

Devoir à la maison 6
à rendre dès que possible avant le 17 janvier



Exercice 1. (Questions de cours)

1. Donnez la définition de la loi d'une variable aléatoire.
2. Énoncez la loi du 0-1 de Kolmogorov.
3. Énoncez le théorème de Paul Lévy.

Corrigé. Voir votre cours.

Exercice 2.

1. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles qui converge en loi vers une constante déterministe a .
 - (a) Montrez que $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers a .
 - (b) Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels. Montrez que la suite $(X_n + b_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une constante déterministe si et seulement si la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite finie.
2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi de densité

$$f(x) = C \frac{|x|}{(1+x^2)^3},$$

où C est une constante. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$.

- (a) Déterminez C .
- (b) Montrez que, si $\alpha > 1/2$, alors S_n/n^α converge en probabilité vers 0.
- (c) Que peut-on dire dans le cas $0 < \alpha < 1/2$?

Corrigé.

- 1.(a) C'est dans votre cours.
- (b) Pour le sens direct, supposons $X_n + b_n \rightarrow a + b$ en loi avec $b \in \mathbb{R}$. On a aussi convergence en probabilité. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $|b_n - b| > \varepsilon$, on a

$$\mathbb{P}\left(|X_n + b_n - a - b| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \mathbb{P}\left(|X_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Mais pour n grand la partie de gauche est proche de 0 et celle de droite est proche de 1, donc l'inégalité est faussée à partir d'un certain rang. Donc $|b_n - b| \leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang. On a montré que $b_n \rightarrow b$.

Pour la réciproque, on peut passer par les fonctions caractéristiques par exemple.

- 2.(a) On calcule

$$C^{-1} = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 2 \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^3} dx = 2 \left[\frac{-1}{4(1+x^2)^2} \right]_0^\infty = \frac{1}{2}$$

donc $C = 2$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$, on a (en utilisant l'inégalité de Markov),

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n^\alpha}\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(S_n^2 \geq \varepsilon^2 n^{2\alpha}\right) \leq \frac{\mathbb{E}[S_n^2]}{\varepsilon^2 n^{2\alpha}}.$$

Comme les X_i sont i.i.d. centrées, on a $\mathbb{E}[S_n^2] = n\mathbb{E}[X_1^2]$ et comme $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ ça permet de conclure.

(c) Par le théorème central limite, on sait que $S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, avec $\sigma^2 := \mathbb{E}[X_1^2]$. Avec ça on peut en déduire que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(S_n/n^\alpha \in [-a, a]) \rightarrow 0$ et cela montre que S_n/n^α ne converge pas en loi (donc pas en probabilité ni presque sûrement ou L^1).



Exercice 3. Rappelons la formule de Stirling : $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$ quand $n \rightarrow \infty$. Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 1) = p.$$

Pour $n \geq 1$, posons $S_n := X_1 + \dots + X_n$ et définissons

$$U := \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n \quad \text{et} \quad V := \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

1. Quelle est la loi de S_n ? Donnez son espérance et sa variance.
- 2.(a) Donnez un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$ lorsque n tend vers l'infini.
- (b) Dans le cas non symétrique où $p \neq 1/2$, en déduire que, presque sûrement, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ ne visite 0 qu'un nombre fini de fois.
3. Montrez que V est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- 4.(a) L'événement $\{V \leq 100\}$ est-il un événement asymptotique pour la suite $(X_n)_{n \geq 1}$?
- (b) Montrez que $\mathbb{P}(V = +\infty)$ vaut 0 ou 1.
- 5.(a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = k)$? Montrez que, pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \leq a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(b) En déduire que $\mathbb{P}(\exists a > 0 : \forall n \geq 1, |S_n| \leq a) = 0$.

