Devoir à la maison 5

à rendre le lundi 7 janvier

Exercice 1. (*Une démonstration astucieuse de la loi forte des grands nombres*) Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[|X_1|] < \infty$. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $a > \mathbb{E}[X_1]$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$M := \sup_{n\in\mathbb{N}}(S_n - na) \quad \text{et} \quad M_k := \sup_{0\leq n\leq k}(S_n - na)$$
$$M' := \sup_{n\in\mathbb{N}}(S_{n+1} - S_1 - na) \quad \text{et} \quad M'_k := \sup_{0\leq n\leq k}(S_{n+1} - S_1 - na)$$

Montrer que M_k et M'_k ont même loi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et que M et M' ont même loi.

2. Établir une relation entre M_{k+1}, M'_k et X_1.
3. Montrer que $\mathbb{E}[\min(a - X_1, M')] \leq 0$.
4. En utilisant la loi du 0-1, en déduire que $M < \infty$ presque sûrement.
5. Montrer que, presque sûrement,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[X_1].$$

Corrigé.

1. Il existe une fonction $F\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ mesurable (car continue) telle que

$$M_k = \sup_{0\leq n\leq k}(X_1 + \cdots + X_n - na) = F(X_1, \ldots, X_k)$$
$$M'_k = \sup_{0\leq n\leq k}(X_2 + \cdots + X_{n+1} - na) = F(X_2, \ldots, X_{k+1}).$$

Or $(X_1, \ldots, X_k)$ et $(X_2, \ldots, X_{k+1})$ ont la même loi (qui est $(P_{X_1})^{\otimes k}$) donc M_k et M'_k aussi.
M est la limite croissante des M_k et M' la limite croissante des M'_k donc, par convergence dominée et en utilisant que M_k et M'_k ont même loi, on a, pour toute $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\mathbb{E}[f(M)] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[f(M_k)] = \lim_{k\to\infty} \mathbb{E}[f(M'_k)] = \mathbb{E}[f(M')],$$

ce qui montre que M et M' ont même loi.

2. On a

$$M_{k+1} = \sup_{0\leq n\leq k+1}(S_n - na) = \max\left(0, \sup_{0\leq n\leq k}(S_{n+1} - (n+1)a)\right) = \max\left(0, M'_k + X_1 - a\right)$$

3. On peut réécrire ce qui précède comme

$$M_{k+1} = M'_k + \max\left(-M'_k, X_1 - a\right) = M'_k - \min\left(M'_k, a - X_1\right).$$

Le DM est à rendre pendant le cours, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

En passant à l'espérance (car les M_k sont intégrables), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\min\left(M'_k, a - X_1\right)\right] = \mathbb{E}\left[M'_k - M_{k+1}\right] = \mathbb{E}[M_k] - \mathbb{E}[M_{k+1}] \leq 0,$$

car $M_k \leq M_{k+1}$. Ensuite, on fait tendre $k \to \infty$ et, par convergence dominée ($M'_k \to M'$ et on domine $|\min(M'_k, a - X_1)| \leq |a - X_1|$ car $M'_k \geq 0$, où $|a - X_1|$ est intégrable), on a

$$\mathbb{E}\left[\min\left(M'_k, a - X_1\right)\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} \mathbb{E}[\min(M', a - X_1)]$$

d'où le résultat.

4. Remarquons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\{M < \infty\} &= \{(S_n - na)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = \{(S_n - na - X_1 - \cdots - X_k)_{n>k} \text{ est bornée}\}\\ &= \{(X_{k+1} + \cdots + X_n - na)_{n>k} \text{ est bornée}\} \in \sigma(X_i, i > k)\end{aligned}$$

et donc $\{M < \infty\}$ appartient à la tribu queue des X_n, qui sont indépendantes donc, par la loi du 0-1, $\mathbb{P}(M < \infty) \in \{0, 1\}$.
Supposons que $\mathbb{P}(M < \infty) = 0$. Alors $M = \infty$ p.s. donc $\min(a - X_1, M') = a - X_1$ p.s. et la question précédente donne $\mathbb{E}[a - X_1] \leq 0$ alors que par définition de a, on a $\mathbb{E}[a - X_1] > 0$. Ceci est d'une absurdité sans nom. On a donc $\mathbb{P}(M < \infty) = 1$.

