



Devoir à la maison 4

à rendre avant le 6 décembre



Exercice 1.

1. (Formule du crible) Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties d'un ensemble Ω fini. Montrer que l'on a

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \text{card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

2. Lors d'une soirée, n personnes déposent leurs chapeaux au vestiaire. À la fin de la soirée, on leur rend un chapeau au hasard. Calculer la probabilité p_n qu'aucune personne ne récupère son propre chapeau. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$.
3. Calculer la probabilité pour que k personnes exactement récupèrent leur propre chapeau. Comparer la probabilité pour qu'une personne choisie à l'avance récupère son propre chapeau à la probabilité qu'au moins une personne récupère son propre chapeau.

Corrigé. On notera $\#A$ pour le cardinal de A .

1. *Méthode 1.* On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est immédiat. On va avoir besoin dans la suite du cas $n = 2$, qui est la formule classique $\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)$ (pour la montrer, il suffit de remarquer que $A_1 \cup A_2$ est l'union disjointe de A_1 et $A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)$ et que $(A_1 \cap A_2) \subset A_2$).

Supposons que le résultat soit vrai au rang n . En appliquant le cas $n = 2$ puis l'hypothèse de récurrence deux fois, on a

$$\begin{aligned} & \# \left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i \right) \\ &= \#A_{n+1} + \# \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) - \# \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{i=1}^n A_i \right) \\ &= \#A_{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) - \# \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap A_{n+1} \right) \\ &= \#A_{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\ &= \#A_{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1 \\ \text{avec } i_k = n+1}} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1 \\ \text{avec } i_k = n+1}} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \end{aligned}$$

car dans le cas $k = n + 1$, on a forcément $i_k = n + 1$. Cela conclut la récurrence.

Méthode 2. On remarque que

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - \mathbb{1}_{\bigcap_{i=1}^n A_i^c} = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i^c} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (-\mathbb{1}_{A_{i_1}}) \cdots (-\mathbb{1}_{A_{i_k}}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}},\end{aligned}$$

On obtient le résultat demandé en intégrant par rapport à la mesure de comptage. Cette méthode à l'air plus rapide, mais c'est juste qu'on est plus à l'aise avec le produit et la somme qu'avec les opérations ensemblistes : si on devait démontrer proprement le développement du produit ci-dessus, on ferait une récurrence qui ressemblerait à la méthode 1.

2. On se place sur $\Omega := \mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, muni de la tribu $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure de probabilité uniforme $\mathbb{P}$.

On appelle un *dérangement* une permutation qui ne laisse stable aucun point. Il s'agit ici de dénombrer l'ensemble $\mathcal{D}_n$ des dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On remarque que $\mathcal{D}_n^c = \bigcup_{i=1}^n A_i$ avec $A_i := \{\sigma \in \mathcal{S}_n : \sigma(i) = i\}$. Ainsi, par la formule du crible, on obtient

$$\begin{aligned}\#(\mathcal{D}_n^c) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!},\end{aligned}$$

où l'on a noté que $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$ est en bijection avec $\mathcal{S}_{n-k}$ car k valeurs sont déjà fixées. On obtient donc

$$p_n = \frac{n! - \#(\mathcal{D}_n^c)}{n!} = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

On en déduit donc que

$$p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}.$$

3. On conserve les notations de la question précédente.

► La probabilité pour que k personnes exactement récupèrent leur chapeau est égale à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#\{\sigma(i_1) = i_1, \dots, \sigma(i_k) = i_k, \sigma|_{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_k\}} \text{ ne laisse fixe aucun point}\} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \#\mathcal{D}_{n-k} = \frac{1}{n!} \binom{n}{k} (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.\end{aligned}$$

Si k est fixé et $n \rightarrow \infty$, cette probabilité tend vers $1/(ek!)$. Si k tend vers l'infini en même temps que n , quelle que soit la vitesse, cette probabilité tend vers 0.

► La probabilité pour qu'une personne choisis à l'avance récupère son propre chapeau est $1/n$, donc tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. La probabilité qu'au moins une personne récupère son propre chapeau est $1 - p_n$ qui tend vers $1 - e^{-1} > 0$ quand $n \rightarrow \infty$.



