Devoir à la maison 1

à rendre avant le 4 octobre

Exercice 1. Fournir une démonstration ou un contre-exemple pour les questions suivantes.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels et soit $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction continue. A-t-on alors l'égalité suivante :
$$f\left(\limsup_{n\to\infty} x_n\right) = \limsup_{n\to\infty} f(x_n)\ ?$$
2. Soit X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$, on note $f^{-1}(\mathcal{A}) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}\}$. A-t-on, pour tout $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(Y)$, la relation suivante :
$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))\ ?$$
3. Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi\colon X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F) : F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
4. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Existe-t-il forcément une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$?

Corrigé.

1. C'est faux : prenons $x_n = (-1)^n$ et $f(x) = -x$, alors $f(\limsup_{n\to\infty} x_n) = f(1) = -1$ et d'autre part $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) = \limsup_{n\to\infty}(-1)^{n+1} = 1$ (on rappelle que la limite supérieure est la plus grande valeur d'adhérence d'une suite).

   Remarque. Si f est continue et *croissante* alors le résultat annoncé est vrai : montrez-le.
2. C'est vrai, montrons la double inclusion. Tout d'abord, il est clair que $f^{-1}(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$, ce qui implique que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{A})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ car $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A}))$ est une tribu (voir la tribu réciproque dans l'exercice 2 du TD 1). Ensuite, notons
$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))\}.$$
   Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on en déduit que $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est une tribu (voir la tribu image dans l'exercice 2 du TD 1). Il s'ensuit que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{A})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{A}))$, ce qui clôt la preuve.
3. C'est faux. On considère pour $X = Y = \{0, 1\}$ la tribu $\mathcal{F}$ engendré par l'élément $(0, 0) \in X \times Y$. Il est clair que
$$\mathcal{F} = \{\varnothing, X \times Y, \{(0, 0)\}, X \times Y \backslash \{(0, 0)\}\}.$$
   On vérifie que $\mathcal{F}_X = \{\varnothing, \{0\}, X\}$, ce qui n'est pas une tribu.
4. C'est vrai. En effet, soit $\mathcal{G} = \{B \in \sigma(\mathcal{C}) : \exists \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $B \in \sigma(\mathcal{D})\}$. Montrons que $\mathcal{G}$ est une tribu.
   - ▷ Avec $\mathcal{D} = \emptyset$, on a $E \in \mathcal{G}$.
   - ▷ Si $A \in \mathcal{G}$, alors il existe $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A \in \sigma(\mathcal{D})$, et donc $A^c \in \sigma(\mathcal{D})$: on a $A^c \in \mathcal{G}$.
   - ▷ Si $(A_n) \subset \mathcal{G}$, alors pour tout n il existe $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A_n \in \sigma(\mathcal{D}_n)$, et donc $\bigcup_n A_n \in \sigma(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D} := \bigcup_n \mathcal{D}_n \subset \mathcal{C}$ est dénombrable (étant une union dénombrable d'ensembles dénombrables) : on a $\bigcup_n A_n \in \mathcal{G}$.

Le DM est à rendre pendant le TD, ou à déposer dans mon casier à l'entrée de l'espace Cartan. Pour toute question, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à michel.pain@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V2.

En conclusion, $\mathcal{G}$ est une tribu, et, comme $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ (pour $B \in \mathcal{C}$, il suffit de prendre $\mathcal{D} = \{B\}$), on obtient $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$.

Exercice 2. (*"Cardinal" d'une tribu*) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l'*atome* de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x par

$$\dot{x} := \bigcap_{A \in \mathcal{A} \text{ tel que } x \in A} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. En déduire qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable.

Corrigé.

