Devoir à la maison 2

à rendre avant le 22 octobre

Exercice 1. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_n := \int_0^\infty \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t.$$

Corrigé. On écrit

$$u_n = \int_0^1 \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \mathrm{d}t =: I_n + J_n$$

et on étudie séparément les deux intégrales I_n et J_n.
Pour la première, on remarque que, pour $t \in]0,1[$, on a la convergence

$$\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1+t} \mathbb{1}_{t\in]0,1[},$$

en étant dominée en valeur absolue par $1/(1+t)$, qui est une fonction intégrable sur $]0,1[$ indépendante de n. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,

$$I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+t} \mathrm{d}t = \ln(2).$$

Pour la seconde, pour $n \geq 1$, on remarque que, pour $t \in]1,\infty[$, on a la convergence

$$\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

en étant dominée en valeur absolue par $\frac{1}{t(1+t)}$, qui est une fonction intégrable sur $]1,\infty[$ indépendante de n. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $J_n \to 0$.
On en conclut que $u_n \to \ln(2)$.
Remarque. Le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ découle des hypothèses de domination.

Exercice 2. (*Fonction de répartition et intégrale de Stieljes*)

1. Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on définit sa *fonction de répartition*, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$F_\mu(x) := \mu(]-\infty, x]).$$

   Montrer que F_μ est croissante, bornée, continue à droite et que $F_\mu(-\infty) = 0$ (c'est-à-dire $F_\mu(x) \to 0$ quand $x \to -\infty$).

2. Réciproquement, soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, bornée, continue à droite et telle que $F_\mu(-\infty) = 0$.
   (a) On pose pour tout $A \subset \mathbb{R}$,

$$\mu^*(A) := \inf\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} (F(b_i) - F(a_i)) : \forall i \in \mathbb{N}, a_i \leq b_i \text{ et } A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i, b_i] \right\}.$$

   Montrer que μ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.

Le DM est à rendre pendant le cours du lundi, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

(b) Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(\mu^*)$.

(c) En déduire qu'il existe μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $F = F_\mu$.

(d) Montrer qu'une telle mesure μ est unique.

Remarque. Pour $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, bornée, continue à droite et telle que $F_\mu(-\infty) = 0$, on note parfois $\int f(x)\,\mathrm{d}F := \int f \mu(\mathrm{d}x)$, où μ est la mesure telle que $F = F_\mu$. C'est l'*intégrale de Stieljes* par rapport à F. En particulier, elle vérifie, pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b]} \mathrm{d}F = F(b) - F(a) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \mathrm{d}F = F(b) - F(a-),$$

où $F(a-) := \lim_{x \to a-} F(x)$ est bien définie car F croissante.

Corrigé.

1. F_μ est croissante par croissance de la mesure et bornée car $0 \leq F \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante convergeant vers x, on a

$$F(x) = \mu(]-\infty, x]) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, y_n]\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(]-\infty, y_n]) = \lim_{n\to\infty} F(y_n),$$

car l'intersection est décroissante et μ est finie. Ainsi F est continue à droite. De nouveau par continuité décroissante (car μ finie), on a, pour $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante tendant vers $-\infty$,

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(]-\infty, y_n]) = \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, y_n]\right) = \mu(\emptyset) = 0,$$

donc $F(-\infty) = 0$.

2.(a) On procède de la même manière que pour la construction de la mesure de Lebesgue.

- ▷ Comme F est croissante, μ est à valeurs positives.
- ▷ En prenant $a_i = b_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- ▷ Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$, alors tout recouvrement de B est un recouvrement de A donc $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
- ▷ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, il existe un recouvrement $A_n \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i^n, b_i^n]$ tel que

$$\mu^*(A_n) \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} (F(b_i^n) - F(a_i^n)) - \varepsilon 2^{-n}.$$

Alors on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i^n, b_i^n]$ qui reste un recouvrement dénombrable et donc

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} (F(b_i^n) - F(a_i^n)) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} (\mu^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}) = 2\varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n),$$

ce qui montre que μ^* est σ-sous-additive avec $\varepsilon \to 0$.

