



Devoir à la maison 3

à rendre avant le 8 novembre



Exercice 1. (Questions de cours)

1. Énoncez le lemme de Fatou.
2. Énoncez le théorème de convergence dominée.
3. Énoncez le théorème de Radon–Nikodym.

Corrigé. Voir votre cours.



Exercice 2. (Réarrangement symétrique) Soit d un entier non nul. On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Pour $r > 0$, on note $B(r)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0 et de rayon r .

1. Exprimer $\lambda_d(B(r))$ en fonction de $\lambda_d(B(1))$.
2. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe un unique $r(A) \in [0, +\infty]$ tel que $\lambda_d(B(r(A))) = \lambda_d(A)$.
On définit alors $A^* = B(r(A))$.
3. Soit f une fonction borélienne de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. On définit les *ensembles de niveaux* de f par $L(f, t) := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > t\}$ pour chaque $t \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{L(f,t)}(x) dt.$$

4. On définit le *réarrangement symétrique* de f , noté f^* , par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f^*(x) := \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{L(f,t)^*}(x) dt.$$

Montrer que f^* est bien définie et que c'est une fonction borélienne.

5. Quand a-t-on $f = f^*$?
6. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x) dx.$$

7. Montrer que $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ pour tout $p \geq 1$.
8. Soient A et B deux boréliens de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $\lambda_d(A \cap B) \leq \lambda_d(A^* \cap B^*)$.
9. Quand a-t-on égalité dans l'inégalité précédente ?
10. Soient f, g deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}^d$ dans $[0, +\infty]$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x) dx.$$

11. Discuter le cas d'égalité de l'inégalité précédente.

Corrigé.

1. On a $\lambda_d(B(r)) = r^d \lambda_d(B(1))$ en utilisant le résultat du cours pour les changements de variable par les fonctions linéaires.
2. Par la question précédente, on a $\lambda_d(B(r)) = r^d \lambda_d(B(1))$ avec $\lambda_d(B(1)) > 0$ donc la fonction $r \in [0, \infty] \mapsto \lambda_d(B(r))$ est strictement croissante et bijective de $[0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$. Donc il existe un unique $r(A) \in [0, +\infty]$ tel que $\lambda_d(B(r(A))) = \lambda_d(A)$.

On peut aussi dire que $r(A) = [\lambda_d(A)/\lambda_d(B(1))]^{1/d}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a, par définition de $L(f, t)$, $\mathbb{1}_{L(f, t)}(x) = \mathbb{1}_{t < f(x)}$ qui est clairement mesurable en t , et donc

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{L(f, t)}(x) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t < f(x)} dt = f(x).$$

4. *Méthode 1.* Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $f^*(x)$ est bien défini car $t \mapsto \mathbb{1}_{L(f, t)^*}(x) = \mathbb{1}_{|x| < r(L(f, t))}$ est décroissante (car les ensembles $L(f, t)$ sont décroissants en t) donc mesurable (car l'image réciproque d'un intervalle est un intervalle) et positive. En outre, en utilisant de nouveau la décroissance, on a

$$f^*(x) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{|x| < r(L(f, t))} dt = \inf\{t \geq 0 : |x| \geq r(L(f, t))\},$$

et donc on a les équivalences suivantes pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$,

$$f^*(x) > t \Leftrightarrow |x| < r(L(f, t)) \Leftrightarrow x \in B(0, r(L(f, t))),$$

ce qui donne $\{f^* > t\} = B(0, r(L(f, t))) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $t \geq 0$. Donc f^* est mesurable car les $]t, \infty]$ engendrent $\mathcal{B}([0, \infty])$. Notons pour la suite que l'on a montré au passage que

$$\forall t \geq 0, \quad L(f^*, t) = L(f, t)^*. \quad (1)$$

Méthode 2. Montrons que la fonction

$$\varphi : (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty] \mapsto \mathbb{1}_{L(f, t)^*}(x) = \mathbb{1}_{|x| < r(L(f, t))}$$

est mesurable. Alors, par le théorème de Fubini-Tonelli, on obtiendra que f^* est bien définie et mesurable de $\mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$. La fonction $h : t \in [0, \infty] \mapsto r(L(f, t))$ est décroissante donc mesurable. Alors φ est la composée entre les deux fonctions mesurables $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty] \mapsto (|x|, h(t)) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \infty]$ (mesurable car l'image réciproque d'un produit de boréliens est un produit de boréliens) et $\mathbb{1}_{\{(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times [0, \infty] : a < b\}}$ (mesurable car indicatrice d'un ouvert). Ainsi φ est bien mesurable.

