Devoir à la maison 6

à rendre dès que possible avant le 17 janvier

Exercice 1. (*Questions de cours*)

1. Donnez la définition de la loi d'une variable aléatoire.
2. Énoncez la loi du 0-1 de Kolmogorov.
3. Énoncez le théorème de Paul Lévy.

Exercice 2.

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une constante déterministe a.
   (a) Montrez que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers a.
   (b) Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels. Montrez que la suite $(X_n + b_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une constante déterministe si et seulement si la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite finie.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi de densité

$$f(x) = C\frac{|x|}{(1+x^2)^3},$$

   où C est une constante. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.
   (a) Déterminez C.
   (b) Montrez que, si $\alpha > 1/2$, alors S_n/n^α converge en probabilité vers 0.
   (c) Que peut-on dire dans le cas $0 < \alpha < 1/2$?

Exercice 3. Rappelons la formule de Stirling : $n! \sim (n/e)^n\sqrt{2\pi n}$ quand $n \to \infty$. Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p.$$

Pour $n \geq 1$, posons $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et définissons

$$U := \liminf_{n\to\infty} S_n \quad \text{et} \quad V := \limsup_{n\to\infty} S_n.$$

1. Quelle est la loi de S_n ? Donnez son espérance et sa variance.
2. (a) Donnez un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ lorsque n tend vers l'infini.
   (b) Dans le cas non symétrique où $p \neq 1/2$, en déduire que, presque sûrement, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ ne visite 0 qu'un nombre fini de fois.
3. Montrez que V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
4. (a) L'événement $\{V \leq 100\}$ est-il un événement asymptotique pour la suite $(X_n)_{n\geq 1}$?
   (b) Montrez que $\mathbb{P}(V = +\infty)$ vaut 0 ou 1.

Le DM est à rendre pendant le TD, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

5.(a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = k)$? Montrez que, pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \leq a) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(b) En déduire que $\mathbb{P}(\exists a > 0 : \forall n \geq 1, |S_n| \leq a) = 0$.

6. Montrez alors que, pour tout $b > 0$, $\mathbb{P}(-b \leq U \leq V \leq b) = 0$.
7. Conclure finalement que exactement l'une des 3 probabilités suivantes vaut 1 :

$$\mathbb{P}(U = V = +\infty), \quad \mathbb{P}(U = V = -\infty), \quad \mathbb{P}(U = -\infty, V = +\infty),$$

et préciser laquelle selon la valeur de p.

8. Dans le cas symétrique $p = 1/2$, montrez que, avec probabilité 1, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ visite 0 un nombre infini de fois.

Exercice 4. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites indépendantes de v.a. réelles indépendantes de loi normale centrée réduite. Posons

$$\forall n \geq 1, \quad Z_n := \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}.$$

1. Quelle est la loi de Z_n pour $n \geq 1$?
2. Montrez que $(Z_1 + \cdots + Z_n)/n$ converge en probabilité, et presque sûrement.
3. Montrez que $\liminf_{n\to\infty} \sqrt{n} Z_n = 0$ presque sûrement.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}[X_1] > 0$ et $\mathbb{E}[\exp(\lambda |X_1|)] < \infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, posons $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur finie. Nous nous intéressons au nombre $N(I)$ de visites de la marche $(S_n)_{n\geq 1}$ dans I, défini par

$$N(I) := \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : S_n \in I\}.$$

1. À l'aide de la loi des grands nombres, montrez que $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.
2. Montrez que $N(I)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, puis que $N(I)$ est finie presque sûrement.
3. (*Voir cours du 14/01/19*) Dans le cas où la loi de X_1 est la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, rappelez (sans calculs) la loi de $N(]0,t])$, pour $t > 0$, ainsi que son espérance et sa variance.
4. Montrez que

$$\mathbb{E}[N(I)] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n \in I).$$

Nous supposons désormais que X_1 est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et que $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) > 0$. Notons f la fonction caractéristique de X_1.

5. Montrez que $|f(u)| < 1$ pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
6. Calculez la fonction caractéristique de S_n et sa limite lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on en conclure ?
7. Montrez que

$$\mathbb{P}(S_n \in I) = \sum_{k \in I\cap\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iuk} (f(u))^n \, du.$$

8. À l'aide des résultats précédents, montrez que

$$\mathbb{E}[N(I)] = \lim_{\substack{r\to 1 \\ r<1}} \sum_{k \in I\cap\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-iuk}}{1 - r f(u)} \, du.$$

Nous considérons pour finir le cas où X_1 est à valeurs dans $\{-1, +1\}$.

9. Donnez une formule pour le nombre moyen de passages en 0 de la marche aléatoire.