) > 0$ car $x \in S$.
3. On sait que pour tout $x \notin S$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x,r_x)) = 0$. Si K est un compact inclu dans S^c, il existe un recouvrement ouvert

$$K \subset \bigcup_{x\in K} B(x,r_x),$$

duquel on peut extraire un recouvrement fini (par définition des compacts). De plus S^c peut être vu comme une réunion dénombrable de compacts, par exemple

$$S^c = \bigcup_{n\geq 1} \left\{x : d(x,S) \geq \frac{1}{n}, |x| \leq n\right\},$$

(compacts en tant que fermés bornés de $\mathbb{R}^n$) ainsi S^c est une union dénombrable de boules ouvertes $S^c = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, r_{x_i})$ et

$$\mu(S^c) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B(x_i, r_{x_i})) = 0.$$

Remarque. Plaçons nous dans le cas d'un espace métrique séparable quelconque E. Pour $x \in S^c$, on définit $r_x := \sup\{r > 0 : \mu(B(x,r)) = 0\}$. Par définition de S, on a bien $r_x > 0$ et on a $r_x < \infty$ sinon $\mu = 0$ et la question est facile. Il est clair que pour tout $0 < r < r_x$, $\mu(B(x,r)) = 0$. En outre, on a $B(x,r_x) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x, r_x - \frac{1}{n})$ avec une union croissante, donc on a

$$\mu(B(x,r_x)) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(B\left(x, r_x - \frac{1}{n}\right)\right) = 0.$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans S^c. Montrons alors que

$$S^c \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r_{x_n}).$$

Soit $x \in S^c$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) < r_x/2$. Alors $B(x_n, r_x/2) \subset B(x, r_x)$, donc $\mu(B(x_n, r_x/2)) \leq \mu(B(x, r_x)) = 0$. Ainsi $r_{x_n} \geq r_x/2$ et donc $x \in B(x_n, r_{x_n})$, ce qui montre l'inclusion annoncée. Finalement, on en déduit que

$$\mu(S^c) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B(x_n, r_{x_n})) = 0.$$

Exercice 6. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ non nulle et $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tous $x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Corrigé. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = f^{-1}(]r - \varepsilon/2, r + \varepsilon/2[)$. La fonction f étant mesurable, chaque ensemble A_r est mesurable. En outre,

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r = f^{-1}(\mathbb{R}) = E.$$

Supposons que $\mu(A_r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Alors

$$\mu(E) = \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mu(A_r) = 0.$$

Or $\mu(E) > 0$. Donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\mu(A_{r_0}) > 0$. De plus $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous $x, y \in A_{r_0}$.

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}$ de la distance discrète définie par $d(x,y) = \mathbb{1}_{x\neq y}$. Quelle est alors la tribu borélienne ? Est-ce que les tribus engendrées par les boules ouvertes et les boules fermées sont la tribu borélienne ?

Corrigé. La tribu borélienne est la tribu discrète de toutes les parties de $\mathbb{R}$. En revanche, les tribus engendrées par les boules ouvertes ou fermées sont la tribu $\{A \subset \mathbb{R} : A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable}\}$, qui est ainsi différente de la tribu borélienne.

Exercice 8. (✯) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$. On suppose que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction $f : E \to X$. Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$ est mesurable.

Corrigé. Il suffit de montrer que $f^{-1}(F)$ est mesurable pour tout fermé F (car les fermés engendrent la tribu borélienne). On rappelle que la distance à un fermé est une application 1-lipschitzienne (c'est-à-dire que $x \longrightarrow d(x,F)$ est 1-lipschitzienne) et que $x \in F$ ssi $d(x,F) = 0$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{x \in X : d(f(x),F) = 0\} = \left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} d(f_n(x),F) = 0\right\} \\ &= \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \left\{x \in X : d(f_n(x),F) \leq \frac{1}{p}\right\}, \end{aligned}$$

qui est mesurable comme unions et intersections dénombrables d'ensembles mesurables. En effet, $x \longrightarrow d(f_n(x),F)$ est mesurable, étant la composée de la fonction mesurable f_n par la fonction 1-lipschitzienne $y \longrightarrow d(y,F)$ (donc continue, donc mesurable).
ATTENTION : Il ne suffit pas de montrer que les images réciproques des boules (ouvertes ou fermées) sont mesurables. En effet, ce n'est que dans un espace métrique séparable qu'on peut affirmer que la tribu engendrée par les boules est la tribu borélienne, mais pas en toute généralité (cf l'exercice 7).

Fin