5. On a montré que, pour tout $a > \mathbb{E}[X_1]$, presque sûrement, $\sup_{n\in\mathbb{N}}(S_n - na) < \infty$. Donc, pour tout $a > \mathbb{E}[X_1]$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(S_n - na) \leq 0 \quad \text{presque sûrement,}$$

c'est-à-dire

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq a \quad \text{presque sûrement.}$$

Avec $a \to \mathbb{E}[X_1]$ (quitte à prendre une suite $a_n \downarrow \mathbb{E}[X_1]$) on obtient

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \leq \mathbb{E}[X_1] \quad \text{presque sûrement.}$$

Puis par symétrie (quitte à considérer $(-X_n)_{n\in\mathbb{N}}$) on a aussi

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}[X_1] \quad \text{presque sûrement,}$$

et cela montre le résultat attendu.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1 (de densité $e^{-x}\mathbb{1}_{x>0}$ par rapport à la mesure de Lebesgue).

1. Déterminer les limites inférieure et supérieure de $X_n/\ln(n)$ quand $n \to \infty$.
2. On pose $Z_n := \max(X_1, \ldots, X_n)/\ln(n)$ pour $n \geq 2$. Montrer que Z_n converge presque sûrement quand $n \to \infty$ vers une limite à déterminer.

Corrigé. Remarque préliminaire. Pour les deux questions, on va chercher des limites supérieures et inférieures sous la forme d'une constante presque sûre. Cela ne sort pas de nulle part : on vérifie aisément que ces limites sont mesurables par rapport à la tribu queue des $(X_n)_{n\geq 1}$, elles sont donc constantes presque sûrement d'après la loi du 0–1 de Kolmogorov.

