Exo 11 $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad O(n) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A\,{}^tA = I \}$.

1°/ $f : E \to \mathcal{S}$, $A \mapsto A\,{}^tA$ $\qquad \mathcal{S}$ = sous-espace de E des matrices symétriques.

Les coeff. de $f(A)$ sont des polynômes (de degré 2) en les coeff de A donc f est de classe C^∞.

$$f(A+H) = (A+H)\,{}^t(A+H) = \underbrace{A\,{}^tA}_{f(A)} + \underbrace{A\,{}^tH + H\,{}^tA}_{\text{linéaire en } H} + \underbrace{H\,{}^tH}_{o(\|H\|)}$$

donc $df_A(H) = A\,{}^tH + H\,{}^tA$.

2°/ $M \in E$ $\quad M = \underbrace{\frac{M + {}^tM}{2}}_{\in \mathcal{S}} + \underbrace{\frac{M - {}^tM}{2}}_{\in \mathcal{A}}$ $\qquad E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$

$E \simeq \mathcal{S} \times \mathcal{A}$

$M \mapsto \left(\frac{M+{}^tM}{2}, \frac{M-{}^tM}{2}\right)$

$A+S \leftarrow (A, S)$

$f : E \simeq \mathcal{A} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$
$(A, S) \mapsto (A+S)\,{}^t(A+S)$

f est C^∞.

$$\frac{\partial f}{\partial S}(A,S) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}, \quad H \mapsto \frac{\partial f}{\partial S}(A,S)(H) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f\big((A,S) + t(0,H)\big)$$

$$\begin{aligned} f\big((A,S) + t(0,H)\big) &= f(A, S+tH) \\ &= [A + (S+tH)]\,{}^t[A + (S+tH)] \\ &= (A+S)\,{}^t(A+S) + t\left[(A+S)\,{}^tH + H\,{}^t(A+S)\right] \\ &\quad + t^2 H\,{}^tH \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S}(A,S)(H) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f\big((A,S) + t(0,H)\big) = \underline{\underline{(A+S)\,{}^tH + H\,{}^t(A+S)}}$$

La matrice $I \in E$ s'écrit dans $\mathcal{A} \times \mathcal{S}$ comme $(0, I)$

donc $\frac{\partial f}{\partial S}(0,I)(H) = (0+I)\,{}^tH + H\,{}^t(0+I) = {}^tH + H = H + H = 2H$

car $H \in \mathcal{S}$. Donc $\frac{\partial f}{\partial S}(0,I)$ est inversible.

Le th. des fcts implicites nous dit qu'il existe un voisinage $\overset{\text{ouvert}}{\widehat{\ }}$ V de $\underset{(0,I)}{\overset{\shortparallel}{I}}$ dans $\underset{\mathcal{A}\times\mathcal{S}}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}$, un voisinage $\underset{\text{ouvert}}{\widehat{\ }}$ W de 0 dans $\mathcal{A}$

et une application C^∞ $h : W \longrightarrow \mathcal{S}$ tels que

$$\left.\begin{array}{l}(A,S)\in V\\ f(A,S)=I\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}A\in W\\ S=h(A)\end{array}\right.$$

c'est-à-dire $V\cap O(n)$ est le graphe de h ($O(n)$ est une "surface" de dimension $\dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}$).

3°/ Même chose en un $\Omega = (A,S) \in O(n)$. Si $H\in\mathcal{S}$

$$\frac{\partial f}{\partial S}(\Omega)\,(H) = \Omega\,{}^tH + H\,{}^t\Omega$$

$\Omega\in O(n)$ donc Ω inversible $\Omega^{-1} = {}^t\Omega$

$\frac{\partial f}{\partial S}(\Omega) : \mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{S}$ est surjective car, si $C\in\mathcal{S}$

alors $C = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}{}^tC + \frac{1}{2}C$

On pose $H = \frac{1}{2}C\,{}^t\Omega^{-1} = \frac{1}{2}C\Omega$ ⚠ ${}^tH = \frac{1}{2}{}^t\Omega\,{}^tC$ pas sym.