(b) La démarche ressemble aussi à la construction de la mesure de Lebesgue, mais ici c'est même un peu plus simple. On sait que $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une tribu par le cours. Il suffit donc de montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $]-\infty, x] \in \mathcal{M}(\mu^*)$. Soit $A \subset \mathbb{R}$, montrons que $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap]-\infty, x]) + \mu^*(A \cap]x, \infty[)$. Tout d'abord, par σ-sous-additivité de μ^*, on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap]-\infty, x]) + \mu^*(A \cap]x, \infty[)$. Montrons l'autre inégalité.
Si $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i, b_i]$ avec $a_i \leq b_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors on a

$$A \cap]-\infty, x] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i \wedge x, b_i \wedge x] \quad \text{et} \quad A \cap]x, \infty[\subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i \vee x, b_i \vee x]$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\mu^*(A\cap]-\infty,x])+\mu^*(A\cap]x,\infty[) &\leq \sum_{i\in\mathbb{N}} F(b_i\wedge x)-F(a_i\wedge x)+\sum_{i\in\mathbb{N}} F(b_i\vee x)-F(a_i\vee x)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} F(b_i)-F(a_i),\end{aligned}$$

en séparant les trois cas $x < a_i$, $a_i \leq x < b_i$ et $b_i \leq x$. En prenant la borne inférieure sur tous les recouvrements de A, on obtient $\mu^*(A) \geq \mu^*(A\cap]-\infty,x]) + \mu^*(A\cap]x,\infty[)$, ce qui conclut la démonstration.

(c) On note μ la restriction de μ^* à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ qui est une mesure (par le cours, la restriction de μ^* à $\mathcal{M}(\mu^*)$ est une mesure).

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$. Il est immédiat que $\mu(]a,b])\leq F(b)-F(a)$. Soit $\varepsilon>0$, on va montrer que $\mu(]a,b])\geq F(b)-F(a+\varepsilon)-2\varepsilon$. Considérons un recouvrement de $]a,b]\subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i,b_i]$ avec $a_i\leq b_i$ pour tout $i\in\mathbb{N}$. Par continuité à droite de F, pour chaque $i\in\mathbb{N}$, il existe $b_i'>b_i$ tel que $F(b_i')\leq F(b_i)+\varepsilon 2^{-i}$. Alors on a le recouvrement du compact $[a+\varepsilon,b]$ par la famille d'ouverts $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}]a_i,b_i'[$, dont on peut extraire le sous-recouvrement fini $\bigcup_{i=0}^N]a_i,b_i'[$. On peut réordonner les $N+1$ premiers intervalles de sorte que $i\in[\![0,N]\!]\mapsto a_i$ soit croissante. Quitte à réordonner de nouveau les intervalles et réduire N, on peut supposer qu'il n'existe pas $0\leq i<j\leq N$ tels que $]a_j,b_j'[\subset]a_i,b_i'[$ et aussi que $\bigcup_{i=0}^N]a_i,b_i'[$ est un intervalle (dans le cas contraire, au moins l'un des $]a_i,b_i'[$ est disjoint de $[a+\varepsilon,b]$, donc on peut le supprimer). Alors on a $b_i'\geq a_{i+1}$ pour tout $0\leq i\leq N-1$ et donc, par croissance de F,

$$\sum_{i=0}^{N} F(b_i')-F(a_i)\geq\sum_{i=0}^{N-1} F(a_{i+1})-F(a_i)+F(b_N')-F(a_N)=F(b-N')-F(a_0)\geq F(b)-F(a+\varepsilon),$$

car $a_0<a+\varepsilon$ et $b_N'>b$. Ainsi, on obtient (car pour tout $i\in\mathbb{N}$, $F(b_i')-F(a_i)\geq 0$)

$$F(b)-F(a+\varepsilon)\leq\sum_{i=0}^{N} F(b_i')-F(a_i)\leq\sum_{i\in\mathbb{N}} F(b_i')-F(a_i)\leq 2\varepsilon+\sum_{i\in\mathbb{N}} F(b_i)-F(a_i).$$

En prenant la borne inférieure sur tous les recouvrements de $]a,b]$, on a donc $F(b)-F(a+\varepsilon)\leq 2\varepsilon+\mu(]a,b])$, ce qui donne $F(b)-F(a)\leq\mu(]a,b])$ en faisant tendre $\varepsilon\to 0$ et en utilisant de nouveau la continuité à droite de F. On a donc montré que $\mu(]a,b])=F(b)-F(a)$.