1. On remarque que $x \in \dot{x}$ pour tout $x \in E$, donc $\dot{x} \neq \emptyset$ et

$$\bigcup_{x \in E} \dot{x} = E.$$

Montrons maintenant que

$$\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{y}.$$

Soit $x, y, z \in E$ tels que $z \in \dot{x} \cap \dot{y}$. Alors chaque ensemble $A \in \mathcal{A}$ contenant x contient z. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{A}$ contenant z mais ne contenant pas x. Alors $B^c \in \mathcal{A}$ et contient x. Ainsi B^c contient z ce qui est contradictoire. Donc $\dot{x} = \dot{z}$ et de même $\dot{y} = \dot{z}$. Donc $\dot{x} = \dot{y}$.

2. Supposons que $\mathcal{A}$ soit finie ou dénombrable. Alors chaque atome $\dot{x}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ et donc appartient à $\mathcal{A}$. De plus, si $A \in \mathcal{A}$, alors

$$A = \bigcup_{x : x \in A} \dot{x}$$

et cette réunion est au plus dénombrable car les atomes appartiennent à $\mathcal{A}$. De plus, les atomes formant une partition de E, cette écriture est unique.

3. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des atomes de $\mathcal{A}$ supposée finie ou dénombrable. D'après la question 2., on définit une bijection φ de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{A}$ par,

$$\varphi : C \in \mathcal{P}(\mathcal{C}) \longmapsto \bigcup_{\dot{x} \in C} \dot{x}.$$

Si $\mathcal{C}$ est fini, alors $\mathcal{A}$ est finie. Si $\mathcal{C}$ est infini, alors $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ est indénombrable et donc $\mathcal{A}$ aussi.

Exercice 3. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable tel que $\{\omega\} \in \mathcal{A}$ pour tout $\omega \in \Omega$. Soit μ une mesure positive sur $\mathcal{A}$. On dit que μ est *portée* par $S \in \mathcal{A}$ si $\mu(S^c) = 0$, que $\omega \in \Omega$ est un *atome ponctuel* pour μ si $\mu(\{\omega\}) > 0$, que μ est *diffuse* si elle n'a pas d'atomes ponctuels, et que μ est *purement atomique* si elle est portée par l'ensemble de ses atomes ponctuels.

1. Que peut-on dire d'une mesure qui est diffuse et purement atomique ?
2. Montrer que l'ensemble des atomes ponctuels d'une mesure finie μ est dénombrable.
3. Soit μ une mesure finie sur $\mathcal{A}$. Montrer qu'il existe un unique couple de mesures (μ_d, μ_a) sur $\mathcal{A}$, avec μ_d diffuse et μ_a purement atomique, tel que $\mu = \mu_d + \mu_a$.

Corrigé.

1. Elle est alors portée par l'ensemble de ses atomes ponctuels, qui est vide car elle est diffuse. Cette mesure est donc nulle.
2. Pour tout $k \geq 0$, on pose $D_k = \{\omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) \geq 1/k\}$. Alors $\mathrm{Card}(D_k) \leq k\mu(\Omega)$ (s'il existe au moins N éléments distincts dans D_k, alors $\mu(D_k) \geq N/k$). Soit D l'ensemble des atomes ponctuels de μ. Alors D est l'union dénombrable pour $k \geq 0$ des ensembles finis D_k, donc D est dénombrable.
3. Soit D l'ensemble des atomes ponctuels de μ qui est dénombrable donc mesurable par hypothèse sur la tribu $\mathcal{A}$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu_d(A) = \mu(A \cap D^c)$ et $\mu_a(A) = \mu(A \cap D)$ (ce sont les mesures de densité $\mathbb{1}_D$ et $\mathbb{1}_{D^c}$ par rapport à μ). Les atomes de μ_a sont D et $\mu_a(D^c) = 0$ donc μ_a est purement atomique. Pour $\omega \in \Omega$, $\mu_d(\{\omega\}) = 0$ en séparant les cas $\omega \in D$ et $\omega \notin D$ donc μ_d est diffuse. Enfin, on a $\mu = \mu_d + \mu_a$.
   Pour l'unicité, considérons un couple (μ_d, μ_a) vérifiant les conditions. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a
   $$\mu(\{\omega\}) = \mu_a(\{\omega\}) + \mu_d(\{\omega\}) = \mu_a(\{\omega\}),$$
   car μ_d est diffuse. Donc μ_a a pour ensemble d'atomes D, donc $\mu_a(D^c) = 0$ car μ_a purement atomique. D'autre part, pour tout $B \subset D$, B est dénombrable (et donc mesurable) donc
   $$\mu_a(B) = \sum_{\omega \in B} \mu_a(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in B} \mu(\{\omega\}) = \mu(B),$$
   et donc, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu_a(A) = \mu_a(A \cap D) + \mu_a(A \cap D^c) = \mu(A \cap D) + 0$ et $\mu_d(A) = \mu(A) - \mu_a(A) = \mu(A \cap D^c)$.