5. Commençons par étudier la fonction f^* en toute généralité. Rappelons que

$$f^*(x) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{|x| < r(L(f, t))} dt,$$

donc il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$ définie par

$$\forall a \geq 0, \quad \psi(a) := \int_0^\infty \mathbb{1}_{a < r(L(f, t))} dt, \quad (2)$$

telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d, f^*(x) = \psi(|x|)$. En outre, on remarque que ψ est décroissante. Enfin, montrons que ψ est continue à droite : soit $a \geq 0$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante telle que $a_n \rightarrow a$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+, \mathbb{1}_{a_n < r(L(f, t))} \rightarrow \mathbb{1}_{a < r(L(f, t))}$ en croissant (et est positive) donc par le théorème de convergence monotone, on obtient $\psi(a_n) \rightarrow \psi(a)$.

Considérons à présent $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$ décroissante continue à droite. On définit alors

$$\varphi^{-1} : t \in [0, \infty] \mapsto \sup\{a \geq 0 : \varphi(a) > t\},$$

où l'on adopte la convention $\sup \emptyset = 0$. Alors montrons que, pour tout $a \geq 0$ et $t \in [0, \infty]$, on a

$$\varphi(a) > t \Leftrightarrow a < \varphi^{-1}(t). \quad (3)$$

Supposons $\varphi(a) > t$, alors par continuité à droite, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(a + \varepsilon) > t$ et alors on a $\varphi^{-1}(t) \geq a + \varepsilon > a$. Supposons maintenant $a < \varphi^{-1}(t)$, alors il existe $b \in]a, \varphi^{-1}(t)[$ tel que $\varphi(b) > t$ et donc par décroissance de φ , on a $\varphi(a) > t$.

Nous pouvons maintenant répondre à la question : montrons que

$$f = f^* \Leftrightarrow \exists \varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty] \text{ décroissante continue à droite, } \forall x \in \mathbb{R}^d, f(x) = \varphi(|x|).$$

Le sens direct découle de l'observation faite sur f^* au début de la question. Montrons la réciproque : supposons qu'il existe une fonction $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, \infty]$ décroissante continue à droite telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d, f(x) = \varphi(|x|)$. Alors, on a $L(f, t) = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(|x|) > t\} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < \varphi^{-1}(t)\}$, par (3). Donc $L(f, t) = B(\varphi^{-1}(t))$ et ainsi $r(L(f, t)) = \varphi^{-1}(t)$. Cela nous donne

$$f^*(x) = \int_0^\infty \mathbb{1}_{|x| < \varphi^{-1}(t)} dt = \int_0^\infty \mathbb{1}_{\varphi(|x|) > t} dt = \varphi(|x|) = f(x)$$

et ainsi $f = f^*$.

6. On a, par la question 3. et Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{L(f, t)}(x) dx dt = \int_0^\infty \lambda_d(L(f, t)) dt \\ &= \int_0^\infty \lambda_d(L(f, t)^*) dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{L(f, t)^*}(x) dx dt = \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x) dx, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $\lambda_d(L(f, t)) = \lambda_d(L(f, t)^*)$ puis de nouveau Fubini-Tonelli.

7. On procède tout d'abord comme à la question 3. : pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$f(x)^p = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t < f(x)^p} dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{t^{1/p} < f(x)} dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{L(f, t^{1/p})}(x) dt.$$

Puis, comme à la question 6., par Fubini-Tonelli, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^p dx = \int_0^{+\infty} \lambda(L(f, t^{1/p})) dx dt. \quad (4)$$

On s'est ramené à quelque chose qui ne dépend que de la mesure des ensembles de niveau de f . Mais, en appliquant (4) à f^* , on a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)^p dx = \int_0^{+\infty} \lambda(L(f^*, t^{1/p})) dx dt.$$

Or par (1), on a $L(f^*, t^{1/p}) = L(f, t^{1/p})^*$ et donc $\lambda(L(f^*, t^{1/p})) = \lambda(L(f, t^{1/p})^*) = \lambda(L(f, t^{1/p}))$ (par définition de $L(f, t^{1/p})^*$). On obtient donc le résultat attendu.

