Devoir à la maison 2

à rendre avant le 22 octobre

Exercice 1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n := \int_0^\infty \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. (*Fonction de répartition et intégrale de Stieljes*)

1. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on définit sa *fonction de répartition*, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_\mu(x) := \mu(]-\infty, x]).$$

   Montrer que F_μ est croissante, bornée, continue à droite et que $F_\mu(-\infty) = 0$ (c'est-à-dire $F_\mu(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$).

2. Réciproquement, soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, bornée, continue à droite et telle que $F_\mu(-\infty) = 0$.
   (a) On pose pour tout $A \subset \mathbb{R}$,

$$\mu^*(A) := \inf\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} (F(b_i) - F(a_i)) : \forall i \in \mathbb{N}, a_i \leq b_i \text{ et } A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i, b_i] \right\}.$$

   Montrer que μ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$.
   (c) En déduire qu'il existe μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $F = F_\mu$.
   (d) Montrer qu'une telle mesure μ est unique.

Remarque. Pour $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, bornée, continue à droite et telle que $F_\mu(-\infty) = 0$, on note parfois $\int f(x)\,\mathrm{d}F := \int f\,\mu(\mathrm{d}x)$, où μ est la mesure telle que $F = F_\mu$. C'est l'*intégrale de Stieljes* par rapport à F. En particulier, elle vérifie, pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b]} \mathrm{d}F = F(b) - F(a) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \mathrm{d}F = F(b) - F(a-),$$

où $F(a-) := \lim_{x\to a-} F(x)$ est bien définie car F croissante.

Exercice 3. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $n^{-\alpha} f(nx) \to 0$ quand $n \to \infty$.
Indication. On pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli montré dans le TD 1.

Le DM est à rendre pendant le cours du lundi, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 4. (*Critère de Lebesgue pour la Riemann-intégrabilité*) Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ bornée. L'objectif de cet exercice est de montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si elle est continue presque partout (c'est-à-dire l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure de Lebesgue nulle) et de se servir de ce critère pour construire des exemples de fonctions non-Riemann-intégrables et montrer qu'une fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable.

Rappel. On définit les intégrales de Darboux supérieure et inférieure par

$$\overline{\int_0^1} f := \inf_{\text{subdiv. } (x_i)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \qquad \text{et} \qquad \underline{\int_0^1} f := \sup_{\text{subdiv. } (x_i)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

où les bornes inférieure et supérieure ont lieu sur tous les entiers $n \geq 1$ et toutes les subdivisions $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0,1]$. La fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si les deux intégrales de Darboux sont égales.

1. Pour $x \in [0,1]$, on définit l'*oscillation* de f en x par

$$\mathrm{Osc}_f(x) := \lim_{h \to 0^+} \left(\sup_{[x-h, x+h] \cap [0,1]} f - \inf_{[x-h, x+h] \cap [0,1]} f \right)$$

   et, pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$X_\varepsilon := \left\{ x \in [0,1] : \mathrm{Osc}_f(x) \geq \varepsilon \right\},$$

   l'ensemble des points où f a une oscillation plus grande que ε.

   (a) Montrer que $\mathrm{Osc}_f(x)$ est bien définie.

   (b) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est mesurable (même si f n'est pas supposée mesurable).

2. Supposons que f est Riemann-intégrable.

   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\overline{\int_0^1} f - \underline{\int_0^1} f \geq \lambda(X_\varepsilon)\varepsilon.$$

   (b) En déduire que f est continue presque partout.

3. Supposons que f est continue presque partout.

   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe un nombre fini d'intervalles ouverts disjoints $I_1, \ldots, I_n$ tels que

$$X_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i) \leq \eta.$$

   (b) En déduire que f est Riemann-intégrable.

4. (a) Trouver une fonction bornée Lebesgue-intégrable mais pas Riemann-intégrable.

   (b) Montrer que si f est Riemann-intégrable, alors $f\colon ([0,1], \overline{\mathcal{B}}([0,1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, où $\overline{\mathcal{B}}([0,1])$ est la tribu de Lebesgue sur $[0,1]$. En déduire que f est Lebesgue-intégrable.

   (c) (✯) Trouver une fonction $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[0,1]$ de sorte que sa dérivée F' soit bornée mais pas Riemann-intégrable.

   Indication. On pourra se servir des ensembles de Cantor introduits au TD 3.

   Remarque. Cela montre que le théorème fondamental de l'analyse montré au TD 3 pour l'intégrale de Lebesgue est strictement meilleur que son analogue pour l'intégrale de Riemann.