Devoir à la maison 1

à rendre avant le 4 octobre

Exercice 1. Fournir une démonstration ou un contre-exemple pour les questions suivantes.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels et soit $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. A-t-on alors l'égalité suivante :
$$f\left(\limsup_{n\to\infty} x_n\right) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n)\ ?$$
2. Soit X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$, on note $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$. A-t-on, pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$, la relation suivante :
$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))\ ?$$
3. Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi\colon X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F) : F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
4. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Existe-t-il forcément une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$?

Exercice 2. (*"Cardinal" d'une tribu*) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l'*atome* de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x par
$$\dot{x} := \bigcap_{A\in\mathcal{A} \text{ tel que } x\in A} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. En déduire qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable tel que $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{A}$. On dit que μ est *portée* par $S \in \mathcal{A}$ si $\mu(S^c) = 0$, que $\omega \in \Omega$ est un *atome ponctuel* pour μ si $\mu(\{\omega\}) > 0$, que μ est *diffuse* si elle n'a pas d'atomes ponctuels, et que μ est *purement atomique* si elle est portée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.

1. Que peut-on dire d'une mesure qui est diffuse et purement atomique ?
2. Montrer que l'ensemble des atomes ponctuels d'une mesure finie μ est dénombrable.
3. Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe un unique couple de mesures (μ_d, μ_a) sur $\mathcal{A}$, avec μ_d diffuse et μ_a purement atomique, tel que $\mu = \mu_d + \mu_a$.

Le DM est à rendre pendant le TD, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

Exercice 4. (*Produit de tribus boréliennes*)

1. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques séparables (c'est-à-dire admettant une suite dense). L'objectif de cette question est de montrer que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$, où $X \times Y$ est muni de la topologie produit. On rappelle que la topologie produit sur $X \times Y$ est engendrée par la distance $d_{X\times Y}$ définie par

$$\forall (x,y),(x',y') \in X \times Y, \quad d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) := \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')).$$

   (a) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$, $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$.

   (b) En déduire que $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$.

   (c) Montrer que, pour tout ouvert non vide U de $X \times Y$, il existe deux suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X \times Y)^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(z_n, r_n),$$

   où $B(z,r)$ est la boule de centre z et de rayon r pour $d_{X\times Y}$.

   (d) En déduire que $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.

2. (✱) Soit X un espace métrique. Dans cette question, on montre que l'on n'a pas forcément $\mathcal{B}(X^2) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$.

   (a) Soit $C \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. Montrer qu'il existe une suite de boréliens $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$C \in \sigma(\{A_m \times A_n : m, n \in \mathbb{N}\}).$$

   (b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ une suite de boréliens. Pour $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on note

$$D_n^u := \begin{cases} A_n & \text{si } u_n = 1 \\ (A_n)^c & \text{si } u_n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad B^u := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n^u.$$

   Montrer que $\mathcal{G} := \{\bigcup_{(u,v)\in I} B^u \times B^v : I \subset (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2\}$ est une tribu.

   (c) En déduire qu'il existe deux familles de boréliens $(C_i)_{i\in\mathbb{R}}, (C'_i)_{i\in\mathbb{R}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{R}}$ telles que

$$C = \bigcup_{i\in\mathbb{R}} C_i \times C'_i.$$

   (d) En utilisant la question précédente, trouver un espace métrique X tel que $\mathcal{B}(X^2) \neq \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$.