Remarque. On peut en fait remplacer $x \mapsto x^p$ par n'importe quelle fonction croissante $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ et on aura

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f^*(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f(x)) dx.$$

8. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\lambda(A) \leq \lambda(B)$. Alors $r(\lambda(A)) \leq r(\lambda(B))$ donc $A^* \subset B^*$ et ainsi, $\lambda(A^* \cap B^*) = \lambda(A^*) = \lambda(A) \geq \lambda(A \cap B)$.

9. Par ce qui précède, on a $\lambda(A^* \cap B^*) = \lambda(A \cap B)$ si et seulement si $\lambda(A) \wedge \lambda(B) = \lambda(A \cap B)$.

1^{er} cas. Supposons $\lambda(A \cap B) < \infty$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \lambda(A^* \cap B^*) = \lambda(A \cap B) &\Leftrightarrow (\lambda(A) = \lambda(A \cap B) \text{ ou } \lambda(B) = \lambda(A \cap B)) \\ &\Leftrightarrow (\lambda(A \cap B^c) = 0 \text{ ou } \lambda(A^c \cap B) = 0), \end{aligned}$$

où l'on utilise que $\lambda(A \cap B) < \infty$. Donc, on a $\lambda(A^* \cap B^*) = \lambda(A \cap B)$ si et seulement si A ou B est inclus dans l'autre à un ensemble de mesure nulle près.

2^e cas Supposons $\lambda(A \cap B) = \infty$. Alors l'égalité est toujours vraie et on ne peut plus rien dire sur A et B . Par exemple, si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in [2n, 2n+1[\}$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \in [3n, 3n+1[\}$ alors on a $\lambda(A \cap B) = \infty = \lambda(A^* \cap B^*)$, mais aucun n'est inclus dans l'autre à un ensemble de mesure nulle près.

10. Par définition de f^* et g^* , puis par Fubini-Tonelli, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{L(f,t)^*}(x) dt \right) \left(\int_0^\infty \mathbb{1}_{L(g,s)^*}(x) ds \right) dx \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{L(f,t)^*}(x) \mathbb{1}_{L(g,s)^*}(x) dx ds dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda(L(f,t)^* \cap L(g,s)^*) ds dt \end{aligned}$$

Puis, par la question 8., on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x) dx \leq \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda(L(f,t) \cap L(g,s)) ds dt = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) dx,$$

en procédant de la même manière (avec la question 3.).

11. Par le calcul précédent, on a égalité si et seulement si

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda(L(f,t)^* \cap L(g,s)^*) ds dt = \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda(L(f,t) \cap L(g,s)) ds dt. \quad (5)$$

Comme à la question 9., on va devoir distinguer deux cas.

1^{er} cas. Supposons que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) dx < \infty$. Plaçons nous tout d'abord dans le cas d'égalité (donc (5) est vraie). Alors, on a aussi

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \lambda(L(f,t) \cap L(g,s)) ds dt < \infty$$

et donc, par (5),

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\lambda(L(f,t)^* \cap L(g,s)^*) - \lambda(L(f,t) \cap L(g,s))) ds dt = 0.$$

Or $\lambda(L(f,t)^* \cap L(g,s)^*) - \lambda(L(f,t) \cap L(g,s)) \geq 0$ par la question 8., donc on obtient

$$\text{pour presque tout } (t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \lambda(L(f,t)^* \cap L(g,s)^*) = \lambda(L(f,t) \cap L(g,s)).$$

D'après la question 9., on en déduit que

$$\text{pour presque tout } (t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \begin{cases} \lambda(L(f,t) \setminus L(g,s)) = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda(L(g,s) \setminus L(f,t)) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Montrons que l'on peut se passer du "pour presque tout $(t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2$ ". Soit $(t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2$. On a

$$L(f,t) = \{f > t\} = \bigcup_{t' > t} L(f,t') \quad \text{et} \quad L(g,s) = \bigcup_{s' > s} L(g,s')$$

L'ensemble des (t,s) qui vérifient l'un des deux cas de (6) est de mesure pleine donc est dense dans $(\mathbb{R}_+)^2$ (un ensemble de λ -mesure nulle est d'intérieur vide!), donc il existe une suite $(t_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in ((\mathbb{R}_+)^2)^{\mathbb{N}}$ telle que $t_n \downarrow t$, $s_n \downarrow s$ et

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda(L(f,t_n) \setminus L(g,s_n)) = 0 \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda(L(g,s_n) \setminus L(f,t_n)) = 0. \end{cases}$$

