Inversion locale
Samedi 27/11/2021

Exo1 $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\Phi(A) = A^{-1}$. On a $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\mathrm{Cof}(A)$

Si $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ alors les coefficients de A^{-1} sont des polynômes en les a_{ij} donc Φ est de classe C^∞. Comme Φ est bijective avec $\Phi^{-1} = \Phi$, Φ^{-1} est aussi de classe C^∞.

Exo2 $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = \exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

On prend une norme qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$. Comme la série réelle $\sum_{k\geq 0} \frac{\|A\|^k}{k!}$ converge, la série $\sum_{k\geq 0} \frac{A^k}{k!}$ converge absolument

On en déduit que f est bien définie.

f est C^1 : On écrit $f = \sum_{k\geq 0} f_k$ $\quad f_k : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ A \mapsto \frac{A^k}{k!} \end{array}$

* la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement sur E.
* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est de classe C^1 avec

$$d{f_k}_A(H) = \frac{1}{k!}\left[HA^{k-1} + AHA^{k-2} + \dots + A^{k-2}HA + A^{k-1}H\right]$$

* Si $r > 0$, on montre que $\sum_{k\geq 0} df_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $\overline{B}(0;r)$.

Si $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \overline{B}(0;r)$ alors on étudie $|||(df_k)_A|||$

$$|||(df_k)_A||| = \sup_{H\neq 0} \frac{\|(df_k)_A(H)\|}{\|H\|}.$$

Or $\|(df_k)_A(H)\| \leq \frac{1}{k!}\left[\|HA^{k-1}\| + \dots + \|A^{k-1}H\|\right] \leq \frac{1}{k!}\left[k\|A\|^{k-1}\|H\|\right]$

d'où $|||(df_k)_A||| \leq \dfrac{\|A\|^{k-1}}{(k-1)!} \leq \dfrac{r^{k-1}}{(k-1)!}$

Comme la série réelle $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{r^{k-1}}{(k-1)!}$ converge on en déduit que $\displaystyle\sum_{k\geq 0} df_k$ converge normalement sur $\overline{B}(0;r)$.

Ainsi l'application f est de classe C^1 sur $\overline{B}(0;r)$ pour tout $r>0$ donc sur E.

Pour finir, on a $df_A = \displaystyle\sum_{k\geq 0} (df_k)_A$ pour tout $A \in O$.

donc $df_{\mathbb{0}}(H) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (df_k)_{\mathbb{0}}(H) = H$ pour tout $H \in E$

L'application linéaire df_I est un isomorphisme donc par le th. d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert V de 0, un voisinage ouvert W de $f(0) = I$ tels que $f : V \to W$ soit un C^1 - difféo

__Exo 4__ : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, , , df_a inversible pour tout $a \in U \Rightarrow f$ ouverte ?

Soit V un ouvert inclus dans U et $x \in V$. Par le TIL il existe $r_x > 0$ tel que $f|B(x;r_x)$ soit un C^1- difféo de $B(x;r_x)$ sur son image et comme V est ouvert on peut supposer (quitte à réduire r_x) que $B(x;r_x) \subset V$. Comme f est un difféomorphisme sur $B(0;r_x)$ $f(B(x;r_x))$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
Maintenant, on a $V = \displaystyle\bigcup_{x\in V} B(x;r_x)$ donc $f(V) = \displaystyle\bigcup_{x\in V} f(B(x;r_x))$ qui est donc ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Exo 3 $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, injective et df_a inversible pour tout $a \in U$. Alors f est un C^1-difféo global ~~de~~ U sur $f(U)$?

Par le TIL, f est un C^1-difféo local au voisinage de chaque point a de U.

Comme f est injective, f est bijective de U sur $f(U)$. On a alors $f^{-1} : f(U) \to U$. On note $g = f^{-1}$ pour simplifier.

Il suffit de vérifier que $g : f(U) \to U$ est de classe C^1.

Prenons $y \in f(U)$. On a $y = f(x)$ avec $x \in U$. Il existe un ouvert V_x contenant x tel que $f_{|V_x}$ soit un C^1-difféo de V_x sur $f(V_x)$.

Par conséquent $\left(f_{|V_x}\right)^{-1} : f(V_x) \to V_x$ est de classe C^1.

Maintenant, on doit avoir $\left(f_{|V_x}\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)_{|f(V_x)} = g_{|f(V_x)}$

donc g est de classe C^1 au voisinage de y.