6. Montrez alors que, pour tout $b > 0$, $\mathbb{P}(-b \leq U \leq V \leq b) = 0$.
7. Conclure finalement que exactement l'une des 3 probabilités suivantes vaut 1 :

$$\mathbb{P}(U = V = +\infty), \quad \mathbb{P}(U = V = -\infty), \quad \mathbb{P}(U = -\infty, V = +\infty),$$

et préciser laquelle selon la valeur de p .

8. Dans le cas symétrique $p = 1/2$, montrez que, avec probabilité 1, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ visite 0 un nombre infini de fois.

Corrigé.

1. La loi de S_n est donnée par

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \begin{cases} \binom{n}{(n+k)/2} p^{(n+k)/2} (1-p)^{(n-k)/2} & \text{si } \frac{n+k}{2} \in \llbracket 0, n \rrbracket, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $\mathbb{E}[S_n] = n\mathbb{E}[X_1] = n(2p - 1)$ et, par indépendance, $\text{Var}(S_n) = n\text{Var}(X_1) = 4np(1 - p)$.

- 2.(a) Avec la formule de Stirling, on obtient

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (4p(1-p))^n.$$

- (b) Si $p \neq 1/2$, on a $4p(1-p) < 1$ donc $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) < \infty$ donc, par Borel-Cantelli, presque sûrement, la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ ne visite 0 qu'un nombre fini de fois.
3. C'est un résultat du tout début du cours : une limsup de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ reste mesurable.
- 4.(a) Non.
- (b) On vérifie que $\{V = +\infty\}$ est un événement asymptotique, puis on applique la loi du 0-1.
- 5.(a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(S_n = k) = 0$ à partir de l'expression explicite. Puis, pour tout $a \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \leq a) = \sum_{k=-a}^a \mathbb{P}(S_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

- (b) On a, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\forall n \geq 1, |S_n| \leq a) \leq \mathbb{P}(|S_m| \leq a)$. En faisant tendre $m \rightarrow \infty$, on en déduit $\mathbb{P}(\forall n \geq 1, |S_n| \leq a) = 0$. Puis

$$\mathbb{P}(\exists a > 0 : \forall n \geq 1, |S_n| \leq a) = 0,$$

en tant que réunion dénombrable d'événements de probabilité nulle.

6. Soit $b > 0$. Si $-b \leq U \leq V \leq b$, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée donc il existe $a > 0$ tel que $\forall n \geq 1, |S_n| \leq a$, ce qui est de probabilité nulle.
7. Par la question 6., on sait que U et V sont à valeurs dans $\{-\infty, +\infty\}$ p.s. et par la question 4.(b) (qui est vraie pour U aussi), on sait que chacun est soit p.s. constant égal à $+\infty$, soit p.s. constant égal à $-\infty$. Cela montre que l'une des trois probabilités de l'énoncé vaut 1.
- Si $p > 1/2$, par la loi forte des grands nombres, $S_n/n \rightarrow 2p - 1 > 0$ p.s. et donc $S_n \rightarrow \infty$ p.s. ce qui est équivalent à

$$\mathbb{P}(U = V = +\infty) = 1.$$

Par symétrie, si $p < 1/2$, on a

$$\mathbb{P}(U = V = -\infty) = 1.$$

Finalement, supposons $p = 1/2$. Si on avait $\mathbb{P}(U = V = +\infty) = 1$ alors par symétrie on aurait aussi $\mathbb{P}(U = V = -\infty) = 1$ ce qui est absurde. Donc

$$\mathbb{P}(U = -\infty, V = +\infty) = 1.$$

8. Sur l'événement $\{U = -\infty, V = +\infty\}$, on peut construire une extractrice φ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{\varphi(2n)} > 0$ et $S_{\varphi(2n+1)} < 0$. Alors entre $\varphi(2n)$ et $\varphi(2n+1)$, il y a un passage en zéro de la marche. Il y en a donc une infinité sur cet événement, qui est de probabilité 1.