On a $H\,{}^t\Omega = \frac{1}{2}C\,\Omega\,{}^t\Omega = \frac{1}{2}C$

et $\Omega\,{}^tH = \frac{1}{2}\Omega\,{}^t\Omega\,{}^tC = \frac{1}{2}{}^tC$

donc, $C = \Omega\,{}^tH + H\,{}^t\Omega = \frac{\partial f}{\partial S}(\Omega)\,(H)$

<u>Lemme</u>: Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 avec $n\geq m$. On note $S = f^{-1}(\{0\})$
On suppose que $(\forall p\in S)$ df_p surjective.
Alors S est localement le graphe d'une application.

<u>dem</u>: Si $p = (p_1,\dots,p_n)\in S$ on a

$$\operatorname{Jac} f_p = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p)\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p)\end{pmatrix}}_{n}\Big\updownarrow m$$

df_p surjective donc $\operatorname{rg}\operatorname{Jac} f_p = m$
On peut supposer que

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p)\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(p)\end{pmatrix}\neq 0$$

Sinon on fait une permutation des coordonnées.
Le th. des fcts implicites dit : il existe un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^n$, un voisinage W de $\tilde{p} = (p_1, \dots, p_m)$ dans $\mathbb{R}^m$ et une application $h : W \longrightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ de classe C^1 tels que

$$\left.\begin{array}{l} x = (x_1, \dots, x_n) \in V \\ f(x) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x_1, \dots, x_m) \in W \\ (x_{m+1}, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_m) \end{array}\right.$$

c'est-à-dire, $V \cap S$ est le graphe de h.

<u>On revient à $O(n)$:</u> $\quad f : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S$, $A \longmapsto A\,{}^tA$

Soit $A \in O(n)$

$$df_A(H) = A\,{}^tH + H\,{}^tA \qquad df_A : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S$$

Si $C \in S$ alors on pose $H = \frac{1}{2} C A$

On a $\left.\begin{array}{l} H\,{}^tA = \frac{1}{2} C A\,{}^tA = \frac{1}{2} C \\ A\,{}^tH = \frac{1}{2} A\,{}^tA C = \frac{1}{2} C \end{array}\right\} \Rightarrow df_A(H) = C$

donc df_A est surjective.

D'après le lemme, $O(n)$ est localement le graphe d'une application

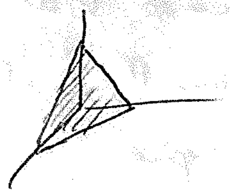
Exo 12 $\quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y,z) = (2x^2 - y^2 + 2xz - z^2,\ xy + xz + yz)$

f C^1 et $\operatorname{Jac} f_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 4x + 2z & -2y & 2x - 2z \\ y + z & x + z & x + y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \operatorname{Jac} f_{(1,1,0)} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow (\exists V \text{ vois. de } (1,1,0))(\exists W \text{ vois. de } 0)(\exists \varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^2\ C^1)$
t.q. $V \cap \mathcal{C} = \text{graphe de } \varphi = \{(x,y,z) /\ z \in W \quad (x,y) = \varphi(z)\}$.

Exo 13 $\quad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ \forall i, \ \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$



S est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$ donc compact.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad f(x) = x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}$ est continue

donc $f_{|S}$ est bornée et atteint ses bornes.

Il existe $p \in S$ tel que $f(p) = \sup_S f$.

Si $x \in S$ avec par exemple $x_1 = 0$ alors $f(x) = 0$

donc, p n'est pas sur le bord de S.

On considère $f : U \to \mathbb{R} \qquad U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$

f est différentiable. $\qquad$ ouvert de $\mathbb{R}^n$

On définit $g : U \to \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{i=1}^n x_i - 1 \quad g$ est C^1

On note $C = S \cap U = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$.

Comme $f_{|C}$ admet un maximum en $p \in C$, le th. des extrema liés donne l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_p = \lambda \, dg_p$

c'est-à-dire $\left(r_1 p_1^{r_1 - 1}, \dots, r_n p_n^{r_n - 1}\right) = \lambda (1, \dots, 1) \qquad p = (p_1, \dots, p_n)$

donc $r_1 p_1^{r_1 - 1} = \dots = r_n p_n^{r_n - 1} = \lambda$ $\quad$ et ??

Plus simple :

Comme $\ln$ est croissante, f et $\ln f$ atteignent leur max sur C en le même point p.