Exercice 4. (*Produit de tribus boréliennes*)

1. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) des espaces métriques séparables (c'est-à-dire admettant une suite dense). L'objectif de cette question est de montrer que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$, où $X \times Y$ est muni de la topologie produit. On rappelle que la topologie produit sur $X \times Y$ est engendrée par la distance $d_{X\times Y}$ définie par
   $$\forall (x,y),(x',y') \in X \times Y, \quad d_{X\times Y}((x,y),(x',y')) := \max(d_X(x,x'), d_Y(y,y')).$$
   (a) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{B}(X)$, $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$.
   (b) En déduire que $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$.
   (c) Montrer que, pour tout ouvert non vide U de $X \times Y$, il existe deux suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X \times Y)^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que
   $$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(z_n, r_n),$$
   où $B(z,r)$ est la boule de centre z et de rayon r pour $d_{X\times Y}$.
   (d) En déduire que $\mathcal{B}(X \times Y) \subset \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.
2. (☆) Soit X un espace métrique. Dans cette question, on montre que l'on n'a pas forcément $\mathcal{B}(X^2) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$.
   (a) Soit $C \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. Montrer qu'il existe une suite de boréliens $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ telle que
   $$C \in \sigma(\{A_m \times A_n : m, n \in \mathbb{N}\}).$$
   (b) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ une suite de boréliens. Pour $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, on note
   $$D_n^u := \begin{cases} A_n & \text{si } u_n = 1 \\ (A_n)^c & \text{si } u_n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad B^u := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n^u.$$
   Montrer que $\mathcal{G} := \{\bigcup_{(u,v)\in I} B^u \times B^v : I \subset (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2\}$ est une tribu.

(c) En déduire qu'il existe deux familles de boréliens $(C_i)_{i\in\mathbb{R}}, (C'_i)_{i\in\mathbb{R}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{R}}$ telles que

$$C = \bigcup_{i\in\mathbb{R}} C_i \times C'_i.$$

(d) En utilisant la question précédente, trouver un espace métrique X tel que $\mathcal{B}(X^2) \neq \mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(X)$.

Corrigé.

1.(a) On pose

$$\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{B}(X) : A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)\}.$$

On vérifie aisément que $\mathcal{G}$ est une tribu. Or $\mathcal{G}$ contient tous les ouverts de X (car si U est un ouvert de X alors $U \times Y$ est un ouvert de $X \times Y$ donc appartient à $\mathcal{B}(X \times Y)$), donc $\mathcal{G} = \mathcal{B}(X)$.

(b) Soit $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}(Y)$, on a $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$. Or $A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$ par la question 1.(a) et $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ par symétrie entre les rôles de X et Y, donc $A \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$. Comme la tribu $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ est engendrée par les $A \times B$ pour $A \in \mathcal{B}(X)$ et $B \in \mathcal{B}(Y)$, on en déduit que $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$.

