donc $\| x - [(1-t)\, p_C(x) + t\, y] \|^2 \geqslant \| x - p_C(x) \|^2$

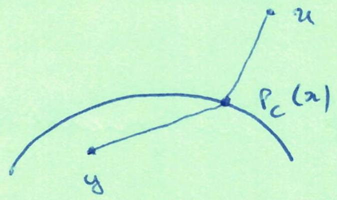
$$\| x - [(1-t)\, p_C(x) + t\, y] \|^2 = \| x - p_C(x) + t\,(p_C(x) - y) \|^2$$

donc $\| x - p_C(x) \|^2 + 2 \langle x - p_C(x), t\,(p_C(x) - y) \rangle + t^2 \| p_C(x) - y \|^2$

$$\geqslant \| x - p_C(x) \|^2$$

donc, pour $t \in]0;1]$, $\quad 2 \langle x - p_C(x), p_C(x) - y \rangle + t \| p_C(x) - y \|^2 \geqslant 0$

On fait $t \to 0^+$: $\quad 2 \langle x - p_C(x), p_C(x) - y \rangle \geqslant 0$



La condition $\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0$ peut s'interpréter comme : l'angle entre $x - p_C(x)$ et $y - p_C(x)$ est obtus.

5°/ Si $u \in C$ vérifie $\langle x - u, y - u \rangle \leq 0$ pour tout $y \in C$

on a $\| x - u \|^2 = \langle x - u, x - u \rangle = \langle x - u, x - y + y - u \rangle$ pour tout $y \in C$

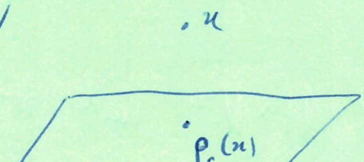
$$= \underbrace{\langle x - u, x - y \rangle}_{\substack{\leq \|x-u\| \times \|x-y\| \\ \text{par Cauchy-Schwarz}}} + \underbrace{\langle x - u, y - u \rangle}_{\leq 0 \text{ par hypothèse}}$$

donc $\| x - u \|^2 \leq \| x - u \| \times \| x - y \|$ pour tout $y \in C$

donc $\| x - u \| \leq \| x - y \|$ pour tout $y \in C$.

donc u vérifie $\| x - u \| = d(x; C)$ $\quad u = p_C(x)$.

6°/



On a $\langle x - p_C(x), y - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$

Or, $\{ y - p_C(x) \,;\, y \in C \} = C$ car C est un sous-espace vectoriel et $p_C(x) \in C$

On a donc $\langle x - p_C(x), y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$

et aussi $\langle x - p_C(x), -y \rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$

On obtient $\langle x - p_C(x), y \rangle = 0 \quad \forall y \in C$

Exo 6

1°/ $\|p_n(x)-x\| = d(x;C_n)$. On note $a_n = \|p_n(x)-x\|$.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

$a_{n+1} = d(x;C_{n+1})$ $\quad C_{n+1}\subset C_n$ donc $d(x;C_{n+1})\geq d(x;C_n)$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée :

On a $C\subset C_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc $d(x;C)\geq d(x;C_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2°/ Si n et m sont des entiers, on écrit l'identité du parallélogramme avec $x-p_n(x)$ et $x-p_m(x)$:

$$\|p_n(x)-p_m(x)\|^2 + \|2x - p_n(x) - p_m(x)\|^2 = 2\|x-p_n(x)\|^2 + 2\|x-p_m(x)\|^2$$

$$\text{donc } \|p_n(x)-p_m(x)\|^2 = 2\|x-p_n(x)\|^2 + 2\|x-p_m(x)\|^2 - \left[\|x-p_n(x)\|^2 + \|x-p_m(x)\|^2 - 2\langle x-p_n(x), x-p_m(x)\rangle\right]$$

$$= \|x-p_n(x)\|^2 + \|x-p_m(x)\|^2 + 2\langle x-p_n(x), x-p_m(x)\rangle$$

On a $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-p_n(x)\|^2 = 0$

$\lim\limits_{m\to\infty}\|x-p_m(x)\|^2 = 0$

et $|\langle x-p_n(x), x-p_m(x)\rangle| \leq \|x-p_n(x)\|\times\|x-p_m(x)\|$

On en déduit que si on prend $\varepsilon>0$ il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$\forall n,m\geq N,\quad \|p_n(x)-p_m(x)\|^2 < 4\varepsilon^2$