Comme F est bornée, on a

$$\mu(\mathbb{R})=\lim_{n\to\infty}\uparrow\mu([-n,n])=\lim_{n\to\infty}\uparrow F(n)-F(-n)\leq 2\|F\|_\infty<\infty,$$

donc μ est finie. Enfin, pour $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\mu(]-\infty,x])=\lim_{n\to\infty}\uparrow\mu(]-n,x])=\lim_{n\to\infty}\uparrow F(x)-F(-n)=F(x),$$

car $F(-\infty)=0$. Donc $F=F_\mu$.

(d) Soient μ et ν des mesures finies telles que $F=F_\mu=F_\nu$. L'ensemble $\mathcal{C}:=\{]-\infty,x]:x\in\mathbb{R}\}$ est stable par intersection finie et engendre la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mu(]-\infty,x])=F(x)=\nu(]-\infty,x])$. Enfin, F étant croissante bornée, elle admet une limite finie $F(\infty):=\lim_{x\to\infty}F(x)$, donc on a

$$\mu(\mathbb{R})=\lim_{n\to\infty}\uparrow\mu(]-\infty,n])=\lim_{n\to\infty}\uparrow F(n)=F(\infty)$$

et de même $\nu(\mathbb{R})=F(\infty)$. Donc $\mu(\mathbb{R})=\nu(\mathbb{R})<\infty$ et par le théorème d'unicité des mesures finies, on obtient $\mu=\nu$ sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue et $\alpha > 0$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $n^{-\alpha} f(nx) \to 0$ quand $n \to \infty$.
Indication. On pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli montré dans le TD 1.

Corrigé. Pour $\eta > 0$ et $n \geq 1$, on pose

$$A_{\eta,n} := \{x \in \mathbb{R} : n^{-\alpha} |f(nx)| > \eta\} = \frac{1}{n}\{y \in \mathbb{R} : n^{-\alpha}|f(y)| > \eta\}.$$

Alors, on a tout d'abord

$$\lambda(A_{\eta,n}) = \frac{1}{n}\lambda(\{y \in \mathbb{R} : |f(y)| > \eta n^{\alpha}\}),$$

car pour tous $r \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\lambda(rA) = r\lambda(A)$ (voir la remarque 2 ci-dessous). Ensuite, par l'inégalité de Markov (vue au TD 2), on a

$$\lambda(A_{\eta,n}) \leq \frac{1}{n}\frac{1}{\eta n^{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |f| \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\frac{1}{\eta} \int_{\mathbb{R}} |f| \mathrm{d}\lambda.$$

Ainsi, la série de terme général $\lambda(A_{n,\eta})$ est sommable. D'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} A_{\eta,n}\right) = 0.$$

On a donc montré que, pour tout $\eta > 0$, pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\limsup_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) \leq \eta$. Ainsi, pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\limsup_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) \leq 1/p$ ce qui signifie que pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} f(nx) = 0$.
Remarque 1. Il n'est bien sûr pas possible d'échanger l'ordre de "pour tout $\eta > 0$" et de "pour λ-presque tout $x \in \mathbb{R}$" en général et il faut se ramener à un "pour tout" dénombrable.
Remarque 2. Montrons que, pour tous $r \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a $\lambda(rA) = r\lambda(A)$. Une première méthode est de repasser par la définition de la mesure de Lebesgue par recouvrement par des intervalles. Une deuxième méthode est de noter $\mu(A) := \lambda(rA)$ et $\nu(A) := r\lambda(A)$: cela définit bien deux mesures, il est clair qu'elles coïncident sur les intervalles et on peut ensuite appliquer le théorème d'unicité des mesures σ-finie pour obtenir que $\mu = \nu$.