(c) Les espaces X est séparable donc on peut considérer des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$ respectivement denses dans X et dans Y. Alors l'ensemble $\{(x_i, y_j) : i, j \in \mathbb{N}\} \cap U$ est dense dans U et dénombrable : il permet de définir une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ dense dans U.
Si $U = X \times Y$, on peut prendre $r_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Supposons à présent $U \neq X \times Y$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n := d_{X\times Y}(z_n, U^c)$. On a $r_n > 0$ car U^c est fermé et $r_n < \infty$ car $U \neq X \times Y$. Alors on a clairement $B_\infty(z_n, r_n) \subset U$. Réciproquement, soit $z \in U$, montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z \in B_\infty(z_n, r_n)$. On pose $r := d_\infty(z, U^c) \in \mathbb{R}_+^*$. Par densité, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z_n \in B_\infty(z, r/2)$. Alors $r_n = d_{X\times Y}(z_n, U^c) \geq d_{X\times Y}(z, U^c) - d_{X\times Y}(z, z_n) > r/2$ donc $z \in B_\infty(z_n, r_n)$.

(d) Comme $\mathcal{B}(X \times Y)$ est engendrée par les ouverts de $X \times Y$, il suffit de montrer que pour U ouvert de $X \times Y$, on a $U \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$. Si U est vide c'est bon. Sinon, par la question 3., il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (X \times Y)^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telles que

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(z_n, r_n).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(z_n, r_n) \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ car les boules pour $d_{X\times Y}$ sont le produit d'une boule pour d_X avec une boule pour d_Y. Donc $U \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$.

Remarque. L'inclusion $\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ est vraie sans la séparabilité : on ne l'a pas utilisée pour les deux premières questions.

2.(a) C'est une conséquence de la question 3. de l'exercice 1.

(b) La difficulté peut résider dans le passage au complémentaire. Il suffit de remarquer que $(B^u)_{u\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ est une partition de X donc $(B^u \times B^v)_{u,v\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ est une partition de X^2. Alors on a, pour tout $I \subset (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2$,

$$\left(\bigcup_{(u,v)\in I} B^u \times B^v\right)^c = \bigcup_{(u,v)\in I^c} B^u \times B^v \in \mathcal{G}$$

(c) On applique la question 2.(b) à la suite de boréliens $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{N}}$ de la question 2.(a). Alors $\mathcal{G}$ est une tribu contenant tous les $A_n \times A_m$ (en prenant $I = \{(u,v) \in (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2 : u_n = 1 \text{ et } v_m = 1\}$ donc

$$\sigma(\{A_m \times A_n : m, n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathcal{G}$$

et $C \in \mathcal{G}$. Ainsi, il existe $I \subset (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2$ tel que $C = \bigcup_{(u,v)\in I} B^u \times B^v$. Comme $(\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2$ est en bijection avec $\mathbb{R}$, on peut réindicer l'union par $\mathbb{R}$ (quitte à compléter avec des ensembles vides).

(d) Il suffit de choisir pour X un espace métrique de cardinal strictement plus grand que $\mathbb{R}$, par exemple l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme infini.

On considère $\Delta \coloneqq \{(x,x) : x \in X\}$ la diagonale de X^2. C'est un fermé de X^2 donc $\Delta \in \mathcal{B}(X^2)$. Par l'absurde, supposons que $\Delta \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. Alors, par la question 2.(c), il existe deux familles de boréliens $(C_i)_{i\in\mathbb{R}}, (C_i')_{i\in\mathbb{R}} \in \mathcal{B}(X)^{\mathbb{R}}$ telles que

$$\Delta = \bigcup_{i\in\mathbb{R}} C_i \times C_i'.$$

Alors, pour chaque $x \in X$, il existe $i_x \in \mathbb{R}$ tel que $(x,x) \in C_{i_x} \times C_{i_x}'$. L'application $x \in X \mapsto i_x \in \mathbb{R}$ ne peut pas être injective car X est de cardinal strictement plus grand que $\mathbb{R}$, donc il existe $x \neq y$ tels que $i_x = i_y$. On a alors $(x,y) \in C_{i_x} \times C_{i_x}' \subset \Delta$, ce qui est absurde.