3°/ si $a,b\in C$ alors, puisque $C\subset C_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, le segment $[a,b]$ est inclus dans C_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ (car C_n est convexe). Ainsi $[a,b]\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = C$.

De plus, chaque C_n est fermé dans E et comme la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, chaque C_n est fermé dans C_0.

$C = \bigcap C_n$ est fermé dans C_0 comme intersection de fermés et C_0 est complet donc C est complet.

3°/ La suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et est incluse dans C_0 qui est complet donc elle converge vers $y \in C_0$.

On montre que $y \in C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$

Soit $k \in \mathbb{N}$. La suite $(p_n(x))_{n\geqslant k}$ est de Cauchy dans C_k qui est complet donc elle converge dans C_k. On a donc $y \in C_k$.

Ainsi $y \in C$.

Maintenant, on montre que $y = p(x)$ où $p(x)$ est la proj. de x sur C.

Comme $p_C(x) \in C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, on a $\|x - p(x)\| \geqslant \|x - p_n(x)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $\|x - p(x)\| \geqslant \lim_{n\to\infty} \|x - p_n(x)\| = \|x - y\|$

Or, $p(x)$ est l'unique élément de C qui vérifie

$$\|x - p(x)\| = d(x; C) = \inf_{y\in C} \|x - y\|$$

On doit donc avoir $y = p(x)$.

Exo 7

1°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \dots, e_n)$ et x_n la projection orthogonale de x sur F_n ($\dim F_n < +\infty \Rightarrow F_n$ est complet)

x_n est l'unique vecteur de F_n qui vérifie $\langle x - x_n, y\rangle = 0 \ \forall y \in F_n$.

On a donc, pour tout $k = 0, \dots, n$, $\langle x - \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, e_k \rangle$

$$= \langle x, e_k\rangle - \langle x, e_k\rangle \langle e_k, e_k\rangle = 0$$

donc $\langle x - \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, y\rangle = 0 \quad \forall y \in F_n$

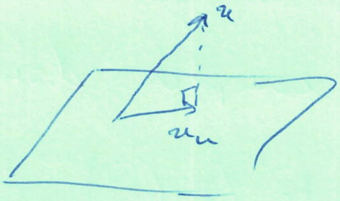
i.e. $x_n = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$.

Il est clair que $\|x_n\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$.

Maintenant, $d(x; F_n)^2 = \|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\langle x, x_n \rangle$

Or, on sait que $\langle x - x_n, x_n \rangle = 0$

donc $\langle x, x_n \rangle = \|x_n\|^2$



On obtient $d(x; F_n)^2 = \|x\|^2 - \|x_n\|^2$

donc $\|x\|^2 \geqslant \|x_n\|^2$.

On a montré que $\sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc la série réelle $\sum_{i \geqslant 0} \langle x, e_i \rangle^2$ converge avec

$\sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$.

2°/ On note $F = \mathrm{Vect}\{e_n ; n \in \mathbb{N}\}$. On sait que $x \in \overline{F} \Leftrightarrow d(x; F) = 0$

Si $x \in E$ on montre que $d(x; F) = \lim_{n \to \infty} d(x; F_n)$.

Comme $F_n \subset F_{n+1}$, la suite réelle $(d(x; F_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$

Comme $F_n \subset F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d(x; F) \leq d(x; F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $d(x; F) \leq \ell$.

Réciproquement, si $y \in F$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $y \in F_N$ (car $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$) donc $\|x - y\| \geqslant d(x; F_N) \geqslant \ell$.

