Examen 2017

Corrigé

Exercice 1. (*Questions de cours*)

1. Énoncez le lemme de Borel-Cantelli.
2. Énoncez la loi forte des grands nombres.
3. Énoncez le théorème central limite.

Corrigé. Voir votre cours.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes qui suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $Y_n := (X_n)^n$.

1. Calculer la loi de Y_n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en probabilité.
3. Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^1.
4. Montrez que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge p.s.

Corrigé.

1. Si $n = 0$, alors $Y_0 = 1$ p.s. donc la loi de Y_0 est δ_1.
   Supposons à présent $n \geq 1$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable. On a
   $$\mathbb{E}[f(Y_n)] = \int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(y)\frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}\,\mathrm{d}y$$
   avec le changement de variable $y = x^n$. Donc Y_n a la loi de densité $y \mapsto y^{(1-n)/n}/n$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$.
2. *Méthode 1.* Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $n \geq 1$, on a
   $$\mathbb{P}(|Y_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \geq \varepsilon^{1/n}) = 1 - \varepsilon^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
   donc $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en probabilité.
   Méthode 2. Le résultat découle de la question 3.
3. Soit $n \geq 1$, on a par la question 1.
   $$\mathbb{E}[|Y_n|] = \int_0^1 y\frac{y^{\frac{1}{n}-1}}{n}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n}\int_0^1 y^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
   donc $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^1 vers 0.

Le DM est à rendre pendant le cours, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

4. Soit $\varepsilon \in]0,1[$ et $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = 1 - \varepsilon^{1/n} = 1 - \exp\left(\frac{1}{n}\ln(\varepsilon)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{1}{n}\ln(\varepsilon).$$

Ainsi, on obtient

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(Y_n \geq \varepsilon) = \infty.$$

Comme les événements $\{Y_n \geq \varepsilon\}$ sont indépendants, par Borel-Cantelli,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{Y_n \geq \varepsilon\}\right) = \infty$$

et donc

$$\limsup_{n\to\infty} Y_n \geq \varepsilon \quad \text{p.s.}$$

D'autre part, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0, donc admet une sous-suite convergeant vers 0 p.s. et donc

$$\liminf_{n\to\infty} Y_n \leq 0 \quad \text{p.s.}$$

Ainsi $\limsup_{n\to\infty} Y_n > \liminf_{n\to\infty} Y_n$ p.s. et donc $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge p.s.

Exercice 3. (*Direction aléatoire en dimension 3*) Soit $V = (X,Y,Z)$ un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^3$ dont la loi a pour densité f par rapport à la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^3$, où f est définie par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) := \begin{cases} 3/(4\pi) & \text{si } x^2+y^2+z^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculez $\mathbb{E}[|XY|]$.
3. On note (R,Θ,Φ) les coordonnées sphériques de V. Rappelons que les coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) d'un vecteur $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ sont définies de la manière suivante : r est la norme de v, ϕ l'angle entre l'axe vertical et v, et enfin θ l'angle entre l'axe des abscisses et la projection de v sur le plan horizontal. Notons que $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in [0,\pi[$, $\theta \in [0,2\pi[$. On a alors

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\phi, \\ y = r\sin\theta\sin\phi, \\ z = r\cos\phi. \end{cases}$$

   Quelle est la loi du triplet (R,Θ,Φ) ?
4. Les variables R,Θ,Φ sont-elles indépendantes ?
5. Quelle est la loi de chaque variable R,Θ,Φ ?
6. Soit U le vecteur $(X/R, Y/R, Z/R)$. Le vecteur U est une direction aléatoire dans $\mathbb{R}^3$. Quelle est la loi de U ?

Corrigé.

1. Les variables X et Y ne sont pas indépendantes : d'une part, on a

$$\mathbb{P}(X > \sqrt{2}) = \mathbb{P}(Y > \sqrt{2}) = \lambda_3(\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 < 1 \text{ et } x > \sqrt{2}\}) > 0,$$

   car c'est la mesure de Lebesgue d'un ouvert non vide, et d'autre part on a

$$\mathbb{P}(X > \sqrt{2}, Y > \sqrt{2}) = 0 \neq \mathbb{P}(X > \sqrt{2})\mathbb{P}(Y > \sqrt{2}).$$

2. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|XY|] &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |xy|\frac{3}{4\pi}\mathbb{1}_{x^2+y^2+z^2\leq 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{6}{\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}}\int_0^{\sqrt{1-z^2-y^2}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{6}{\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{1-z^2-y^2}{2}y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{6}{\pi}\int_0^1\left[\frac{(1-z^2)y^2}{4}-\frac{y^4}{8}\right]_0^{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z\\ &= \frac{6}{\pi}\int_0^1\frac{(1-z^2)^2}{8}\mathrm{d}z = \frac{3}{4\pi}\left[z-\frac{2z^3}{3}+\frac{z^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{8}{15} = \frac{2}{5\pi}.\end{aligned}$$

3. Définissons la fonction

$$\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^*\times]0,2\pi[\times]0,\pi[& \to & \mathbb{R}^3\setminus(\mathbb{R}_+\times\{0\}\times\mathbb{R})\\ (r,\theta,\phi) & \mapsto & (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)\end{array}\right.$$

qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme avec pour Jacobien $|J_\varphi(r,\theta,\phi)| = r^2\sin\phi$ (on l'a déjà fait en TD). Soit $F\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_+$ mesurable. On a alors, en utilisant que $(R,\Theta,\Phi)\in\mathbb{R}_+^*\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ p.s. puis la formule de changement de variable,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[F(R,\Theta,\Phi)] = \mathbb{E}[F(\varphi^{-1}(X,Y,Z))] &= \int_{\mathbb{R}^3\setminus(\mathbb{R}_+\times\{0\}\times\mathbb{R})} F(\varphi^{-1}(x,y,z))\frac{3}{4\pi}\mathbb{1}_{x^2+y^2+z^2\leq 1}\,\mathrm{d}\lambda_3(x,y,z)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times]0,2\pi[\times]0,\pi[} F(r,\theta,\phi)\frac{3}{4\pi}\mathbb{1}_{r^2\leq 1}r^2\sin\phi\,\mathrm{d}\lambda_3(r,\theta,\phi).\end{aligned}$$

Donc le triplet (R,Θ,Φ) a une loi a densité par rapport à λ_3 sur $\mathbb{R}_+^*\times]0,2\pi[\times]0,\pi[$ et cette densité est

$$(r,\theta,\phi)\mapsto\frac{3}{4\pi}r^2\mathbb{1}_{r\leq 1}\sin\phi.$$

On peut aussi dire que (R,Θ,Φ) a une loi a densité par rapport à λ_3 sur $\mathbb{R}^3$ et que cette densité est

$$(r,\theta,\phi)\mapsto\frac{3}{4\pi}r^2\mathbb{1}_{0\leq r\leq 1}\mathbb{1}_{0\leq\theta\leq 2\pi}\sin\phi\,\mathbb{1}_{0\leq\phi\leq\pi}.$$

4. Les variables R,Θ,Φ sont indépendantes car la densité du triplet se factorise en trois parties, chacune ne dépendant que d'une des variables.

5. Il suffit de répartir la constante multiplicative dans les trois facteurs pour que chacun ait intégrale 1. On trouve que R a pour densité $r\mapsto 3r^2\mathbb{1}_{r\leq 1}$, Θ est uniforme sur $[0,2\pi]$ et Φ a pour densité $\phi\mapsto\frac{1}{2}\sin\phi$ sur $[0,\pi]$.

6. Notons $\mathbb{S}$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^3$. Alors U est la projection de (X,Y,Z) sur $\mathbb{S}$. Comme (X,Y,Z) est uniforme dans la sphère, U a pour loi la mesure uniforme sur $\mathbb{S}$ (aussi appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{S}$, elle a été définie dans l'exercice 7 du TD 5). Cette mesure est aussi l'unique mesure de proba sur $\mathbb{S}$ invariante par rotation centrée en 0.

   Si on veut la décrire explicitement, il faut paramétriser la sphère unité. On peut le faire avec $(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)$ pour $\theta\in[0,2\pi[$ et $\phi\in[0,\pi]$. Alors U est rerésenté par le couple de paramètres (Θ,Φ) dont on a donné la loi plus tôt.

Exercice 4. (*Récurrence et transience de la marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$*) Soit p un nombre réel dans $]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes qui suivent toutes la même loi :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \mathbb{P}(X_n=-1)=1-p,\quad \mathbb{P}(X_n=1)=p.$$

On pose

$$S_0 := 0,\quad \forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0\},\quad S_n := X_1+\cdots+X_n.$$

Le but du problème est d'étudier le caractère transient ou récurrent de cette marche aléatoire sur les entiers, c'est-à-dire de savoir si, avec probabilité 1, elle visite tout entier fixé une infinité de fois ou non. On pose

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x,n) := \mathbb{P}(\exists k \in \{0,\dots,n\} : S_k = x).$$

