Devoir à la maison 5

à rendre le lundi 7 janvier

Exercice 1. (*Une démonstration astucieuse de la loi forte des grands nombres*) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $a > \mathbb{E}[X_1]$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$,
$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}}(S_n - na) \quad \text{et} \quad M_k := \sup_{0\leq n\leq k}(S_n - na)$$
$$M' := \sup_{n\in\mathbb{N}}(S_{n+1} - S_1 - na) \quad \text{et} \quad M'_k := \sup_{0\leq n\leq k}(S_{n+1} - S_1 - na)$$
Montrer que M_k et M'_k ont même loi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que M et M' ont même loi.
2. Établir une relation entre M_{k+1}, M'_k et X_1.
3. Montrer que $\mathbb{E}[\min(a - X_1, M')] \leq 0$.
4. En utilisant la loi du 0-1, en déduire que $M < \infty$ presque sûrement.
5. Montrer que, presque sûrement,
$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1].$$

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1 (de densité $e^{-x}\mathbb{1}_{x>0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue).

1. Déterminer les limites inférieure et supérieure de $X_n/\ln(n)$ quand $n \to \infty$.
2. On pose $Z_n := \max(X_1, \ldots, X_n)/\ln(n)$ pour $n \geq 2$. Montrer que Z_n converge presque sûrement quand $n \to \infty$ vers une limite à déterminer.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi de Cauchy standard $(\pi(1+x^2))^{-1}\,dx$. On pose $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que la suite $(n/M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.
Rappel. On a le développement asymptotique $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to \infty$.

Exercice 4. (*Fonction caractéristique et moments*) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note ϕ_X sa fonction caractéristique définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par $\phi_X(\xi) := \mathbb{E}[e^{i\xi X}]$.

1. (*Développement de fonction caractéristique*)
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que X admet un moment d'ordre $n-1$, c'est-à-dire que $\mathbb{E}[|X|^{n-1}] < \infty$. Montrer que, pour tous $t_0, t \in \mathbb{R}$,
$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i(t-t_0))^k}{k!}\mathbb{E}\left[X^k e^{it_0X}\right] + \frac{(i(t-t_0))^n}{(n-1)!}\mathbb{E}\left[X^n e^{it_0X}\int_0^1 (1-u)^{n-1} e^{iu(t-t_0)X}\,du\right].$$

Le DM est à rendre pendant le cours, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

(b) On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tous $t_0, t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(i(t-t_0))^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k e^{it_0 X}\right] + \frac{(i(t-t_0))^n}{n!} \varepsilon_n(t_0, t),$$

où $|\varepsilon_n(t_0,t)| \leq 2\mathbb{E}[|X|^n]$ et $\lim_{t\to t_0} \varepsilon_n(t_0,t) = 0$.

(c) On suppose que X admet des moments à tout ordre et que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty,$$

où $\|X\|_n := \mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}$. Montrer que ϕ_X est analytique sur $\mathbb{R}$. Donner explicitement son développement en série entière au voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$, ainsi qu'un minorant du rayon de convergence en fonction de R.

Rappel. Une fonction est dite *analytique* sur $\mathbb{R}$ si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

(d) Soit X et Y des variables aléatoires réelles admettant des moments à tout ordre et telles que $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\|_n}{n} < \infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\|Y\|_n}{n} < \infty.$$

Montrer que X et Y ont même loi.

Remarque 1. On admettra que si $\phi_X = \phi_Y$ alors X et Y ont même loi (ce sera vu à la rentrée).

Remarque 2. Deux fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$, coïncidant sur un intervalle ouvert, coïncident sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. (*Moments et régularité*)

(a) On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a

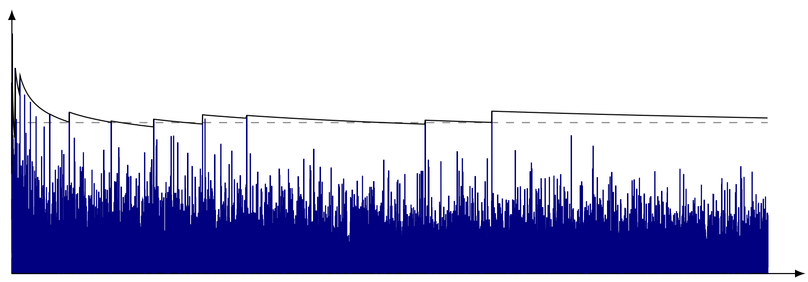
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k e^{itX}\right].$$

(b) On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2.

Indication. On pourra considérer $(\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2)/t^2$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$.

(d) (★) Construire une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, symétrique, qui n'admet pas de moment d'ordre 1 mais telle que ϕ_X soit dérivable en 0.



Quel exercice est illustré par cette image ?