1. *Limite inférieure.* Il est clair que $\liminf_{n\to\infty} X_n/\ln(n) \geq 0$, montrons l'égalité. On a
$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n < 1) = \sum_{n\geq 1} 1 - \mathrm{e}^{-1} = \infty,$$
et les événements $\{X_n < 1\}$ sont indépendants, donc, par le lemme de Borel–Cantelli, on en déduit que p.s. la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ prend une infinité de fois des valeurs inférieures à 1. Donc p.s. la suite $(X_n/\ln(n))_{n\geq 1}$ admet une sous-suite tendant vers 0. Donc $\liminf_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 0$ p.s.
Limite supérieure. Soit $a \geq 0$, on a $\mathbb{P}(X_n > a\ln(n)) = 1/n^a$ et les évènements sont indépendants, donc, d'après les lemmes de Borel–Cantelli, on a
$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n\to\infty}\{X_n > a\ln(n)\}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1 \end{cases}.$$
Soit $\varepsilon > 0$. Presque sûrement, $(X_n/\ln n)_{n\geq 2}$ ne passe au-dessus de $1+\varepsilon$ qu'un nombre fini de fois donc
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \leq 1+\varepsilon, \quad \text{presque sûrement.}$$
D'autre part, presque sûrement, $(X_n/\ln n)_{n\geq 2}$ passe au-dessus de $1-\varepsilon$ une infinité de fois donc
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \geq 1-\varepsilon, \quad \text{presque sûrement.}$$
On conclut en faisant tendre $\varepsilon \to 0$ (on discrétise en prenant $\varepsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$, pour pouvoir échanger le "$\forall k \in \mathbb{N}^*$" et le "p.s.") et ainsi $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1$ p.s.
2. *Limite inférieure.* Soit $\varepsilon \in (0,1)$ et posons $A_n = \{Z_n \leq 1-\varepsilon\}$ pour $n \geq 2$. On a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(\forall 1 \leq i \leq n, X_i \leq (1-\varepsilon)\ln(n)) = \mathbb{P}(X_1 \leq (1-\varepsilon)\ln(n))^n = \left(1 - \mathrm{e}^{-(1-\varepsilon)\ln(n)}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right)\right) \leq \exp\left(-n\cdot\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\right) \leq \exp(-n^{\varepsilon}).\end{aligned}$$
Donc $\sum_{n\geq 2}\mathbb{P}(A_n)$ converge. D'après le lemme de Borel–Cantelli, p.s., pour tout n suffisamment grand on a $Z_n \geq 1-\varepsilon$, ce qui montre que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1-\varepsilon$.
Limite supérieure, méthode 1. Posons $B_n = \{Z_n \geq 1+\varepsilon\}$. Un calcul proche de celui de la question précédente donne :
$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\varepsilon}}.$$
La série de terme général $1/n^{\varepsilon}$ ne converge pas, il faut donc extraire. Fixons $\eta > 0$ et posons $n_k = \lfloor k^{2/\varepsilon}\rfloor$. Alors $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}(B_{n_k})$ converge et d'après le lemme de Borel–Cantelli, p.s., pour tout k suffisamment grand on a $Z_{n_k} \leq 1+\varepsilon$. Soit $n \geq 2$ et l'unique $k \geq 1$ tel que $n_k \leq n < n_{k+1}$, on a
$$Z_n = \frac{\max(X_1,\dots,X_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1,\dots,X_{n_{k+1}})}{\ln(n_{k+1})}\frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n)} \leq Z_{n_{k+1}}\frac{\ln(n_{k+1})}{\ln(n_k)}.$$
Il s'ensuit que $\limsup_{n\to\infty} Z_n \leq 1+\varepsilon$ p.s.
Limite supérieure, méthode 2. Soit $n \geq N \geq 2$. On a
$$Z_n \leq \frac{\max(X_1,\dots,X_{N-1})}{\ln(n)} + \max\left(\frac{X_N}{\ln(N)},\dots,\frac{X_n}{\ln(n)}\right).$$
Soit $\varepsilon > 0$. Par la question 1., on sait que p.s. à partir d'un certain rang N (dépendant de ω), on a $X_n/\ln(n) \leq 1+\varepsilon$ et donc
$$Z_n \leq \frac{\max(X_1,\dots,X_{N-1})}{\ln(n)} + 1 + \varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} 1+\varepsilon.$$
On a donc montré que $\limsup_{n\to\infty} Z_n \leq 1+\varepsilon$ p.s.
Conclusion. En regroupant les limites inférieure et supérieure et avec $\varepsilon \to 0$, on a donc montré que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et de loi de Cauchy standard $(\pi(1+x^2))^{-1}\,\mathrm{d}x$. On pose $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$. Montrer que la suite $(n/M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.
Rappel. On a le développement asymptotique $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to \infty$.

Corrigé. Soit $t \leq 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq 0\right) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = \frac{1}{2^n},$$

donc $\mathbb{P}(n/M_n \leq t) \to 0$ quand $n \to \infty$. Soit maintenant $t > 0$. On a

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t, M_n > 0\right) + \mathbb{P}\left(M_n \leq 0\right).$$

D'après ce qui a été fait précédemment, $\mathbb{P}(n/M_n \leq t, M_n \leq 0) \to 0$. Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t, M_n > 0\right) = \mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{n}{t}\right) = 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{t}{n}} \frac{\mathrm{d}x}{\pi(1+x^2)}\right)^n &= 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n \\ &= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\pi}\right),\end{aligned}$$

car $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$ quand $x \to \infty$. Ainsi, la suite $(n/M_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre $1/\pi$.

Exercice 4. (*Fonction caractéristique et moments*) Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note ϕ_X sa fonction caractéristique définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par $\phi_X(\xi) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{i\xi X}]$.

1. (*Développement de fonction caractéristique*)
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que X admet un moment d'ordre $n-1$, c'est-à-dire que $\mathbb{E}[|X|^{n-1}] < \infty$. Montrer que, pour tous $t_0, t \in \mathbb{R}$,

   $$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i(t-t_0))^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k \mathrm{e}^{it_0 X}\right] + \frac{(i(t-t_0))^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n \mathrm{e}^{it_0 X} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \mathrm{e}^{iu(t-t_0)X}\,\mathrm{d}u\right].$$

   (b) On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tous $t_0, t \in \mathbb{R}$,

   $$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(i(t-t_0))^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k \mathrm{e}^{it_0 X}\right] + \frac{(i(t-t_0))^n}{n!} \varepsilon_n(t_0, t),$$

   où $|\varepsilon_n(t_0,t)| \leq 2\mathbb{E}[|X|^n]$ et $\lim_{t\to t_0} \varepsilon_n(t_0,t) = 0$.