1. Dans cette question, on étudie certaines propriétés de $f(x,n)$.
   (a) Que vaut $f(0,n)$ pour $n \in \mathbb{N}$? Et $f(x,0)$ pour $x \in \mathbb{Z}$?
   (b) Montrez que
   $$\forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad f(x,n) = (1-p)f(x+1,n-1) + pf(x-1,n-1).$$
   (c) Pour $x \in \mathbb{Z}$, montrez que la limite $f(x) := \lim_{n\to\infty} f(x,n)$ existe et interprétez la valeur de $f(x)$.
   (d) Montrez que $f(x)$ vérifie une équation fonctionnelle.
2. Dans cette question, on étudie la lim sup et le max de S_n.
   (a) Quelle est la loi de S_n pour n fixé ? Que valent $\mathbb{E}[S_n]$ et $\mathrm{Var}(S_n)$?
   (b) Montrez que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty)$ vaut 0 ou 1.
   (c) Montrez que, si $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) < 1$, alors il existe $k > 0$ tel que $f(k) < 1$.
   (d) Calculez la loi de $\max_{0\le k\le n} S_k$.
   (e) Montrez que
   $$\mathbb{E}\left[\max_{0\le k\le n} S_k\right] = \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} f(x,n).$$
   (f) En déduire que
   $$\mathbb{E}\left[\sup_{n\ge 0} S_n\right] = \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} f(x).$$
3. Dans cette question, on considère le cas $p > 1/2$.
   (a) Montrez que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.
   (b) En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$.
4. Dans cette question, on considère le cas $p = 1/2$.
   (a) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = f(-x)$.
   (b) À l'aide de 1.(d), donnez la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$.
   (c) Montrez que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$.
   (d) En déduire que, presque sûrement, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ visite tous les entiers une infinité de fois.
5. Dans cette question, on considère le cas $p < 1/2$.
   (a) Montrez que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 0$.
   (b) À l'aide de 1.(d), donnez l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrez que $\sup_{n\ge 0} S_n$ est dans L^1 et calculez son espérance.

Corrigé.

1.(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $f(0,n) = 1$ car $S_0 = 0$ p.s. Pour $x \in \mathbb{Z}$, $f(0,x) = \mathbb{1}_{x=0}$.
   (b) *Méthode 1.* Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Comme $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
f(x,n) &= \mathbb{P}(\exists k \in [\![1,n]\!] : S_k = x) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 1, \exists k \in [\![1,n]\!] : S_k = x) + \mathbb{P}(X_1 = -1, \exists k \in [\![1,n]\!] : S_k = x) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 = 1, \exists k \in [\![1,n]\!] : \sum_{i=2}^{k} X_i = x-1\right) + \mathbb{P}\left(X_1 = -1, \exists k \in [\![1,n]\!] : \sum_{i=2}^{k} X_i = x+1\right),
\end{aligned}$$

où $\sum_{i=2}^{1} X_i = 0$. Par indépendance entre X_1 et $(X_2, \dots, X_n)$, on obtient

$$f(x,n) = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}\left(\exists k \in [\![1,n]\!] : \sum_{i=2}^{k} X_i = x-1\right) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}\left(\exists k \in [\![1,n]\!] : \sum_{i=2}^{k} X_i = x+1\right).$$

Comme $(X_2, \dots, X_n)$ a la même loi que $(X_1, \dots, X_{n-1})$, on en déduit que $(X_2, \dots, X_2 + \cdots + X_n)$ a la même loi que $(S_1, \dots, S_{n-1})$. Ainsi on a

$$\begin{aligned} f(x,n) &= \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(\exists k \in [\![0,n-1]\!] : S_k = x-1) + \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(\exists k \in [\![0,n-1]\!] : S_k = x+1) \\ &= (1-p)f(x+1,n-1) + pf(x-1,n-1). \end{aligned}$$

Méthode 2. Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note $\tau_x^n := \max\{k \in [\![0,n]\!] : S_k = x\}$ le dernier instant avant n où la marche touche x, qui vaut $+\infty$ si l' ensemble est vide. Comme $x \neq 0$, on a $\tau_x^n \geq 1$. En outre, on a $\{\exists k \in \{0, \dots, n\} : S_k = x\} = \{\tau_x^n \leq n\}$, donc