Exercice 4. (*Critère de Lebesgue pour la Riemann-intégrabilité*) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ bornée. L'objectif de cet exercice est de montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si elle est continue presque partout (c'est-à-dire l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure de Lebesgue nulle) et de se servir de ce critère pour construire des exemples de fonctions non-Riemann-intégrables et montrer qu'une fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-intégrable.
Rappel. On définit les intégrales de Darboux supérieure et inférieure par

$$\overline{\int_0^1} f := \inf_{\text{subdiv. } (x_i)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \qquad \text{et} \qquad \underline{\int_0^1} f := \sup_{\text{subdiv. } (x_i)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1},x_i]} f,$$

où les bornes inférieure et supérieure ont lieu sur tous les entiers $n \geq 1$ et toutes les subdivisions $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ de $[0,1]$. La fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si les deux intégrales de Darboux sont égales.

1. Pour $x \in [0,1]$, on définit l'*oscillation* de f en x par

$$\mathrm{Osc}_f(x) := \lim_{h\to 0^+}\left(\sup_{[x-h,x+h]\cap[0,1]} f - \inf_{[x-h,x+h]\cap[0,1]} f\right)$$

   et, pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$X_\varepsilon := \left\{x \in [0,1] : \mathrm{Osc}_f(x) \geq \varepsilon\right\},$$

   l'ensemble des points où f a une oscillation plus grande que ε.

(a) Montrer que $\mathrm{Osc}_f(x)$ est bien définie.

(b) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est mesurable (même si f n'est pas supposée mesurable).

2. Supposons que f est Riemann-intégrable.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\overline{\int_0^1} f - \underline{\int_0^1} f \geq \lambda(X_\varepsilon)\varepsilon.$$

(b) En déduire que f est continue presque partout.

3. Supposons que f est continue presque partout.

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $\eta > 0$, il existe un nombre fini d'intervalles ouverts disjoints $I_1, \ldots, I_n$ tels que

$$X_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^n I_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda(I_i) \leq \eta.$$

(b) En déduire que f est Riemann-intégrable.

4.(a) Trouver une fonction bornée Lebesgue-intégrable mais pas Riemann-intégrable.

(b) Montrer que si f est Riemann-intégrable, alors $f\colon ([0,1], \overline{\mathcal{B}}([0,1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, où $\overline{\mathcal{B}}([0,1])$ est la tribu de Lebesgue sur $[0,1]$. En déduire que f est Lebesgue-intégrable.

(c) (✵) Trouver une fonction $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[0,1]$ de sorte que sa dérivée F' soit bornée mais pas Riemann-intégrable.

Indication. On pourra se servir des ensembles de Cantor introduits au TD 3.

Remarque. Cela montre que le théorème fondamental de l'analyse montré au TD 3 pour l'intégrale de Lebesgue est strictement meilleur que son analogue pour l'intégrale de Riemann.

Corrigé.

1.(a) La fonction de h qui définit $\mathrm{Osc}_f(x)$ est bien définie car f est bornée. Elle est croissante donc admet une limite à droite en 0. Ainsi $\mathrm{Osc}_f(x)$ est bien définie.

Remarque. $\mathrm{Osc}_f(x)$ est la différence de la $\limsup$ et de la $\liminf$ de f en x, où on généralise les définitions de $\limsup$ et $\liminf$ au cas de limites continues.

(b) Montrons que X_ε est fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in [0,1]$. Alors, pour tout $h > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in]x-h, x+h[$ et donc

$$\sup_{[x-h,x+h]\cap[0,1]} f - \inf_{[x-h,x+h]\cap[0,1]} f \geq \mathrm{Osc}_f(x_n) \geq \varepsilon.$$

Ainsi $\mathrm{Osc}_f(x) \geq \varepsilon$ et $x \in X_\varepsilon$. Donc X_ε est fermé.

En particulier, X_ε est mesurable et donc l'ensemble D des points de discontinuité de f aussi car $D = \bigcup_{n\geq 1} X_{1/n}$.