Exercice 2. (*Paradoxe de Bertrand*) On s'intéresse à la loi de la longueur d'une corde tirée "au hasard" sur un cercle de rayon 1. Formaliser et calculer cette loi dans les trois cas suivants :

1. On choisit les deux extrémités de la corde au hasard sur le cercle.
2. On choisit le centre de la corde au hasard sur le disque unité.
3. On choisit au hasard la direction du rayon orthogonal à la corde, puis le centre de la corde uniformément sur ce rayon.

Remarque. Bertrand s'était intéressé à la probabilité que la corde soit plus longue que $\sqrt{3}$, c'est-à-dire la longueur d'un côté d'un triangle équilatéral inscrit, et avait constaté qu'elle était différente dans les 3 cas. Il y voyait un paradoxe mais il n'y en a pas : il y a plusieurs manières de "tirer une corde au hasard sur le cercle", qui se précisent en définissant l'espace de probabilité sur lequel on travaille et il est normal que selon l'espace de probabilité, le résultat diffère.

Corrigé.

1. On identifie le cercle à $[0, 2\pi[$, donc on prend ici $\Omega := [0, 2\pi[$ muni de la tribu $\mathcal{A} := \mathcal{B}([0, 2\pi[$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{4\pi^2} d\theta d\theta'$, où on note $\omega = (\theta, \theta')$ pour $\omega \in \Omega$. La longueur de la corde est alors (faire un dessin)

$$X(\omega) = 2 \left| \sin \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right|.$$

Déterminons la loi de X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f \left(2 \left| \sin \left(\frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right| \right) \frac{1}{4\pi^2} d\theta d\theta' = \int_0^{2\pi} dv \int_{v-2\pi}^v du f \left(2 \left| \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right| \right) \frac{1}{4\pi^2}$$

avec le changement de variable $\varphi: (\theta, \theta') \mapsto (\theta - \theta', \theta)$ de $]0, 2\pi[\rightarrow \{(u, v) : v \in]0, 2\pi[, u \in]v - 2\pi, v[\}$ et de jacobien 1. Or, on a, par 2π -périodicité de $u \mapsto |\sin(u/2)|$,

$$\int_{v-2\pi}^v f \left(2 \left| \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right| \right) du = \int_{-\pi}^{\pi} f \left(2 \left| \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right| \right) du = 2 \int_0^{\pi} f \left(2 \left| \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right| \right) du,$$

par parité de $u \mapsto |\sin(u/2)|$. On obtient donc

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f \left(2 \sin \left(\frac{u}{2} \right) \right) du = \frac{1}{\pi} \int_0^2 f(x) \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)^{-1/2} dx,$$

avec le changement de variable $u = 2 \arcsin(x/2)$. La loi de X est donc

$$\frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right)^{-1/2} \mathbb{1}_{x \in [0, 2]} dx.$$

2. On prend à présent $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité muni de la tribu $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\Omega)$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{\pi} dx dy$, où on note $\omega = (x, y)$ pour $\omega \in \Omega$. La corde n'est bien définie que pour $\omega \neq (0, 0)$ mais $\omega = (0, 0)$ arrive avec probabilité nulle (et dans ce cas on peut malgré tout définir la longueur de la corde comme étant 2). La longueur de la corde est (encore faire un dessin)

$$X(\omega) = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Déterminons la loi de X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a, avec un passage en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X)] &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f \left(2\sqrt{1 - x^2 - y^2} \right) \mathbb{1}_{x^2 + y^2 \leq 1} dx dy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f \left(2\sqrt{1 - r^2} \right) \mathbb{1}_{r^2 \leq 1} r dr d\theta \\ &= 2 \int_0^1 f \left(2\sqrt{1 - r^2} \right) r dr = \frac{1}{2} \int_0^2 f(u) u du, \end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = 2\sqrt{1-r^2}$ (pour lequel on a $r dr = \frac{u}{4} du$). La loi de X est donc

$$\frac{1}{2} x \mathbb{1}_{x \in [0,2]} dx.$$

3. On prend $\Omega := [0, 2\pi] \times [0, 1]$ muni de la tribu $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\Omega)$ et de la mesure de probabilité $\mathbb{P}(d\omega) = \frac{1}{2\pi} d\theta dr$, où on note $\omega = (\theta, r)$ pour $\omega \in \Omega$. La longueur de la corde est (c'est une configuration analogue à la question 2.)