Exercice 4. Soient $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites indépendantes de v.a. réelles indépendantes de loi normale centrée réduite. Posons

$$\forall n \geq 1, \quad Z_n := \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}.$$

1. Quelle est la loi de Z_n pour $n \geq 1$?
2. Montrez que $(Z_1 + \dots + Z_n)/n$ converge en probabilité, et presque sûrement.
3. Montrez que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}Z_n = 0$ presque sûrement.

Corrigé.

1. On trouve par changement de variable polaire que Z_n a la loi de densité $z \in \mathbb{R} \mapsto ze^{-z^2/2} \mathbb{1}_{z>0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
2. Comme $\mathbb{E}[|Z_1|] < \infty$, on peut invoquer la loi forte des grands nombres qui donne que $(Z_1 + \dots + Z_n)/n \rightarrow \mathbb{E}[Z_1]$ p.s. donc en probabilité.

3. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}Z_n \leq \varepsilon) = \int_0^{\varepsilon/\sqrt{n}} ze^{-z^2/2} dz.$$

Pour n grand, on a $\varepsilon/\sqrt{n} \leq 1$ donc $e^{-z^2/2} \geq e^{-1/2}$, ce qui nous donne

$$\mathbb{P}(\sqrt{n}Z_n \leq \varepsilon) \geq e^{-1/2} \int_0^{\varepsilon/\sqrt{n}} z dz = e^{-1/2} \frac{\varepsilon^2}{2n}.$$

Donc $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\sqrt{n}Z_n \leq \varepsilon) = \infty$, or les événements sont indépendants, donc par Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{n}Z_n \leq \varepsilon\}\right) = 1.$$

On en déduit le résultat par les méthodes habituelles.



Exercice 5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}[X_1] > 0$ et $\mathbb{E}[\exp(\lambda|X_1|)] < \infty$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, posons $S_n := X_1 + \dots + X_n$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur finie. Nous nous intéressons au nombre $N(I)$ de visites de la marche $(S_n)_{n \geq 1}$ dans I , défini par

$$N(I) := \text{card}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : S_n \in I\}.$$

1. À l'aide de la loi des grands nombres, montrez que $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty) = 1$.
2. Montrez que $N(I)$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, puis que $N(I)$ est finie presque sûrement.
3. (Voir cours du 14/01/19) Dans le cas où la loi de X_1 est la loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, rappelez (sans calculs) la loi de $N([0, t])$, pour $t > 0$, ainsi que son espérance et sa variance.
4. Montrez que

$$\mathbb{E}[N(I)] = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n \in I).$$

Nous supposons désormais que X_1 est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et que $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) > 0$. Notons f la fonction caractéristique de X_1 .

5. Montrez que $|f(u)| < 1$ pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
6. Calculez la fonction caractéristique de S_n et sa limite lorsque n tend vers l'infini. Que peut-on en conclure ?
7. Montrez que

$$\mathbb{P}(S_n \in I) = \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iuk} (f(u))^n du.$$

8. À l'aide des résultats précédents, montrez que

$$\mathbb{E}[N(I)] = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-iuk}}{1 - rf(u)} du.$$

Nous considérons pour finir le cas où X_1 est à valeurs dans $\{-1, +1\}$.

9. Donnez une formule pour le nombre moyen de passages en 0 de la marche aléatoire.

Corrigé.

1. Par la loi forte des grands nombres, on a $S_n/n \rightarrow \mathbb{E}[X_1] > 0$ p.s donc $\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty) = 1$.

2. On a

$$N(I) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{S_n \in I} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{S_n \in I},$$

où la limite est croissante et à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Les sommes finies sont clairement mesurables donc la limite l'est aussi.

Ensuite, notons que $\{N(I) = \infty\} \subset \{S_n \rightarrow \infty\}$ qui est un événement de probabilité nulle donc $N(I)$ est finie presque sûrement.

3. Pour $t > 0$, $N([0, t])$ suit la loi de Poisson de paramètre t qui a espérance t et variance t .

4. On utilise de nouveau que

$$N(I) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{S_n \in I}$$

puis on passe à l'espérance et on échange série et espérance par Fubini-Tonelli.