$$\begin{aligned} f(x,n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tau_x^n = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{k-1} = x-1, \tau_x^n = k) + \mathbb{P}(S_{k-1} = x+1, \tau_x^n = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_{k-1} = x-1, S_k = x, S_{k+1} \neq x, \dots, S_n \neq x) + \mathbb{P}(S_{k-1} = x+1, S_k = x, S_{k+1} \neq x, \dots, S_n \neq x). \end{aligned}$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(S_{k-1} = x-1, S_k = x, S_{k+1} \neq x, \dots, S_n \neq x) \\ &= \mathbb{P}\left(S_{k-1} = x-1, X_k = 1, \sum_{j=k+1}^{k+1} X_j \neq 0, \dots, \sum_{j=k+1}^{n} X_j \neq 0\right) \\ &= \mathbb{P}(S_{k-1} = x-1)\mathbb{P}(X_k = 1)\mathbb{P}\left(\sum_{j=k+1}^{k+1} X_j \neq 0, \dots, \sum_{j=k+1}^{n} X_j \neq 0\right), \end{aligned}$$

car $(X_1, \dots, X_{k-1})$, X_k et $(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendants. Cela nous donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{k-1} = x-1, S_k = x, S_{k+1} \neq x, \dots, S_n \neq x) &= \mathbb{P}(S_{k-1} = x-1)p\mathbb{P}\left(\sum_{j=k}^{k} X_j \neq 0, \dots, \sum_{j=k}^{n-1} X_j \neq 0\right) \\ &= p\mathbb{P}(S_{k-1} = x-1, S_k \neq x-1, \dots, S_{n-1} \neq x-1) \\ &= p\mathbb{P}(\tau_{x-1}^{n-1} = k-1), \end{aligned}$$

en utilisant l'indépendance dans l'autre sens. De même, on a

$$\mathbb{P}(S_{k-1} = x+1, S_k = x, S_{k+1} \neq x, \dots, S_n \neq x) = (1-p)\mathbb{P}(\tau_{x+1}^{n-1} = k-1),$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} f(x,n) &= (1-p)\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tau_{x+1}^{n-1} = k-1) + p\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tau_{x-1}^{n-1} = k-1) \\ &= (1-p)\mathbb{P}(\tau_{x+1}^{n-1} \leq n-1) + p\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\tau_{x-1}^{n-1} \leq n-1) \\ &= (1-p)f(x+1,n-1) + pf(x-1,n-1). \end{aligned}$$

(c) Soit $x \in \mathbb{Z}$ fixé, alors $f(x,n)$ est croissant en n donc $f(x) := \lim_{n\to\infty} f(x,n)$ existe. On a

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \{S_k = x\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{S_k = x\}\right) = \mathbb{P}(\exists k \in \mathbb{N} : S_k = x),$$

par limite croissante de la mesure.

(d) Soit $x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, en faisant tendre $n \to \infty$ dans la question 1.(b), on obtient

$$f(x) = (1-p)f(x+1) + pf(x-1).$$

2. Dans cette question, on étudie la $\limsup$ et le max de S_n.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$. Si $|x| > n$ ou si x n'a pas la même parité que n, alors $\mathbb{P}(S_n = x) = 0$. Sinon, on a $x = \frac{n+x}{2} - \frac{n-x}{2}$ (lenombre de saut $+1$, mois le nombre de saut -1) donc

$$\mathbb{P}(S_n = x) = \binom{n}{(n+x)/2} p^{(n+x)/2}(1-p)^{(n-x)/2}.$$

D'autre part, on a

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = n(2p-1).$$

et, en utilisant l'indépendance entre les X_k,

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k) = n(1-(2p-1)^2) = 4np(1-p).$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On a

$$\begin{aligned}\left\{\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right\} &= \{\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > k : S_n \geq N\} = \{\forall N \in \mathbb{N}, \exists n > k : S_n \geq N + S_k\} \\ &= \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>k} \left\{\sum_{i=k+1}^{n} X_i \geq N + S_k\right\} \in \sigma(X_i, i > k).\end{aligned}$$

Ainsi, $\{\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\}$ appartient à la tribu queue des X_i, qui sont indépendantes, donc $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty)$ vaut 0 ou 1 par la loi du 0-1.

(c) Supposons que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) < 1$ (donc $= 0$ par la question précédente, mais on n'en a pas besoin ici). On a

$$1 > \mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = +\infty\right) = \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq x\right).$$

Donc, il existe $x \geq 1$, tel que $\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq x) < 1$. Or $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq x\} = \{\exists k \in \mathbb{N} : S_k = x\}$, donc $f(x) = \mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq x) < 1$.

(d) On a, pour $x \geq 0$, $\{\max_{0\leq k\leq n} S_k \geq x\} = \{\exists k \in [\![0,n]\!] : S_k = 0\}$ et donc

$$\mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} S_k = x\right) = \mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} S_k \geq x\right) - \mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} S_k \geq x+1\right) = f(x,n) - f(x+1,n).$$

Pour $x < 0$, cette probabilité est clairement nulle.