$$X(\omega) = 2\sqrt{1-r^2}.$$

Déterminons la loi de X . Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a

$$\mathbb{E}[f(X)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 f(2\sqrt{1-r^2}) dr d\theta = \int_0^1 f(2\sqrt{1-r^2}) dr = \int_0^2 f(u) \frac{u}{4} \left(1 - \frac{u^2}{4}\right)^{-1/2} du,$$

avec le changement de variable $u = 2\sqrt{1-r^2}$. La loi de X est donc

$$\frac{x}{4} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} \mathbb{1}_{x \in [0,2]} dx.$$



Exercice 3. (Une autre loi de l'arcsinus) On considère un jeu de pile ou face équilibré de longueur $2n$, on note $X_1, \dots, X_{2n} \in \{-1, +1\}$ les résultats des $2n$ lancers, et on s'intéresse à la marche aléatoire associée, définie par

$$\forall k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket, \quad S_k := \sum_{i=1}^k X_i.$$

On note T_{2n} le temps passé par la marche aléatoire du côté positif, c'est-à-dire

$$T_{2n} := \text{card} \{k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket : \max(S_k, S_{k+1}) > 0\}.$$

1. Montrer que T_{2n} est pair.
2. Montrer que la loi de T_{2n} est symétrique par rapport à n , c'est-à-dire

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(T_{2n} = 2n - 2k).$$

3. Évaluer $\mathbb{P}(T_{2n} = 0)$.
4. On note τ l'instant de premier retour en 0 de la marche. Pour $1 \leq k \leq n-1$, montrer que

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \sum_{r=1}^k \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k - 2r) + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k).$$

5. Montrer finalement que T_{2n} suit la loi de l'arcsinus discrète, c'est-à-dire

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = 2^{-2n} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

6. (Application numérique) Deux joueurs jouent 20 fois de suite à pile ou face. Calculez la probabilité pour que l'un des joueurs mène tout le temps au cours du jeu, puis que le joueur le plus chanceux mène 16 fois ou plus au cours du jeu, et enfin la probabilité pour que chaque joueur mène 10 fois.
7. Nous nous intéressons maintenant à la loi de T_{2n} lorsque la marche revient en 0 à l'instant $2n$. En procédant comme précédemment, établir que

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) = \frac{1}{n+1} \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

8. Que concluez-vous sur la loi conditionnelle de T_{2n} sachant que $S_{2n} = 0$, c'est-à-dire la loi de T_{2n} sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot \cap \{S_{2n} = 0\})/\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$? Comparez avec la loi de T_{2n} .

Corrigé.

1. Le temps passé du côté positif T_{2n} est pair. En effet, soit $k \leq n-1$, S_{2k+1} est impair donc non nul : si $S_{2k+1} > 0$, alors $T_{2k+2} - T_{2k} = 2$ et si $S_{2k+1} < 0$, alors $T_{2k+2} - T_{2k} = 0$.
2. On sait que $(-S_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ est aussi une marche aléatoire simple symétrique. Or le temps qu'elle passe du côté positif est exactement $2n - T_{2n}$ donc T_{2n} et $2n - T_{2n}$ ont même loi, c'est-à-dire la loi de T_{2n} est symétrique par rapport à n .
3. On a

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 0) = \mathbb{P}(S_1 \leq 0, \dots, S_{2n} \leq 0) = \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0).$$

Cette probabilité a été citée dans le cours, comme conséquence du lemme fondamental, mais rappelons comment la calculer. Remarquons alors que, comme le 1^{er} pas est imposé,

$$\begin{aligned} \#\{S_1 > 0, \dots, S_{2n+1} > 0\} &= \#\{\text{chemins partant de } (1, 1) \text{ restant } \geq 1 \text{ jusqu'à } 2n+1\} \\ &= \#\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0\}, \end{aligned}$$

en ramenant le point de départ de $(1, 1)$ à $(0, 0)$. En outre, si $S_{2n} > 0$ alors $S_{2n} \geq 2$ donc il y a deux possibilités pour le choix de $S_{2n+1} > 0$: ainsi on a

$$\#\{S_1 > 0, \dots, S_{2n+1} > 0\} = 2\#\{S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0\}.$$

En regroupant, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{2n} = 0) &= \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0) = 2\mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0) = \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) \\ &= \mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

en utilisant successivement la symétrie de la marche, puis le lemme fondamental.