Supposons sans perte de généralité que $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda(L(f, t_n) \setminus L(g, s_n)) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} L(f, t) \setminus L(g, s) &= L(f, t) \cap L(g, s)^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L(f, t_n) \right) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} L(g, s_n)^c \right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(L(f, t_n) \cap \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} L(g, s_k)^c \right) \right) \\ &\subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (L(f, t_n) \cap L(g, s_n)^c), \end{aligned}$$

qui est de mesure nulle, comme union dénombrable d'ensembles de mesure nulle. On a donc montré que

$$\forall (t, s) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \begin{cases} \lambda(L(f, t) \setminus L(g, s)) = 0 \\ \text{ou} \\ \lambda(L(g, s) \setminus L(f, t)) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Réciproquement, si (7) est vérifiée, on a pour tout $(t, s) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\lambda(L(f, t)^* \cap L(g, s)^*) = \lambda(L(f, t) \cap L(g, s))$, donc (5) est vérifiée et donc

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x)g^*(x)dx.$$

Un exemple assez général de fonctions vérifiant (7) et donc l'égalité peut être obtenu de la manière suivante. Soit f_0 et g_0 des fonctions telles que $f_0^* = f_0$ et $g_0^* = g_0$ (caractérisées à la question 5.) alors elles vérifient (7) et même la version plus forte suivante

$$\forall (t, s) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \begin{cases} L(f_0, t) \subset L(g_0, s) \\ \text{ou} \\ L(g_0, s) \subset L(f_0, t). \end{cases} \quad (8)$$

car leurs ensembles de niveaux sont des boules ouvertes centrées en 0. Ensuite, pour toute fonction $\Psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, on peut définir $f = f_0 \circ \Psi$ et $g = g_0 \circ \Psi$. Alors, $L(f, t) = \Psi^{-1}(L(f_0, t))$ donc f et g vérifient aussi (8) et donc (7). On peut ensuite les modifier arbitrairement sur un ensemble de mesure nulle et elles vérifieront toujours (7) (mais plus (8)). Ça ne me semble pas clair que ce sont les seules solutions...

2^e cas. Supposons que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx = \infty$. Alors l'égalité est toujours vraie. On ne peut rien dire de plus sur les fonctions f et g : il y a plein de couples (f, g) qui vérifient cette hypothèse (il suffit par exemple que f et g soit minorée par une constante strictement positive), pour lesquelles les ensembles de niveaux respectifs ne sont pas inclus dans l'un ou dans l'autre à un ensemble de mesure près.



Exercice 3. Calculez l'intégrale ci-dessous à l'aide d'une série :

$$I = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \int_{z=0}^1 \frac{dx dy dz}{1 - xyz}.$$

Corrigé. On utilise le développement en série entière, pour $x, y, z \in [0, 1[$,

$$\frac{1}{1 - xyz} = \sum_{n \geq 0} (xyz)^n.$$

Par le théorème de Fubini pour les fonctions positives, on peut sortir la somme et calculer les intégrales dans l'ordre que l'on veut et on obtient

$$I = \sum_{n \geq 0} \left(\int_{x=0}^1 x^n dx \right) \left(\int_{y=0}^1 y^n dy \right) \left(\int_{z=0}^1 z^n dz \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^3} = \zeta(3).$$

Si vous avez une forme explicite pour I , c'est louche !



Exercice 4. (*Équation de Cauchy*) On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Le problème se décompose en quatre parties qui peuvent être traitées indépendamment. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \quad (*)$$

1. (*Préliminaires*) Soit g une fonction borélienne intégrable sur $\mathbb{R}$. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) := \int_{[0,x]} g(t) dt.$$

- (a) Montrer que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Supposons que g est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que G est dérivable.
 - (c) Donner un exemple de fonction g qui n'est continue nulle part et telle que G soit dérivable partout.
2. (*Généralités sur f*)

- (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(nx) = nf(x).$$

- (b) Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(rx) = rf(x).$$

- (c) Comment pourrait-on décrire f du point de vue de l'algèbre linéaire ?
 - (d) Montrer que si f est monotone, alors f est linéaire.
 - (e) Montrer que si f est continue, alors f est linéaire.
 - (f) Montrer que si f est continue en 0, alors f est linéaire.
3. (*Cas borélien*) Dans toute cette partie, nous supposons que f est une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de (*) et nous mettons en œuvre une idée de Mark Kac. Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) := e^{if(x)}.$$