On obtient $\|x - y\| \geqslant \ell$ pour tout $y \in F$ donc $d(x; F) \geqslant \ell$.

On a bien $d(x; F) = \lim_{n \to \infty} d(x; F_n)$.

Pour finir, on a vu que $d(x; F_n)^2 = \|x\|^2 - \|x_n\|^2$ donc :

$x \in \overline{F} \Leftrightarrow d(x; F) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} d(x; F_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \|x_n\|^2 = \|x\|^2$

$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \langle x, e_i \rangle^2 = \|x\|^2$.

3°/ On prend, pour $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$
$t \longmapsto e^{int}$

$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$. On a bien $\langle e_n, e_m \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}$

On a $E = \overline{\mathrm{Vect}\{e_n ; n \in \mathbb{Z}\}}$

En effet, d'après le th. de Stone - Weierstrass, tout $f \in E$ est limite uniforme (i.e. pour la norme $\| \|_\infty$) d'une suite de polynômes trigonométriques.

Comme $\| \|_2 \leq \| \|_\infty$, tout $f \in E$ est limite, pour $\| \|_2$, d'une suite de polynômes trigonométriques.

Exo 8

1°/ Si $f \in E$, on sait qu'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans F qui converge uniformément vers f. Ainsi, si on note $\| \|_\infty$ la norme $\|g\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |g(t)|$, on a $\lim_{n \to \infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.

Or, il est clair que pour tout $g \in E$, on a $\|g\|^2 = \int_0^1 g(t)^2\, dt \leq \int_0^1 \|g\|_\infty^2\, dt$

donc $\|g\| \leq \|g\|_\infty$.

On en déduit que $\lim_{n \to \infty} \|f - P_n\| = 0$.

2°/ Soit $f \in F^\perp$. On a $f = \lim_{n \to \infty} P_n$ avec $P_n \in F$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On écrit $\|f - P_n\|^2 = \|f\|^2 + \|P_n\|^2 - 2 \underbrace{\langle f, P_n \rangle}_{= 0 \text{ car } f \in F^\perp}$

donc $0 = \lim_{n \to \infty} \|f - P_n\|^2 = \|f\|^2 + \lim_{n \to \infty} \|P_n\|^2 = 2\|f\|^2$

donc $f = 0$.

On obtient $F^\perp = \{0\}$.

Comme $F^\perp = \{0\}$ on a $F \oplus F^\perp = F \subsetneq E$.

$F^{\perp\perp} = (F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq F$.

<u>Exo 9</u> $E = \mathcal{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ $\quad \langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$.

$F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ $\quad e_1(t) = 1 \quad e_2(t) = t \quad e_3(t) = t^2$

base de F.

<u>Rappel</u> :

Pour tout $f \in E$, on a

$$d(f; F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, e_3, f)}{\det G(e_1, e_2, e_3)}$$

où G est la matrice de Gram.

$$G(e_1, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \langle e_1, e_3 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \langle e_2, e_3 \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle & \langle e_3, e_2 \rangle & \langle e_3, e_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\pi & 0 & 2\pi^3/3 \\ 0 & 2\pi^3/3 & 0 \\ 2\pi^3/3 & 0 & 2\pi^5/5 \end{pmatrix} \quad \det G(e_1, e_2, e_3) = \dots$$

Si $f(t) = \sin t$

$$G(e_1, e_2, e_3, f) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \langle e_1, f \rangle \\ & G(e_1, e_2, e_3) & & \langle e_2, f \rangle \\ & & & \langle e_3, f \rangle \\ \hline \langle f, e_1 \rangle & \langle f, e_2 \rangle & \langle f, e_3 \rangle & \langle f, f \rangle \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 2\pi & 0 & \frac{2\pi^3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2\pi^3}{3} & 0 & 2\pi \\ \frac{2\pi^3}{3} & 0 & \frac{2\pi^5}{5} & 0 \\ \hline 0 & 2\pi & 0 & \pi \end{array}\right) \quad \det G(e_1, e_2, e_3, f) = \dots$$