4. On note $\tau := \min\{i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket : S_i = 0\}$. Sur l'événement $\{T_{2n} = 2k\}$, la marche repasse forcément par 0 (car $1 \leq k \leq n-1$) donc τ est bien défini. Comme en outre τ est pair, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(T_{2n} = 2k, \tau = 2r) \\ &= \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_1 > 0, \dots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0) + \sum_{r=1}^n \mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_1 < 0, \dots, S_{2r-1} < 0, S_{2r} = 0) \\ &= \sum_{r=1}^k \mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_1 > 0, \dots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0) + \sum_{r=1}^{n-k} \mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_1 < 0, \dots, S_{2r-1} < 0, S_{2r} = 0), \end{aligned}$$

en notant que, sur le 1^{er} événement, on a $2k = T \geq 2r$ et, sur le 2^e événement, on a $2k = T \leq 2n-2r$. On a ensuite

$$\begin{aligned} \#\{T_{2n} = 2k, S_1 > 0, \dots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0\} &= \#\{S_1 > 0, \dots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0\} \\ &\quad \cdot \#\{\text{chemins partant de } (2r, 0) \text{ passant } 2k - 2r \text{ unités de temps du côté positif avant } 2n\} \\ &= \#\{S_1 > 0, \dots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0\} \#\{T_{2n-2r} = 2k - 2r\}. \end{aligned}$$

En procédant similairement pour l'autre terme, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{2n} = 2k) &= \sum_{r=1}^k \mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k - 2r) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-k} \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_{2r-1} < 0, S_{2r} = 0) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k). \end{aligned}$$

On obtient le résultat en notant que

$$\mathbb{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2r-1} > 0, S_{2r} = 0) = \mathbb{P}(S_1 < 0, \dots, S_{2r-1} < 0, S_{2r} = 0) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau = 2r).$$

5. On procède par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est clairement vrai. Supposons donc que pour tout $1 \leq m \leq n-1$, T_{2m} suit la loi de l'arcsinus discrète de longueur $2m$ et montrons que c'est aussi le cas de T_{2n} . Tout d'abord par la question 3., $\mathbb{P}(T_{2n} = 0)$ convient et par symétrie par rapport à n , $\mathbb{P}(T_{2n} = 2n)$ convient aussi. Soit $1 \leq k \leq n-1$, montrons que $\mathbb{P}(T_{2n} = 2k)$ satisfait l'égalité souhaitée.

Méthode 1. On peut traiter la question en remplaçant les différentes probabilités dans la question 4. par leurs expressions explicites (on connaît la loi de τ par le cours) et en calculant avec les binomiales.

Méthode 2. On va vérifier que l'instant de dernier retour en 0 satisfait la même relation. Rappelons qu'il est défini par

$$\bar{T}_{2n} := \max\{k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket : S_k = 0\},$$

qu'il est pair et qu'il suit la loi de l'arcsinus d'après le cours. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Sur l'événement $\{\bar{T}_{2n} = 2k\}$, on a $\tau \leq 2k$ donc

$$\mathbb{P}(\bar{T}_{2n} = 2k) = \sum_{r=1}^k \mathbb{P}(\tau = 2r, \bar{T}_{2n} = 2k) = \sum_{r=1}^k \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(\bar{T}_{2n-2r} = 2k - 2r),$$

en séparant le chemin entre sa partie de 0 à $2k$ et celle de $2k$ à $2n$. Maintenant, remarquons que, en utilisant la symétrie de la loi de $\bar{T}_{2n}$ par rapport à n et en appliquant le raisonnement précédent,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\bar{T}_{2n} = 2k) &= \mathbb{P}(\bar{T}_{2n} = 2n - 2k) = \sum_{r=1}^{n-k} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(\bar{T}_{2n-2r} = 2n - 2k - 2r) \\ &= \sum_{r=1}^{n-k} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(\bar{T}_{2n-2r} = 2k), \end{aligned}$$

en utilisant de nouveau que $\bar{T}_{2n-2r}$ est symétrique par rapport à $n-r$. En moyennant les deux expressions obtenues pour $\mathbb{P}(\bar{T}_{2n} = 2k)$, on obtient

$$\mathbb{P}(\bar{T}_{2n} = 2k) = \sum_{r=1}^k \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(\bar{T}_{2n-2r} = 2k - 2r) + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(\bar{T}_{2n-2r} = 2k),$$

donc $\bar{T}_{2n}$ vérifie la même relation de récurrence que T_{2n} . On en déduit que $\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(\bar{T}_{2n} = 2k)$, qui satisfait l'égalité demandée.