- (a) Montrer que la fonction g est Lebesgue intégrable sur tout intervalle compact. Posons alors

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \int_{[x, x+y]} g(u) du.$$

- (b) Fixons $y \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de l'application partielle $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, y)$?
- (c) Montrer qu'il existe une fonction ϕ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad F(x, y) = \phi(y)g(x).$$

- (d) Montrer qu'il existe $y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(y_0) \neq 0$.
 - (e) Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, y)$ est dérivable.
 - (f) En déduire une équation différentielle vérifiée par g et conclure.
4. (*Solutions non linéaires*)
- (a) Que peut-on dire d'une solution de (*) qui ne soit pas linéaire ?
 - (b) Construire une solution de (*) qui ne soit pas linéaire.

Corrigé.

1. La définition de G n'est pas très claire dans l'énoncé pour $x < 0$. Pour que la question 1.(b) soit correcte, on suppose que la définition est

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) := \int_0^x g(t) dt,$$

ce qui veut dire que, pour $x < 0$, on a

$$G(x) = - \int_{[x,0]} g(t) dt.$$

Cependant, on notera $[0, x] = [x, 0]$ dans ce cas (ce qui contredit la définition de G dans l'énoncé).

- (a) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_n \rightarrow x$. On a

$$|G(x) - G(x_n)| \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{t \in [x, x_n]} |g(t)| dt.$$

Or $\mathbb{1}_{t \in [x, x_n]} |g(t)| \rightarrow 0$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$ (en fait pour $t \neq x$) et on peut dominer par $|g|$ intégrable. Donc, par convergence dominée, $|G(x) - G(x_n)| \rightarrow 0$ et G est donc continue.

- (b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. On a

$$\left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - g(x) \right| \leq \int_x^{x+h} \frac{1}{h} |g(t) - g(x)| dt = \int_0^1 |g(x+uh) - g(x)| du$$

Mais, pour tout $u \in [0, 1]$, on a $|g(x+uh) - g(x)| \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$ (car g continue) et également $|g(x+uh) - g(x)| \leq 2 \sup_{[x, x+h]} |g|$ intégrable sur $[0, 1]$ car fini (car g continue). Par convergence dominée, on obtient

$$\left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - g(x) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

et donc G est dérivable en x de dérivée g .

- (c) On peut prendre $g = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

- 2.(a) Avec $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. Cela traite le cas $n = 0$. On procède alors par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}$, si $f(nx) = nf(x)$, alors $f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$.

- (b) Notons tout d'abord que $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, donc $f(-x) = -f(x)$, ce qui permet d'étendre la question précédente à tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a $f(q(x/q)) = qf(x/q)$ par la question précédente, donc $f(x/q) = f(x)/q$. Puis $f(rx) = f(p(x/q)) = pf(x/q) = pf(x)/q = rf(x)$.

- (c) La fonction f est $\mathbb{Q}$ -linéaire du $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}$ dans lui-même. En effet, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x) + f(\mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

en utilisant (*) puis 2.(b).

- (d) Traitons le cas f croissante. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$, il existe $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ des suites de rationnels convergeant vers x par valeurs inférieures et supérieures respectivement. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n f(1) = f(r_n) \leq f(x) \leq f(s_n) = s_n f(1)$. Avec $n \rightarrow \infty$, on obtient $f(x) = xf(1)$ ce qui conclut. Pour f décroissante, on applique ce qui précède à $-f$.

- (e) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $r_n f(1) = f(r_n)$. En prenant $n \rightarrow \infty$, on obtient $xf(1) = f(x)$ par continuité de f .

- (f) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) - r_n f(1) = f(x - r_n)$. En prenant $n \rightarrow \infty$, on obtient $f(x) - xf(1) = f(0)$ par continuité de f en 0. Cela conclut car $f(0) = 0$.

- 3.(a) La fonction g est mesurable comme composée de fonctions mesurables et intégrable sur tout intervalle compact car bornée.

- (b) On sait que l'application partielle $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, y)$ est continue par la question 1.(a), en l'écrivant comme différence de deux intégrales.
- (c) En utilisant le changement de variables $v = u - x$, on a

$$F(x, y) = \int_{[x, x+y]} g(u) du = \int_{[0, y]} g(v+x) dv = g(x) \int_{[0, y]} g(v) dv,$$

en notant que $g(v+x) = g(v)g(x)$. On peut donc conclure avec $\phi(y) = F(0, y)$.