$\ln f(x_1 \dots x_n) = \ln(x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n}) = r_1 \ln x_1 + \dots + r_n \ln x_n$

Le th. des extrema liés donne $d(\ln f)|_p = \mu \, dg_p$ donc

$\left(r_1 \frac{1}{p_1}, \dots, r_n \frac{1}{p_n}\right) = \mu (1, \dots, 1) \implies \frac{r_1}{p_1} = \dots = \frac{r_n}{p_n} = \mu.$

donc $r_1 = \mu p_1, \dots, r_n = \mu p_n$.

On écrit que $\underbrace{\mu p_1 + \dots + \mu p_n}_{r_1 + \dots + r_n} = \mu \times 1$ car $p_1 + \dots + p_n = 1$

On pose $r_1 + \dots + r_n = d$

On a $\mu = d$ et donc $p_1 = \frac{r_1}{d} \dots p_n = \frac{r_n}{d}$

Le max est atteint en $p = \left(\frac{r_1}{d}, \dots, \frac{r_n}{d}\right)$ et on a

$$f(p) = \left(\frac{r_1}{d}\right)^{r_1} \cdots \left(\frac{r_n}{d}\right)^{r_n}$$

Exo 14

1°/ $O(n)$ est compact (fermé borné) donc $d(A; O(n))$ est atteinte (O(n) fermé est suffisant, en fait).

2°/ • $M \mapsto A - M$ est C^∞ $M \mapsto \|M\|^2$ est C^∞ $\Rightarrow f$ C^∞

$$df_M(H) = \frac{1}{2} \times 2 \langle A - M, -H \rangle = -\langle A - M, H \rangle$$

• g est C^∞ (cf exo 11)

$$dg_M(H) = M\,{}^tH + H\,{}^tM.$$

Si $M \in O(n)$ alors $dg_M : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n$ est surjective (voir exo 11).

3°/ On utilise le th. des extrema liés

• $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ différentiable

• $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n$ C^∞ $O(n) = g^{-1}(\{0\})$

et $(\forall M \in O(n))$ dg_M est de rang maximal $= \dim \mathcal{S}_n$

Comme $g|_{O(n)}$ admet un minimum en $M \in O(n)$ il existe

$\phi : \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ linéaire telle que $df_M = \phi \circ dg_M$

4°/ $\phi \in \quad \mathcal{S}_n^* \qquad \mathcal{S}_n)$ et muni du produit scalaire donc (th. de Riesz) il existe un unique $C \in \mathcal{S}_n$ tel que

$\phi = \langle C, \cdot \rangle$.

Si $H \in \Omega_n(\Omega)$, on a $df_\Omega(H) + \phi \circ dg_\Omega(H) = 0$

donc $-\langle A - \Omega, H \rangle + \langle C, \Omega\,{}^tH + H\,{}^t\Omega \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \quad \langle \Omega - A, H \rangle + \langle C, \Omega\,{}^tH \rangle + \langle C, H\,{}^t\Omega \rangle = 0$

or $\langle C, \Omega\,{}^tH \rangle = Tr\left({}^tC(\Omega\,{}^tH) \right) = Tr\left(C H\,{}^t\Omega \right) = Tr\left({}^t\Omega C H \right)$

$= Tr\left({}^tH\,{}^tC\,\Omega \right)$

$= Tr\left(\Omega\,{}^tH\,{}^tC \right) = Tr\left({}^tC\,\Omega\,{}^tH \right) = \langle {}^tC\Omega, H \rangle$

et $\langle C, H\,{}^t\Omega \rangle = Tr\left(C\Omega\,{}^tH \right) = \langle C\Omega, {}^tH \rangle$

On obtient $\langle \Omega - A, H \rangle + \langle {}^tC\Omega, H \rangle + \langle C\Omega, H \rangle = 0$

donc $\langle \Omega - A + {}^tC\Omega + C\Omega, H \rangle = 0$ et ce pour tout H

donc $\Omega - A + {}^tC\Omega + C\Omega = 0$ ce qui donne

$A = \Omega + {}^tC\Omega + C\Omega = \Omega + 2C\Omega$ car ${}^tC = C$

i.e. $A = (I + 2C)\Omega$ avec $\Omega \in O(n)$

et $I + 2C \in \mathcal{S}_n$