Méthode 3. On va interpréter l'une des binomiales de l'hypothèse de récurrence comme une probabilité. Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k - 2r) &= \mathbb{P}(\tau = 2r) \frac{1}{2^{2n-2r}} \binom{2(k-r)}{k-r} \binom{2(n-k)}{n-k} \\ &= \frac{1}{2^{2n-2k}} \binom{2(n-k)}{n-k} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(S_{2k-2r} = 0) \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k - 2r) &= \mathbb{P}(\tau = 2r) \frac{1}{2^{2n-2r}} \binom{2k}{k} \binom{2(n-r-k)}{n-r-k} \\ &= \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(S_{2n-2r-2k} = 0). \end{aligned}$$

On obtient donc, par la question 4., que $\mathbb{P}(T_{2n} = 2k)$ est égale à

$$\frac{1}{2^{2n-2k+1}} \binom{2(n-k)}{n-k} \sum_{r=1}^k \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(S_{2k-2r} = 0) + \frac{1}{2^{2k+1}} \binom{2k}{k} \sum_{r=1}^{n-k} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(S_{2n-2r-2k} = 0).$$

Or sur l'événement $\{S_{2k} = 0\}$, on a $\tau \leq 2k$ et, comme en outre τ est pair, on a

$$\sum_{r=1}^k \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(S_{2k-2r} = 0) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k}.$$

Donc, en procédant de même pour l'autre somme, on obtient

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2(n-k)}{n-k} \binom{2k}{k} + \frac{1}{2^{2n+1}} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2(n-k)}{n-k} \binom{2k}{k},$$

ce qui montre l'étape n de la récurrence et donc conclut la question.

6. On a $n = 10$.

- ▷ La probabilité pour que l'un des joueurs mène tout le temps au cours du jeu est assez élevée :

$$\mathbb{P}(T_{2n} \in \{0, 2n\}) = 2 \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} = \frac{46189}{131072} \simeq 35\%.$$

- ▷ La probabilité pour que le joueur le plus chanceux mène 16 fois ou plus au cours du jeu est :

$$\mathbb{P}(T_{2n} \geq 16 \text{ ou } T_{2n} \leq 4) = 2\mathbb{P}(T_{2n} \in \{0, 2, 4\}) = \frac{2}{2^{2n}} \sum_{k=0}^2 \binom{2(n-k)}{n-k} \binom{2k}{k} = \frac{22451}{32768} \simeq 68\%.$$

- ▷ La probabilité pour que chaque joueur mène 10 fois est :

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 10) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2(n-5)}{n-5} \binom{10}{5} = \frac{3969}{65536} \simeq 6\%.$$

7. Comme précédemment, on a toujours symétrie par rapport à n , c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(T_{2n} = 2n - 2k, S_{2n} = 0),$$

en notant que $-S$ a même loi que S .

Commençons par calculer $\mathbb{P}(T_{2n} = 2n, S_{2n} = 0)$: on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{2n} = 2n, S_{2n} = 0) &= \mathbb{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0) \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \#\{\text{chemins de } (0, 1) \text{ à } (2n, 1) \text{ ne touchant pas } 0\} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} (\#\{\text{chemins de } (0, 1) \text{ à } (2n, 1)\} - \#\{\text{chemins de } (0, -1) \text{ à } (2n, 1)\}) \end{aligned}$$

en décalant le point de départ de $(0, 0)$ à $(0, 1)$ puis en utilisant le principe de réflexion. On a donc

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2n, S_{2n} = 0) = \frac{1}{2^{2n}} \left(\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \right) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \frac{1}{n+1}$$

et par symétrie, $\mathbb{P}(T_{2n} = 0, S_{2n} = 0)$ a la même valeur.