5. On a

$$f(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{iku} \mathbb{P}(X_1 = k).$$

L'inégalité triangulaire donne $|f(u)| \leq 1$ et il y a égalité si et seulement si les $e^{iku} \mathbb{P}(X_1 = k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont sur la même demi-droite de $\mathbb{C}$ issue de 0.

Comme $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) > 0$, ce n'est le cas que si $u \in 2\pi\mathbb{Z}$. Réciproquement, si $u \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $f(u) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(X_1 = k) = 1$.

6. La fonction caractéristique de S_n est $\phi_{S_n}(u) = f(u)^n$ par indépendance. Par la question précédente, $\phi_{S_n}(u) \rightarrow \mathbb{1}_{u \in 2\pi\mathbb{Z}}$. Cette fonction limite n'est pas continue, ce n'est donc pas une fonction caractéristique donc S_n ne converge pas en loi.

7. On a

$$\mathbb{P}(S_n \in I) = \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_n = k),$$

donc il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iuk} \phi_{S_n}(u) du,$$

en rappelant que $\phi_{S_n}(u) = f(u)^n$.

Comme $S_n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iuk} \phi_{S_n}(u) du &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iuk} \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{iju} \mathbb{P}(S_n = j) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_n = j) \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)u} du, \end{aligned}$$

en appliquant Fubini-Lebesgue (en effet en mettant des valeurs absolues à l'intérieur, on obtient 2π après sommation et intégration). Or $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)u} du = \mathbb{1}_{j=k}$ donc on obtient le résultat.

8. Par la question 4., on a

$$\mathbb{E}[N(I)] = \sum_{n \geq 1} \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_n = k) = \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n = k),$$

où l'on échange les sommes car les termes sont positifs.

$$\mathbb{E}[N(I)] = \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \sum_{n \geq 1} \lim_{r \rightarrow 1} r^n \mathbb{P}(S_n = k) = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \sum_{n \geq 1} r^n \mathbb{P}(S_n = k),$$

par convergence monotone. Puis, par la question 7.,

$$\mathbb{E}[N(I)] = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \sum_{n \geq 1} r^n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-iuk} f(u)^n du = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \geq 1} r^n e^{-iuk} f(u)^n du,$$

en utilisant Fubini-Lebesgue car

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \geq 1} |r^n e^{-iuk} f(u)^n| du \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \geq 1} r^n du = \frac{2\pi r}{1-r}.$$

On obtient finalement

$$\mathbb{E}[N(I)] = \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} r f(u) \frac{e^{-iuk}}{1 - r f(u)} du,$$

ce qui n'est pas la formule demandée par l'énoncé.

L'énoncé semble faux. Il devient correct si depuis le début on considérait

$$\tilde{N}(I) := \text{card}\{n \in \mathbb{N} : S_n \in I\}.$$

Alors la même démo fonctionne mais cette fois la somme sur n commence en 0. Comme $\tilde{N}(I) = N(I) + \mathbb{1}_{0 \in I}$, on en déduit que

$$\mathbb{E}[N(I)] = -\mathbb{1}_{0 \in I} + \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \sum_{k \in I \cap \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-iuk}}{1 - r f(u)} du,$$

La formule de l'énoncé est donc correcte si $0 \notin I$.

9. D'après ce qui précède (l'hypothèse $\mathbb{P}(X_1 = 0) > 0$ n'a été utilisée que pour les questions 5. et 6.),

$$\mathbb{E}[N(\{0\})] = -1 + \lim_{\substack{r \rightarrow 1 \\ r < 1}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1 - r f(u)} du.$$

Notons $p = \mathbb{P}(X_1 = 1)$. On doit donc calculer

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1 - r f(u)} du = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1 - r(pe^{iu} + (1-p)e^{-iu})} du.$$

Ce calcul peu plaisant est laissé au lecteur ou à la lectrice.