2.(a) Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ et $0 = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = 1$ des subdivisions de $[0,1]$. On considère $(z_i)_{0\leq i\leq p}$ la subdivision obtenue en prenant l'union de $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{0\leq i\leq m}$. On a alors

$$\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \sup_{[x_{j-1},x_j]} f - \sum_{j=1}^m (y_j - y_{j-1}) \inf_{[y_{j-1},y_j]} f \geq \sum_{j=1}^p (z_j - z_{j-1}) \left(\sup_{[z_{j-1},z_j]} f - \inf_{[z_{j-1},z_j]} f \right).$$

On note $X'_\varepsilon := X_\varepsilon \setminus \{z_0, \ldots, z_n\}$ et $J := \{j \in [\![1,n]\!] : [z_{j-1}, z_j] \cap X'_\varepsilon \neq \emptyset\}$. Alors, pour $j \in J$, on a $\sup_{[z_{j-1},z_j]} f - \inf_{[z_{j-1},z_j]} f \geq \sup_{]z_{j-1},z_j[} \mathrm{Osc}_f \geq \varepsilon$ et donc

$$\sum_{i=1}^p (z_j - z_{j-1}) \left(\sup_{[z_{j-1},z_j]} f - \inf_{[z_{j-1},z_j]} f \right) \geq \varepsilon \sum_{j\in J} \lambda(I_j) \geq \varepsilon \lambda(X'_\varepsilon),$$

où pour la dernière inégalité on utilise l'inclusion $X'_\varepsilon \subset \bigcup_{j\in J} I_j$. On remarque ensuite que $\lambda(X'_\varepsilon) = \lambda(X_\varepsilon)$. Ainsi, en passant à la borne inférieure sur toutes les subdivisions de $[0,1]$, on obtient le résultat souhaité.

(b) Si f est Riemann-intégrable, alors elle est aussi Darboux-intégrable, c'est-à-dire que

$$\overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f.$$

Par la question précédente, on obtient que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lambda(X_\varepsilon) = 0$. Or $D = \bigcup_{n\geq 1} X_{1/n}$, donc on obtient $\lambda(D) = 0$.

3.(a) Comme $\lambda^*(D) = 0$ et $X_\varepsilon \subset D$, on a $\lambda^*(X_\varepsilon) = 0$. Il existe donc une suite $(I_i)_{i\geq 1}$ d'intervalles ouverts tels que

$$X_\varepsilon \subset \bigcup_{i\geq 1} I_i \quad \text{et} \quad \sum_{i\geq 1} \lambda(I_i) \leq \eta.$$

Comme X_ε est fermé (cf question 1.(b)) et borné, il est compact et donc on peut extraire du recouvrement par les ouverts I_i un sous-recouvrement fini : il existe $n \geq 1$ tel que

$$X_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^n I_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \lambda(I_i) \leq \sum_{i\geq 1} \lambda(I_i) \leq \eta.$$

Enfin, quitte à fusionner les intervalles qui se chevauchent, on peut supposer qu'ils sont disjoints.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$. Soit $I_1, \ldots, I_n$ les intervalles ouverts disjoints fournis par la question précédente. On considére $J_1, \ldots, J_m$ les intervalles fermés correspondant aux $n+1$ composantes connexes de $(\bigcup_{i=1}^n I_i)^c$ dont on exclut les singletons. Ainsi $I_1, \ldots, I_n, J_1, \ldots, J_m$ sont des intervalles disjoints recouvrant $[0,1]$ à l'exception d'un nombre fini de points.
Soit $i \in [\![1, m]\!]$ et $x \in J_i$. On a $x \notin X_\varepsilon$ donc $\mathrm{Osc}_f(x) < \varepsilon$ et il existe $h_x > 0$ tel que

$$\sup_{]x-h_x, x+h_x[\cap[0,1]} f - \inf_{]x-h_x, x+h_x[\cap[0,1]} f < \varepsilon.$$