   (c) On suppose que X admet des moments à tout ordre et que

   $$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty,$$

   où $\|X\|_n := \mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}$. Montrer que ϕ_X est analytique sur $\mathbb{R}$. Donner explicitement son développement en série entière au voisinage de $t_0 \in \mathbb{R}$, ainsi qu'un minorant du rayon de convergence en fonction de R.
   Rappel. Une fonction est dite *analytique* sur $\mathbb{R}$ si elle est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

(d) Soit X et Y des variables aléatoires réelles admettant des moments à tout ordre et telles que $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\|X\|_n}{n} < \infty \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\|Y\|_n}{n} < \infty.$$

Montrer que X et Y ont même loi.

Remarque 1. On admettra que si $\phi_X = \phi_Y$ alors X et Y ont même loi (ce sera vu à la rentrée).

Remarque 2. Deux fonctions analytiques sur $\mathbb{R}$, coïncidant sur un intervalle ouvert, coïncident sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. (*Moments et régularité*)

(a) On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et que pour tout entier $1 \le k \le n$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k e^{itX}\right].$$

(b) On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2.
Indication. On pourra considérer $(\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2)/t^2$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$.

(d) (★) Construire une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, symétrique, qui n'admet pas de moment d'ordre 1 mais telle que ϕ_X soit dérivable en 0.

Corrigé.

1.(a) On applique la formule de Taylor avec reste intégral à $y \mapsto e^{iy}$ en $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$e^{iy} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i(y-y_0))^k}{k!} e^{iy_0} + \frac{(i(y-y_0))^n}{(n-1)!} e^{iy_0} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \exp(iu(y-y_0))\,\mathrm{d}u.$$

Le résultat en découle en prenant $y = tX$, $y_0 = t_0 X$ et en prenant l'espérance (qui est linéaire) car la partie gauche est clairement intégrable et tous les termes de la somme sur k le sont aussi (car $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ pour $0 \le k \le n-1$) donc le dernier terme à droite doit être intégrable aussi.

(b) À partir de la question précédente et en remarquant que $\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = 1/n$, on a :

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(i(t-t_0))^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k e^{it_0X}\right] + \frac{(i(t-t_0))^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n e^{it_0X} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \left(e^{iu(t-t_0)X} - 1\right) \mathrm{d}u\right].$$

Ainsi, on pose

$$\varepsilon_n(t_0, t) := n\mathbb{E}\left[X^n e^{it_0X} \int_0^1 (1-u)^{n-1} \left(e^{iu(t-t_0)X} - 1\right) \mathrm{d}u\right],$$

et en appliquant le théorème de Fubini, on obtient la majoration

$$|\varepsilon_n(t_0, t)| \le 2n\mathbb{E}[|X|^n] \int_0^1 (1-u)^{n-1}\,\mathrm{d}u = 2\mathbb{E}[|X|^n].$$

De plus, pour $u \in [0,1]$, on a

$$\left| nX^n e^{it_0X} (1-u)^{n-1} \left(e^{iu(t-t_0)X} - 1\right) \right| \le 2n|X|^n (1-u)^{n-1},$$

majoration indépendante de t par une application $\lambda_{[0,1]} \otimes \mathbb{P}$-intégrable. Le théorème de convergence dominée garantit donc que $\lim_{t\to t_0} \varepsilon_n(t_0, t) = 0$.