Remarque. Je pense que c'était la réponse attendue à cette question. On peut aussi calculer explicitement cette loi, mais cela revient à calculer $f(x,n)$, ce qui n'est pas vraiment dans l'esprit de l'exercice.

(e) En utilisant ce qui précède,

$$\mathbb{E}\left[\max_{0\leq k\leq n} S_k\right] = \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \mathbb{P}\left(\max_{0\leq k\leq n} S_k \geq x\right) = \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} f(x,n).$$

(f) En appliquant le théorème de convergence monotone de chaque côté de l'égalité de la question précédente (on a bien positivité et croissance), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0} S_n\right] = \sum_{x\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} f(x).$$

3. Dans cette question, on considère le cas $p > 1/2$.

   (a) Par la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1] = 2p-1 > 0, \quad \text{p.s.}$$

   En particulier, cela donne $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.

   (b) Par la question 2.(c), on en déduit que $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.

4. Dans cette question, on considère le cas $p = 1/2$.

   (a) Dans le cas $p = 1/2$, $(-S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même loi que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = f(-x)$.

   (b) Par 1.(d), pour tout $x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, on a $f(x) = \frac{1}{2}f(x+1) + \frac{1}{2}f(x-1)$. Par 1.(a), on a $f(0) = 1$. On montre facilement par récurrence que, pour tout $x \geq 2$, $f(x) = xf(1) - (x-1)f(0)$. Si $f(1) < 1$, alors $f(x) \to -\infty$ quand $x \to \infty$ ce qui est absurde (f est positive), donc $f(1) = 1$. Et donc, pour tout $x \geq 2$, $f(x) = 1$. Enfin par 4.(a), pour tout $x \leq -1$, on a $f(x) = f(-x) = 1$.

   (c) Par 2.(c) et le fait que $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$. Par symétrie, on a aussi $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} S_n = -\infty) = 1$.

   (d) C'est un résultat déterministe : soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers telle que $|s_{n+1} - s_n| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty$ et $\liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty$, montrons que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ visite tous les entiers une infinité de fois. Cela donnera le résultat demandé.

   Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne visite qu'un nombre fini de fois. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $s_n \neq x$. Il y a deux possibilité : soit, pour tout $n \geq n_0$, $s_n > x$, soit, pour tout $n \geq n_0$, $s_n < x$. Dans le 1^{er} cas, $\liminf_{n\to\infty} s_n \geq x$ et, dans le 2^e cas, $\limsup_{n\to\infty} s_n \leq x$. C'est absurde dans les deux cas.

5. Dans cette question, on considère le cas $p < 1/2$.

   (a) Par la loi forte des grands nombres, on a

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1] = 2p-1 < 0, \quad \text{p.s.}$$

   En particulier, cela donne $S_n \to -\infty$ p.s. et donc $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 0$.

   (b) Par 1.(d), pour tout $x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, on a $f(x) = (1-p)f(x+1) + pf(x-1)$. Par 1.(a), on a $f(0) = 1$. Pour tout $x \geq 0$, on a

$$f(x+2) = \frac{1}{1-p}f(x+1) - \frac{p}{1-p}f(x),$$

   c'est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique $X^2 - \frac{1}{1-p}X + \frac{p}{1-p}$. Son discriminant est $\Delta = (1-2p)^2/(1-p)^2$ et ses racines sont

$$q = 1 \quad \text{et} \quad r = \frac{p}{1-p},$$

   donc on en déduit que $f(x) = \lambda + \mu r^x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Notons que $r \in]0,1[$ donc $f(x) \to \lambda$ quand $x \to \infty$. Mais on a $\mathbb{P}(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty) = \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 0$ par 5.(a), donc, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n \geq x\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} \mathbb{P}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} S_n = \infty\right) = 0.$$

   On en déduit que $\lambda = 0$. Alors $\mu = f(0) = 1$ et donc finalement, on a

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \left(\frac{p}{1-p}\right)^x.$$

(c) On rappelle que $\sup_{n\geq 0} S_n$ est positif, d'espérance

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0} S_n\right] = \sum_{x\geq 1} f(x).$$

Comme les $f(x)$ pour $x \geq 1$ sont sommables par 5.(b), $\sup_{n\geq 0} S_n$ est L^1. Son espérance est

$$\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0} S_n\right] = \sum_{x\geq 1} \left(\frac{p}{1-p}\right)^x = \frac{p}{1-2p}.$$

Elle explose quand $p \to 1/2$, ce qui semble raisonnable.