Devoir à la maison 3

à rendre avant le 8 novembre

Exercice 1. (*Questions de cours*)

1. Énoncez le lemme de Fatou.
2. Énoncez le théorème de convergence dominée.
3. Énoncez le théorème de Radon–Nikodym.

Exercice 2. (*Réarrangement symétrique*) Soit d un entier non nul. On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Pour $r > 0$, on note $B(r)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0 et de rayon r.

1. Exprimer $\lambda_d(B(r))$ en fonction de $\lambda_d(B(1))$.
2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un unique $r(A) \in [0, +\infty]$ tel que $\lambda_d(B(r(A))) = \lambda_d(A)$. On définit alors $A^* = B(r(A))$.
3. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. On définit les *ensembles de niveaux* de f par $L(f, t) := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\}$ pour chaque $t \geq 0$. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{L(f,t)}(x)\, \mathrm{d}t.$$
4. On définit le *réarrangement symétrique* de f, noté f^*, par
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f^*(x) := \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{L(f,t)^*}(x)\, \mathrm{d}t.$$
Montrer que f^* est bien définie et que c'est une fonction borélienne.
5. Quand a-t-on $f = f^*$?
6. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)\, \mathrm{d}x.$$
7. Montrer que $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ pour tout $p \geq 1$.
8. Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\lambda_d(A \cap B) \leq \lambda_d(A^* \cap B^*)$.
9. Quand a-t-on égalité dans l'inégalité précédente ?
10. Soient f, g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x) g^*(x)\, \mathrm{d}x.$$
11. Discuter le cas d'égalité de l'inégalité précédente.

Le DM est à rendre pendant le cours, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 3. Calculez l'intégrale ci-dessous à l'aide d'une série :

$$I = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}\int_{z=0}^{1} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{1-xyz}.$$

Exercice 4. (*Équation de Cauchy*) On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le problème se décompose en quatre parties qui peuvent être traitées indépendamment. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie l'*équation fonctionnelle de Cauchy* :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \tag{$*$}$$

1. (*Préliminaires*) Soit g une fonction borélienne intégrable sur $\mathbb{R}$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) := \int_{[0,x]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Supposons que g est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que G est dérivable.
   (c) Donner un exemple de fonction g qui n'est continue nulle part et telle que G soit dérivable partout.

2. (*Généralités sur f*)
   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(nx) = nf(x).$$

   (b) Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(rx) = rf(x).$$

   (c) Comment pourrait-on décrire f du point de vue de l'algèbre linéaire ?
   (d) Montrer que si f est monotone, alors f est linéaire.
   (e) Montrer que si f est continue, alors f est linéaire.
   (f) Montrer que si f est continue en 0, alors f est linéaire.

3. (*Cas borélien*) Dans toute cette partie, nous supposons que f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de $(*)$ et nous mettons en œuvre une idée de Mark Kac. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) := \mathrm{e}^{if(x)}.$$

   (a) Montrer que la fonction g est Lebesgue intégrable sur tout intervalle compact. Posons alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad F(x,y) = \int_{[x,x+y]} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

   (b) Fixons $y \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de l'application partielle $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x,y)$?
   (c) Montrer qu'il existe une fonction ϕ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad F(x,y) = \phi(y)g(x).$$

   (d) Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(y_0) \neq 0$.
   (e) Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x,y)$ est dérivable.
   (f) En déduire une équation différentielle vérifiée par g et conclure.

4. (*Solutions non linéaires*)
   (a) Que peut-on dire d'une solution de $(*)$ qui ne soit pas linéaire ?
   (b) Construire une solution de $(*)$ qui ne soit pas linéaire.