(c) Soit $t_0, t \in \mathbb{R}$. Pour montrer que ϕ_X se développe autour de t_0 en série entière de la manière suivante

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i(t-t_0))^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k e^{it_0X}\right],$$

il suffit de montrer que

$$\frac{(i(t-t_0))^n}{n!} \varepsilon_n(t_0,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

pour t dans un voisinage de t_0. Par la question précédente, on a

$$\left|\frac{(i(t-t_0))^n}{n!} \varepsilon_n(t_0,t)\right| \leq \frac{|t-t_0|^n}{n!} 2\mathbb{E}\left[|X|^n\right]$$

Soit $\varepsilon > 0$, on a $\|X\|_n/n \leq (R-\delta)^{-1}$ à partir d'un certain rang et donc

$$\left|\frac{(i(t-t_0))^n}{n!} \varepsilon_n(t_0,t)\right| \leq \frac{|t-t_0|^n}{n!} 2 \frac{n^n}{(R-\delta)^n} \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{n|t-t_0|}{R-\delta}\right)^n \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n = \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e|t-t_0|}{R-\delta}\right)^n.$$

À présent, on voit qu'il suffit de prendre t tel que $|t-t_0| < R/e$: alors on choisit δ tel que $e|t-t_0|/(R-\delta) < 1$ et on a bien

$$\frac{(i(t-t_0))^n}{n!} \varepsilon_n(t_0,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

On a donc montré que ϕ_X est analytique avec un rayon de convergence au moins R/e en tout point et avec le développement explicite donné ci-dessus.

(d) Par la question précédente, ϕ_X et ϕ_Y sont analytiques sur $\mathbb{R}$ et le développement en série entière autour de 0 peut s'écrire

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[Y^k\right] = \phi_Y(t),$$

pour $t \in]-R/e, R/e[$. Comme ϕ_X et ϕ_Y sont analytiques sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $]-R/e, R/e[$, on en déduit que $\phi_X = \phi_Y$ sur $\mathbb{R}$ donc que X et Y ont la même loi.

Remarque. En général, les moments ne caractérisent pas toujours la loi : voir l'exercice 9 du TD 12 pour un exemple.

2.(a) Cela se montre par récurrence à partir du théorème de dérivation sous le signe intégral en utilisant la domination $|i^k X^k \exp(itX)| \leq |X|^k \in L^1$ pour $1 \leq k \leq n$.

Attention. On ne peut pas appliquer la question 1.(b) : satisfaire un développement limité à l'ordre n en t_0 n'implique pas que l'on est n fois dérivable en t_0 (sauf pour $n = 1$). Un contrexemple est la fonction $f : x \mapsto x^3 \sin(1/x) \mathbb{1}_{x\neq 0}$ qui admet un DL à l'ordre 2 en 0 mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

(b) La fonction ϕ_X étant deux fois dérivable en 0, la formule de Taylor-Young garantit un développement limité à l'ordre 2 :

$$\phi_X(t) = 1 + \phi_X'(0)t + \phi_X''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

On en déduit que :

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi_X(t) + \phi_X(-t) - 2}{t^2} = \phi''(0).$$

Or $\phi_X(t) + \phi_X(-t) = 2\mathrm{Re}(\phi_X(t)) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)]$, donc on a montré que

$$\lim_{t\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\phi_X''(0).$$

Or $(1-\cos(tX))/t^2 \geq 0$, donc on peut appliquer le lemme de Fatou, qui donne

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mathbb{E}\left[2\liminf_{t\to 0}\left(\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right)\right] \leq 2\liminf_{t\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\phi_X''(0) < \infty.$$

Remarque. Par la question 1., on a alors $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$ et aussi que ϕ_X est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(c) Il suffit de considérer les k pairs. Procédons par récurrence. L'initialisation est triviale pour $k=0$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Admettons notre hypothèse de récurrence à l'ordre k : si ϕ_X est $2k$ fois dérivable en 0, alors X admet des moments jusqu'à l'ordre $2k$. Montrons là à l'ordre $k+1$: supposons ϕ_X est $2k+2$ fois dérivable en 0. Alors, on sait par hypothèse de récurrence que $\mathbb{E}[X^{2k}] < \infty$ et donc, par 2.(a), ϕ est $2k$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier et sa dérivée d'ordre $2k$ est

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_X^{(2k)}(t) = \mathbb{E}\left[(iX)^{2k}\mathrm{e}^{itX}\right].$$

On procède ensuite comme en 2.(b), avec $\phi_X^{(2k)}$ à la place de ϕ_X.

