Devoir à la maison 4

à rendre avant le 6 décembre

Exercice 1.

1. (*Formule du crible*) Soient $A_1, \ldots, A_n$ des parties d'un ensemble Ω fini. Montrer que l'on a
$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$
2. Lors d'une soirée, n personnes déposent leurs chapeaux au vestiaire. À la fin de la soirée, on leur rend un chapeau au hasard. Calculer la probabilité p_n qu'aucune personne ne récupère son propre chapeau. Calculer $\lim_{n\to\infty} p_n$.
3. Calculer la probabilité pour que k personnes exactement récupèrent leur propre chapeau. Comparer la probabilité pour qu'une personne choisie à l'avance récupère son propre chapeau à la probabilité qu'au moins une personne récupère son propre chapeau.

Exercice 2. (*Paradoxe de Bertrand*)

On s'intéresse à la loi de la longueur d'une corde tirée "au hasard" sur un cercle de rayon 1. Formaliser et calculer cette loi dans les trois cas suivants :

1. On choisit les deux extrémités de la corde au hasard sur le cercle.
2. On choisit le centre de la corde au hasard sur le disque unité.
3. On choisit au hasard la direction du rayon orthogonal à la corde, puis le centre de la corde uniformément sur ce rayon.

Remarque. Bertrand s'était intéressé à la probabilité que la corde soit plus longue que $\sqrt{3}$, c'est-à-dire la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral inscrit, et avait constaté qu'elle était différente dans les 3 cas. Il y voyait un paradoxe mais il n'y en a pas : il y a plusieurs manières de "tirer une corde au hasard sur le cercle", qui se précisent en définissant l'espace de probabilité sur lequel on travaille et il est normal que selon l'espace de probabilité, le résultat diffère.

Exercice 3. (*Une autre loi de l'arcsinus*)

On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur $2n$, on note $X_1, \ldots, X_{2n} \in \{-1, +1\}$ les résultats des $2n$ lancers, et on s'intéresse à la marche aléatoire associée, définie par
$$\forall k \in [\![1, 2n]\!], \quad S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i.$$
On note T_{2n} le temps passé par la marche aléatoire du côté positif, c'est-à-dire
$$T_{2n} := \operatorname{card}\{k \in [\![0, 2n-1]\!] : \max(S_k, S_{k+1}) > 0\}.$$

1. Montrer que T_{2n} est pair.

Le DM est à rendre pendant le TD, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

2. Montrer que la loi de T_{2n} est symétrique par rapport à n, c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(T_{2n} = 2n - 2k).$$

3. Évaluer $\mathbb{P}(T_{2n} = 0)$.
4. On note τ l'instant de premier retour en 0 de la marche. Pour $1 \leq k \leq n-1$, montrer que

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau = 2r)\mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k - 2r) + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{2}\mathbb{P}(\tau = 2r)\mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k).$$

5. Montrer finalement que T_{2n} suit la *loi de l'arcsinus discrète*, c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = 2^{-2n}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}.$$

6. (*Application numérique*) Deux joueurs jouent 20 fois de suite à pile ou face. Calculez la probabilité pour que l'un des joueurs mène tout le temps au cours du jeu, puis que le joueur le plus chanceux mène 16 fois ou plus au cours du jeu, et enfin la probabilité pour que chaque joueur mène 10 fois.
7. Nous nous intéressons maintenant à la loi de T_{2n} lorsque la marche revient en 0 à l'instant $2n$. En procédant comme précédemment, établir que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) = \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

8. Que concluez-vous sur la loi conditionnelle de T_{2n} sachant que $S_{2n} = 0$, c'est-à-dire la loi de T_{2n} sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot \cap \{S_{2n} = 0\})/\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$? Comparez avec la loi de T_{2n}.