Exo 5 $U =]0;+\infty[\times]-\pi;\pi[$ $\quad V = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \leq 0\}$

$\phi : U \to V \quad \phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

- ϕ est de classe C^1
- ϕ est injective : Si $(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ alors $r^2 = \rho^2$ donc $r = \rho$. On obtient donc $\cos\theta = \cos\alpha$ et $\sin\theta = \sin\alpha$ avec θ et $\alpha \in]-\pi,\pi[$ donc $\theta = \alpha$.
- ϕ surjective : $(x,y) \in V$ on pose $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad r > 0$.
  ~~...~~ le point $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$ est sur le cercle S^1 il existe θ unique sur $]-\pi,\pi[$ θ tel que $\frac{x}{r} = \cos\theta$ $\quad \frac{y}{r} = \sin\theta$

- $\mathrm{Jac}\,\phi_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad \det \mathrm{Jac}\,\phi_{r,\theta} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r > 0$

D'après l'exo 3, ϕ est un C^1-difféo global de U sur V.

$$U \xrightarrow{\phi} V \xrightarrow{f} \mathbb{R} \qquad f\circ\phi(r,\theta)$$

$$(r,\theta) \mapsto \phi(r,\theta)$$

$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

$$\mathrm{Jac}\,\phi_{(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Jac}\,f_{(x,y)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

$$\mathrm{Jac}\,f\circ\phi_{(r,\theta)} = \mathrm{Jac}\,f_{\phi(r,\theta)} \times \mathrm{Jac}\,\phi_{(r,\theta)}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta), \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right) \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\ )(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\ )(r\cos\theta) \Big)$$

$$\frac{\partial f\circ\phi}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta$$

$$\frac{\partial f\circ\phi}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\cos\theta .$$

<u>En gros</u>: $$\frac{\partial f\circ\phi}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \times \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f\circ\phi}{\partial \theta}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(r,\theta)) \times \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(r,\theta)) \times \frac{\partial y}{\partial \theta} .$$

Exo 6 $\quad f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 $\quad K$ compact ~~inclus~~ convexe inclus dans U.

$F_t : U \to \mathbb{R}^n \quad F_t = Id + t f \quad F_t$ est de classe C^1.

1°/ Si $x \in U$ $(dF_t)_x = Id + t\, df_x$

Comme f est C^1 la fonction $|||df||| : \begin{array}{l} U \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |||df_x||| \end{array}$ est continue.

Puisque $K \subset U$ est compact $|||df|||$ est bornée (et atteint ses bornes) sur K.

~~On~~ Il existe $M > 0$ tel que $|||df_x||| \leq M$ pour tout $x \in K$.

On prend $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon M < 1$ (par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2M}$).

Alors, pour tout $x \in K$ et tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $(dF_t)_x = Id + t\, df_x$

avec $|||t\, df_x||| < 1$ donc $(dF_t)_x$ est inversible.

Le TIL nous dit que F_t est un C^1-difféo local au voisinage de tout point $a \in K$, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

2°/ Il suffit de montrer que F_t est injective sur K.

Si $x, y \in K$ avec $F_t(x) = F_t(y)$, alors $x + t f(x) = y + t f(y)$

donc $x - y = t\left(f(y) - f(x)\right)$ donc $\|x - y\| = |t|\, \|f(y) - f(x)\|$

On utilise la convexité de K et le th. des accroissements finis :

Si $x \neq y$ $\quad \|f(y) - f(x)\| \leq \sup_{z \in [x,y]} |||df_z||| \times \|y - x\| \leq \sup_{z \in K} |||df_z|||\, \|x - y\|$

$\leq M\, \|x - y\|$

d'où $\|x - y\| \leq |t|\, M\, \|x - y\|$.

Or, $|t| < \varepsilon$ et $\varepsilon M < 1$ donc $|t| M < 1$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

On obtient $\|x - y\| < \|x - y\|$

Exo 7 $\varphi : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ C^1 $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert $\varphi(0)$ injective.

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = \varphi(x)(x)$.

f est C^1 : On considère $B : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$(h, x) \longmapsto h(x)$

B est bilinéaire donc de classe C^1 avec $dB_{(h,x)}(H, X) = B(h, X) + B(H, x)$
$= h(X) + H(x)$.

~~[illegible]~~ On considère aussi $A : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$. C'est de
$x \longmapsto (\varphi(x), x)$

classe C^1 car φ est C^1 et $Id_{\mathbb{R}^n}$ aussi.