(d) On cherche une loi $P_X = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\delta_k$ telle que $a_k = a_{-k}$, $\mathbb{E}[|X|] = 2\sum_{k\geq 0} ka_k = \infty$ et telle que ϕ_X soit dérivable en 0, où l'on a

$$\phi_X(t) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kt) \in \mathbb{R}.$$

Choisissons $a_0 = a_1 = a_{-1} = 0$ et pour $k \geq 2$:

$$a_k = a_{-k} = \frac{c}{k^2\ln k}, \qquad \text{où } c = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k}\right)^{-1},$$

ce qui garantit que $\mathbb{E}[|X|] = \infty$, mais on s'est placé très près du cas $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ (si les a_k convergeaient un peu plus vite vers 0, le moment d'ordre 1 serait fini). On ne peut pas se passer du $\ln k$ au dénominateur : avec $a_k = c/k^2$, ϕ_X n'est pas dérivable en 0. On ne peut pas prévoir que ce choix va fonctionner, mais on a mis toutes les chances de notre côté.

Montrons que ϕ_X est dérivable en 0, de dérivée nulle. On a

$$0 \leq \frac{1-\phi_X(t)}{t} = \frac{2c}{t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2\ln k}(1-\cos(tk)).$$

On vérifie ensuite que cette quantité tend vers 0 lorsque $t \to 0$ en décomposant cette dernière somme suivant que $k \geq 1/t$ ou $k < 1/t$. Tout d'abord :

$$\sum_{k\geq 1/t}\frac{1}{k^2\ln k}\frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq -\frac{2}{t\ln(t)}\sum_{k\geq 1/t}\frac{1}{k^2} \leq -\frac{2}{t\ln(t)}\int_{\lfloor 1/t\rfloor - 1}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{t(\lfloor 1/t\rfloor - 1)\ln(t)} \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité $1-\cos(x) \leq \frac{x^2}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{t}\sum_{2\leq k<1/t}\frac{1}{k^2\ln k}\frac{(1-\cos(tk))}{t} \leq t\sum_{2\leq k<1/t}\frac{1}{\ln(k)} \leq \frac{t}{\ln(2)} + t\int_2^{1/t}\frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_2^y \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{\ln x}\right]_2^y + \int_2^y \frac{1}{(\ln(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Mais lorsque $x \to \infty$, $1/(\ln x)^2 = o(1/\ln x)$ et donc lorsque $y \to \infty$:

$$\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{\ln(x)}\right]_2^y + o\left(\int_2^y \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x\right)$$

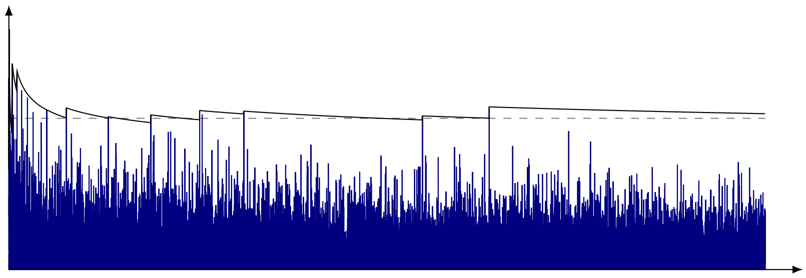
de sorte que

$$\int_2^{1/t} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{t\ln(t)}$$

Il s'ensuit que

$$t\int_2^{1/t} \frac{1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[t\to 0]{} 0.$$

Ceci achève de démontrer que $(1-\phi_X(t))/t \to 0$ lorsque $t \to 0$.
Cela montre qu'en général il n'est pas vrai que X admet un moment d'ordre 1 lorsque ϕ_X est dérivable en 0.



Quel exercice est illustré par cette image ?

C'est l'exercice 2, avec en bleu la suite $(X_n/\ln n)_{n\geq 1}$, en noir la suite $(Z_n/\ln n)_{n\geq 1}$ et en pointillés la constante 1. La simulation a été faite jusqu'à $n = 50000$: $X_n/\ln n$ ne repasse que très rarement au-dessus de 1.