En outre, on a $J_i \subset \bigcup_{x\in J_i}]x - h_x, x + h_x[$ et J_i est compact, donc on peut extraire un sous-recouvrement fini, qui nous fournit (en réduisant les intervalles pour qu'ils ne se chevauchent plus) une subdivision de J_i en intervalles $J_{i,1}, \ldots, J_{i,n_i}$ fermés (i.e. que leurs extrémités forment une subdivision de J_i) tels que, pour tout $k \in [\![1, n_i]\!]$,

$$\sup_{J_{i,k}} f - \inf_{J_{i,k}} f < \varepsilon.$$

Ainsi les intervalles fermés $(\overline{I_i})_{1\leq i\leq n}$ et $(J_{i,k})_{1\leq i\leq m, 1\leq k\leq n_i}$ forment une subdivision de $[0,1]$ et on a donc

$$\begin{aligned}
\overline{\int_0^1} f - \underline{\int_0^1} f &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sup_{\overline{I_i}} f - \inf_{\overline{I_i}} f\right)\lambda(I_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left(\sup_{J_{i,k}} f - \inf_{J_{i,k}} f\right)\lambda(J_{i,k}) \\
&\leq 2\|f\|_\infty \sum_{i=1}^n \lambda(I_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \lambda(J_{i,k}) \\
&\leq 2\|f\|_\infty \eta + \varepsilon\lambda([0,1]) = 2\|f\|_\infty \eta + \varepsilon.
\end{aligned}$$

On peut alors faire tendre ε puis η vers 0, ce qui montre que les intégrales de Darboux supérieure et inférieure coïncident et donc que f est Riemann-intégrable.

4.(a) On considère la fonction $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ qui est bornée et d'ensemble de points de discontinuité $D = [0,1]$ par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Comme $\lambda(D) > 0$, f n'est pas Riemann-intégrable. Cependant elle est Lebesgue-intégrable car mesurable et bornée sur un intervalle borné.

(b) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, montrons que $f^{-1}(U) \in \overline{\mathcal{B}}([0,1])$. Rappelons que D est l'ensemble des points de discontinuité de f et qu'il est dans $\mathcal{B}([0,1])$. On a

$$f^{-1}(U) = (f^{-1}(U) \cap D) \cup (f^{-1}(U) \cap D^c).$$

Comme f est Riemann-intégrable, elle est continue λ-p.p. : D est de mesure de Lebesgue nulle et donc $f^{-1}(U) \cap D$ est un ensemble négligeable pour la mesure de Lebesgue. Ainsi $f^{-1}(U) \cap D \in \overline{\mathcal{B}}([0,1])$.

D'autre part, la restriction de f à D^c est continue donc $f^{-1}(U) \cap D^c = f_{|D^c}^{-1}(U)$ est un ouvert de D^c, pour la topologie induite. Or la topologie induite sur D^c est formée par l'ensemble des $V \cap D^c$ pour V ouvert de $[0,1]$. Donc il existe V ouvert de $[0,1]$ tel que $f^{-1}(U) \cap D^c = V \cap D^c \in \mathcal{B}([0,1])$ car $V, D^c \in \mathcal{B}([0,1])$.

Cela montre que $f^{-1}(U) \in \overline{\mathcal{B}}([0,1])$. Comme les ouverts de $\mathbb{R}$ engendrent $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ on a montré que f est mesurable de $([0,1], \overline{\mathcal{B}}([0,1]))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(c) L'exemple présenté ici est l'exemple historique introduit par Vito Volterra en 1881. L'idée est de travailler sur un Cantor K de mesure strictement positive et de définir f sur chaque intervalle retiré lors de la construction, par une même fonction g, changée d'échelle, dérivable et de dérivée 0 aux bords. Ainsi, en posant $f = 0$ sur le Cantor, on obtient une fonction dérivable sur $[0,1]$. Ici, la fonction g sera choisie de sorte qu'elle ne converge pas aux bords de l'intervalle sur laquelle on la met. Cependant, on peut faire plus simple que Volterra et ce ne sont pas les oscillations de g aux bords le cœur du problème : le plus important est que la dérivée prenne la valeur 1 (par exemple) sur chaque intervalle retiré du Cantor. Alors en tout point x du Cantor, on a $f'(x) = 0$ mais il y a des intervalles retirés aussi proche qu'on veut de x avec f' qui prend la valeur 1 dessus : ainsi f' sera discontinue sur K.