- (d) Supposons que $F = 0$. Alors, pour tout $a < b$, on a g intégrable sur $[a, b]$ et $\int_{[a, b]} g d\lambda = 0$. Mais on a vu à l'exercice 2 du TD 3 que cela implique que $g = 0$ λ -p.p. (en appliquant à la partie réelle puis à la partie imaginaire de g) alors que $|g| = 1$: c'est absurde. Donc il existe $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tel que $F(x_0, y_0) \neq 0$. Comme $F(x_0, y_0) = g(x_0)\phi(y_0)$, on en déduit que $\phi(y_0) \neq 0$.
- (e) Soit y_0 tel que $\phi(y_0) \neq 0$. Alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F(x, y_0)/\phi(y_0)$ et ainsi g est continue par la question 3.(b). Mais alors par la question 1.(b), on obtient que $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x, y)$ est dérivable, pour tout $y \in \mathbb{R}$.
- (f) Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = F(x, y_0)/\phi(y_0)$, on en déduit que g est dérivable. En dérivant par rapport à x , on obtient

$$g'(x) = \frac{g(x+y_0) - g(x)}{\phi(y_0)} = g(x) \frac{g(y_0) - 1}{\phi(y_0)}.$$

De cette équation différentielle et du fait que $g(0) = 1$, on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \exp\left(\frac{g(y_0) - 1}{\phi(y_0)} x\right).$$

Comme $|g| = 1$, on a $(g(y_0) - 1)/\phi(y_0) = i\theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(if(x)) = \exp(i\theta x)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ (dépendant de x) tel que $f(x) = \theta x + 2k\pi$. Supposons $k \neq 0$, alors on a

$$\exp(i\theta x/2k) = \exp(if(x/2k)) = \exp(if(x)/2k) = \exp(i(\theta x + 2k\pi)/2k) = -\exp(i\theta x/2k),$$

ce qui est absurde. Donc $f(x) = \theta x$ et f est linéaire.

- 4.(a) Il faut qu'elle soit non mesurable. Et discontinue partout.

Pour expliciter un peu plus pourquoi cette fonction ne doit pas être commode, on pouvait aussi montrer que son graphe doit être dense dans $\mathbb{R}^2$ (ce qui est équivalent au fait que l'image de tout intervalle non vide par f est dense dans $\mathbb{R}$). En effet, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq af(1)$ et montrons tout d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, $f([- \varepsilon, \varepsilon])$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $r_n \rightarrow a$, on a alors $f(a - r_n) \rightarrow f(a) - af(1) \neq 0$. Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$ à approcher. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ tel que $s_n \rightarrow y/[f(a) - af(1)]$, on a alors $f(s_n(a - r_n)) = s_n f(a - r_n) \rightarrow y$. Mais $s_n(a - r_n) \rightarrow 0$ donc appartient à $[- \varepsilon, \varepsilon]$ à partir d'un certain rang, ce qui montre que $f([- \varepsilon, \varepsilon])$ est dense dans $\mathbb{R}$. Maintenant, montrons que le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$: considérons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ à approcher à $\varepsilon > 0$ près. Par ce qui précède, il existe $h \in [- \varepsilon, \varepsilon]$ tel que $|f(h) + f(x) - y| \leq \varepsilon$. Alors $(x+h, f(x+h))$ approche (x, y) à ε près pour la norme infinie.

- (b) Soit $(x_i)_{i \in I}$ une base de $\mathbb{R}$ en tant que $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel (pour cela, on a besoin de l'axiome du choix : on ne peut pas construire f explicitement). Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels quelconques. Alors, on définit f comme l'application $\mathbb{Q}$ -linéaire qui à x_i associe a_i . Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, il existe une unique écriture $x = \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} x_{i_k}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$ et $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n} \in \mathbb{Q}^*$, et on a

$$f(x) := \sum_{k=1}^n \lambda_{i_k} a_{i_k}.$$

Alors, par construction, f vérifie (*). Cependant, f est $\mathbb{R}$ -linéaire si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $i \in I$, $a_i = ax_i$. Dans tous les autres cas, f n'est pas linéaire (on peut prendre par exemple $a_{i_0} = 1$ et, pour tout $i \in I \setminus \{i_0\}$, $a_i = 0$).