Pour le reste on va procéder par récurrence. Le cas $n = 1$ est traité par ce qui précède. On suppose que la formule est vraie pour T_{2m} et S_{2m} avec $1 \leq m \leq n-1$. Montrons qu'elle est vraie au rang

n . Par ce qui précède, il reste à considérer le cas $1 \leq k \leq n-1$. On a, exactement de la même manière que pour la question 3., la formule suivante

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) &= \sum_{r=1}^k \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k-2r, S_{2n-2r} = 0) \\ &\quad + \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{2} \mathbb{P}(\tau = 2r) \mathbb{P}(T_{2n-2r} = 2k, S_{2n-2r} = 0).\end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que l'on connaît explicitement la loi de τ , on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) &= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{r=1}^k \frac{1}{2r-1} \binom{2r}{r} \frac{1}{n-r+1} \binom{2n-2r}{n-r} + \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{r=1}^{n-k} \frac{1}{2r-1} \binom{2r}{r} \frac{1}{n-r+1} \binom{2n-2r}{n-r}.\end{aligned}$$

On effectue alors le changement $q = n-r$ dans la 1^{re} somme et $p = r-1$ dans la 2^e, ce qui donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) &= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{q=n-k}^{n-1} \frac{1}{2n-2q-1} \binom{2n-2q}{n-q} \frac{1}{q+1} \binom{2q}{q} + \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{p=0}^{n-k-1} \frac{1}{2p+1} \binom{2p+2}{p+1} \frac{1}{n-p} \binom{2n-2p-2}{n-p-1} \\ &= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{q=n-k}^{n-1} \frac{2}{n-q} \binom{2n-2q-2}{n-q-1} \frac{1}{q+1} \binom{2q}{q} + \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{p=0}^{n-k-1} \frac{2}{p+1} \binom{2p}{p} \frac{1}{n-p} \binom{2n-2p-2}{n-p-1} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{n-r} \binom{2n-2r-2}{n-r-1} \frac{1}{r+1} \binom{2r}{r}.\end{aligned}$$

Cela nous permet de conclure, sans essayer de calculer précisément : en effet, comme le résultat ne dépend pas de k , on en déduit que

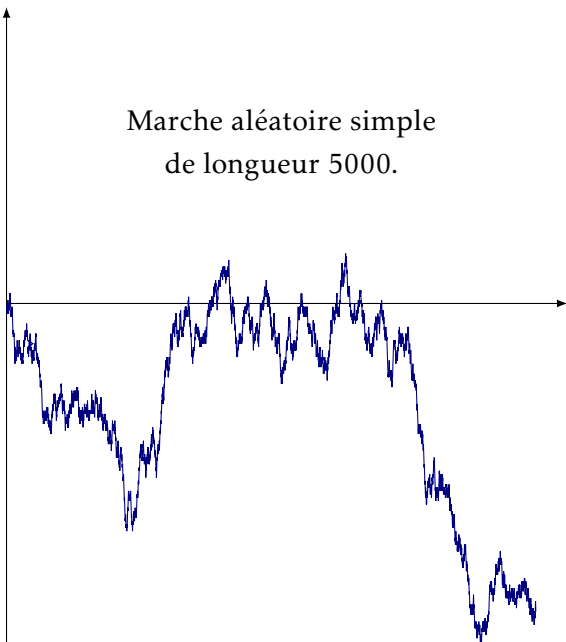
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{2n} = 2k, S_{2n} = 0) &= \frac{1}{n-1} \mathbb{P}(T_{2n} \in \{2i : 1 \leq i \leq n-1\}, S_{2n} = 0) \\ &= \frac{1}{n-1} (\mathbb{P}(S_{2n} = 0) - \mathbb{P}(T_{2n} \in \{0, 2n\}, S_{2n} = 0)) \\ &= \frac{1}{n-1} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \mathbb{P}(S_{2n} = 0),\end{aligned}$$

en utilisant les calculs effectués au début de la question. Cela montre l'étape n de la récurrence et conclut la question.

8. La loi conditionnelle de T_{2n} sachant que $S_{2n} = 0$ est donc la loi uniforme sur $\{2i : 0 \leq i \leq n\}$. Ainsi le conditionnement par $S_{2n} = 0$ rend T_{2n} équiréparti, alors que sans le conditionnement, il suit la loi de l'arcsinus qui charge beaucoup plus les extrémités.



Marche aléatoire simple
de longueur 5000.



Marche aléatoire simple
de longueur 5000
conditionnée à finir en 0.