On rappelle la définition de K : on considère une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ et on part de $K_0 := [0,1]$, alors, à partir de K_n qui est une réunion de 2^{n+1} intervalles fermés, on construit K_{n+1} en retirant de chaque intervalle de K_n un intervalle ouvert centré de longueur d_n fois celle de l'intervalle. Enfin, on pose $K := \bigcap_{n\geq 0} K_n$. On note $I_{n,1}, \dots, I_{n,2^n}$ les intervalles ouverts retirés à l'étape n de la construction du Cantor K, de sorte que

$$K = [0,1] \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k} \right).$$

On rappelle que K est un fermé d'intérieur vide dont tout point est point d'accumulation et on choisit une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ sommable, de sorte que $\lambda(K) > 0$ (voir l'exercice 6 du TD 3).

On introduit la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(x) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a, pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

On remarque que la dérivée de h est bornée par 3 sur $[0,1]$.

Soit $I_{n,k} =]a,b[$ un intervalle retiré lors de la construction de K. On note

$$c := \sup\left\{ x \in \left]a, \frac{a+b}{2}\right[: h'(x-a) = 0 \right\},$$

et on a $c > a$ car h' s'annule une infinité de fois à droite de 0. Puis on pose, pour $x \in]a,b[$,

$$f_{n,k}(x) := \begin{cases} h(x-a) & \text{si } a < x \leq c, \\ h(c-a) & \text{si } c < x \leq b+a-c, \\ h(b-x) & \text{si } b+a-c < x < b. \end{cases}$$

La fonction $f_{n,k}$ est dérivable sur $]a,b[$ par définition de c (la dérivée à droite et à gauche en c et en $b+a-c$ est nulle) et sa dérivée est bornée par 3. Enfin, on définit la fonction de Volterra f, pour $x \in [0,1]$, par

$$f(x) := \begin{cases} f_{n,k}(x) & \text{s'il existe } n,k \in \mathbb{N} \text{ tels que } x \in I_{n,k}, \\ 0 & \text{si } x \in K, \end{cases}$$

et nous allons maintenant montrer que cette fonction répond à la question.
Montrons que f est dérivable sur K. Soit $x \in K$, on a $f(x) = 0$. Soit $y \in [0,1]$. Si $y \in K$, on a $f(x) - f(y) = 0$. Sinon, $y \in I_{n,k} =]a,b[$ avec $x < a < y < b$ ou $a < y < b < x$. Alors on a

$$|f(y) - f(x)| = |f_{n,k}(y)| \leq \max((y-a)^2, (y-b)^2) \leq (y-x)^2.$$

En regroupant les deux cas, on a montré que, pour tout $y \in [0,1]$,

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{y-x} \leq (y-x) \xrightarrow[y \to x]{} 0$$

donc f est dérivable en x de dérivée $f'(x) = 0$. En outre, f est dérivable sur tous les intervalles ouverts $I_{n,k}$ car elle y coïncide avec $f_{n,k}$ qui est dérivable. Donc f est dérivable sur $[0,1]$ et sa dérivée f' est bornée par 3.
Montrons que f' n'est continue en aucun point de K. Soit $x \in K$, on a $f'(x) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, montrons qu'il existe $t \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap [0,1]$ tel que $f'(t) = 1$. Comme x est point d'accumulation de K, il existe $y \in K$ tel que $|x-y| \leq \varepsilon$. Mais K est d'intérieur non vide, donc $[x,y] \cap K^c \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe $n,k \in \mathbb{N}$ tels que $I_{n,k} \subset [x,y]$. Notons $I_{n,k} =]a,b[$ et c défini comme précédemment. Soit $n \geq 1$ suffisamment grand pour que $1/(2n\pi) \leq c - a$, alors on a

$$f'\left(a + \frac{1}{2n\pi}\right) = f'_{n,k}\left(a + \frac{1}{2n\pi}\right) = h'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 1$$

et $a + \frac{1}{2n\pi} \in (a,b) \subset [x,y] \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap [0,1]$. Ainsi f' est discontinue en x.
L'ensemble des points de discontinuité de f' contient donc K (ils sont même égaux) et K a une mesure de Lebesgue strictement positive. Donc f' n'est pas Riemann intégrable.