On a $dA_x(X) = (d\varphi_x(X), X)$

Maintenant, on voit que $f = B \circ A$

$$x \xmapsto{A} (\varphi(x), x) \xmapsto{B} \varphi(x)(x)$$

donc f est de classe C^1 avec

$$\begin{aligned}
df_x(X) &= dB_{A(x)}(dA_x(X)) \\
&= dB_{(\varphi(x), x)}(d\varphi_x(X), X) \\
&= B(\varphi(x), X) + B(d\varphi_x(X), x) \\
&= \varphi(x)(X) + (d\varphi_x(X))(x).
\end{aligned}$$

Avec $x = 0$ on obtient $df_0(X) = \varphi(0)(X) + d\varphi_0(X)(0)$
$= \varphi(0)(X)$

d'où $df_0 = \varphi(0)$

Par hypothèse, $\varphi(0)$ est injective (donc inversible) donc df_0 aussi et on applique le TIL.

Exo 8 $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad C^1 \qquad \|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x-y\|$.

1°/ Si $f(x) = f(y)$ alors $\quad 0 \geqslant k\|x-y\|$ donc $x = y$.

2°/ Si $a \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n$ on a $\quad f(a+u) = f(a) + df_a(u) + \underbrace{o(\|u\|)}_{\|u\|\,\varepsilon(u)}$

$\varepsilon \to 0$

donc $\|df_a(u) + o(\|u\|)\| \geqslant k\|u\|$

Supposons que $u \in \operatorname{Ker} df_a$ i.e. $df_a(u) = 0$.
Pour tout réel t on a $\quad df_a(tu) + o(\|tu\|) = 0 + o(\|tu\|) = |t|\,\|u\|\,\varepsilon(tu)$

donc $\| |t|\,\|u\|\,\varepsilon(tu)\| \geqslant k\|tu\| = k|t|\,\|u\|$

Si $t \neq 0$ on a $\quad \|u\|\,\|\varepsilon(tu)\| \geqslant k\|u\|$

On fait tendre t vers 0 : $\lim\limits_{t\to 0} \|u\|\,\|\varepsilon(tu)\| = 0$

donc $\quad 0 \geqslant k\|u\|$ donc $u = 0$.

Par conséquence $\operatorname{Ker} df_a = \{0\}$ donc df_a est inversible. On peut appliquer le TIL.

3°/ Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $f(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers $y \in \mathbb{R}^n$.
On montre que $y \in f(\mathbb{R}^n)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad y_n = f(x_n) \quad x_n \in \mathbb{R}^n$. On montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc elle est de Cauchy donc,

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n, m \geqslant N) \quad \|y_n - y_m\| < \varepsilon$.

Comme $\|y_n - y_m\| \geqslant k\|x_n - x_m\|$ pour tout n et m, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy également.
Puisque $\mathbb{R}^n$ est complet, cette suite converge vers $x \in \mathbb{R}^n$.
Par la continuité de f on obtient $\quad y = f(x)$.
$\Rightarrow f(\mathbb{R}^n)$ fermé dans $\mathbb{R}^n$

$f(\mathbb{R}^n)$ ouvert : On a df_a inversible pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ et f C^1 donc d'après l'exercice 4, f est une application ouverte.

$\mathbb{R}^n$ est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ donc $f(\mathbb{R}^n)$ sera ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

f surjective : $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$ qui est connexe donc $f(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ ou $\mathbb{R}^n$. Comme $f(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, on a $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

5°) f est C^1, bijective de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$, df_a inversible pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ donc f est un C^1-difféo.

Exo 9 On définit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$.

$\mathcal{E} = f^{-1}(\{0\})$.

Soit $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ $\quad$ $\mathrm{Jac}\, f_p = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right)$

Comme $p \in \mathcal{E}$ $p \neq 0$ donc, on peut supposer, par exemple, que $z_0 \neq 0$.

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$ et f est C^1. Le th. des fcts. implicites donne l'existence d'un voisinage V de p dans $\mathbb{R}^3$, un voisinage W de (x_0, y_0) et d'une application $h : \begin{array}{l} W \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto h(x,y) \end{array}$ de classe C^1

tels que :

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,z) \in V \\ f(x,y,z) = 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} (x,y) \in W \\ z = h(x,y) \end{array}\right.$$

Ceci signifie que $\mathcal{E} \cap V$ est le graphe de $h : W \to \mathbb{R}$.

Exo 10 On étudie $f : E \to E$, $f(A) = A^2$

f est de classe C^1 et si $A, H \in E$, on a $df_A(H) = AH + HA$.

Ainsi, pour tout $H \in E$, $df_I(H) = 2H$ donc df_I est inversible.

On applique le TIL.