Espaces complets, espaces pré-hilbertiens
Vendredi 10/12/2021

Exo 1

1°/ $\| \ \|_1$ est une norme ?

- Si $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n \geq 0} |x_n|$ converge donc $\sum_{n\geq 0} |\lambda x_n|$ converge avec $\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda x_n| = |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$

- Si $x \in E$ avec $\|x\|_1 = 0$ alors $|x_n| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $x = 0$.

- Si x et y sont dans E alors, comme $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série réelle $\sum_{n\geq 0} |x_n + y_n|$ converge et on a
$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|$$

$(E, \| \ \|_1)$ est complet ?

On considère une suite de Cauchy $(x^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ dans E.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ $x^{(p)}$ est une suite réelle $x^{(p)} = (x_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Par hypothèse, on a :
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N}) \ (\forall p, q \geq N) \ \|x^{(p)} - x^{(q)}\|_1 < \varepsilon.$$

Or, il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}| \leq \|x^{(p)} - x^{(q)}\|_1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite réelle $(x_n^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette suite converge. On note $x_n \in \mathbb{R}$ sa limite. On obtient ainsi une suite réelle $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il nous reste à montrer que :

- $x \in \ell^1(\mathbb{R})$
- $\lim_{p \to +\infty} \|x^{(p)} - x\|_1 = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(\forall p, q \geq N)$ $\|x^{(p)} - x^{(q)}\|_1 < \varepsilon$ c'est-à-dire $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}| < \varepsilon$

On va travailler avec les sommes partielles : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{k} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}| < \varepsilon \quad \text{pour tout } p, q \geq N.$$

On peut faire tendre q vers $+\infty$ dans la somme partielle (c'est une somme finie) :

$$\sum_{n=0}^{k} \lim_{q \to +\infty} |x_n^{(p)} - x_n^{(q)}| \leq \varepsilon$$

$$= \sum_{n=0}^{k} |x_n^{(p)} - x_n|$$

Si on résume, on a, pour tout $p \geq N$,

$$\sum_{n=0}^{k} |x_n^{(p)} - x_n| \leq \varepsilon \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

On a une série réelle à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées (par ε) donc la série $\sum_{n \geq 0} |x_n^{(p)} - x_n|$ converge pour tout $p \geq N$ avec $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n| \leq \varepsilon$.

Ainsi, $x^{(p)} - x \in \ell^1(\mathbb{N})$ pour tout $p \geq N$ donc $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ car $x^{(p)} \in \ell^1(\mathbb{N})$ qui est un espace vectoriel.

De plus, on a finalement montré que :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall p \geq N) \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n^{(p)} - x_n|}_{= \|x^{(p)} - x\|_1} \leq \varepsilon$$

On a bien $\lim_{p \to \infty} \|x^{(p)} - x\|_1 = 0$.

2°/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\varphi_n : \ell^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x_n$.

Comme φ_n est linéaire et $|\varphi_n(x)| \leq \|x\|_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, φ_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, si on note $A_n = |\varphi_n|^{-1}\left(]-\infty ; \frac{1}{n^3}]\right)$, A_n est fermé dans $\ell^1(\mathbb{R})$ car $|\varphi_n|$ est continue et $]-\infty ; \frac{1}{n^3}]$ est fermé dans $\mathbb{R}$.

Maintenant, on écrit que $A = \bigcap_{n \geq 1} A_n$ qui est fermé dans $\ell^1(\mathbb{R})$ comme intersection de fermés.

Exo2

1°/ Si $n, m \in \mathbb{N}$ avec par exemple $n \geqslant m$ on a

$$P_n(X) - P_m(X) = \frac{X^n}{n^2} + \cdots + \frac{X^{m+1}}{(m+1)^2}$$

donc $\|P_n - P_m\| = \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{(m+1)^2}$.

On sait que la série numérique $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}$ converge donc elle vérifie le critère de Cauchy :

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall k \geqslant N)\ (\forall d \in \mathbb{N})$$

$$\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(k+d)^2} < \varepsilon$$

On en déduit donc que $(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall n, m \geqslant N)$ $\|P_n - P_m\| < \varepsilon$, c'est-à-dire la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\ \|)$.

2°/ On suppose que $P_n \xrightarrow[n \to \infty]{} P$ dans E. On a $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$, $a_d \neq 0$.

Si $n > d$, par exemple $n = d + r$, alors on a

$$P_n(X) - P(X) = \frac{1}{(d+r)^2} X^{d+r} + \cdots + \frac{1}{(d+1)^2} X^{d+1} + \left(\frac{1}{d^2} - a_d\right) X^d + \cdots + (1 - a_1) X + a_0 X$$

Comme $\lim_{n \to \infty} P_n = P$, on doit avoir $a_d = \frac{1}{d^2}, \ldots, a_1 = 1$ et $a_0 = 0$

donc $P_n(X) - P(X) = \frac{1}{(d+r)^2} X^{d+r} + \cdots + \frac{1}{(d+1)^2} X^{d+1}$

et $\|P_n - P\| = \frac{1}{(d+r)^2} + \cdots + \frac{1}{(d+1)^2} \geqslant \frac{1}{(d+1)^2}$.

3°/ On a $\|P_n - P\| > \frac{1}{(d+1)^2}$ pour tout $n > d$ donc on ne peut pas avoir $\lim_{n \to \infty} \|P_n - P\| = 0$. La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge donc pas vers P.

$(E, \|\ \|)$ n'est pas complet.

Exo 3

1°/ Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\overline{H} = E$, il existe $y_\varepsilon \in H$ tel que $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$.

On a $H = \mathrm{Vect}(A)$ donc y_ε s'écrit $y_\varepsilon = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_p a_p$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_p \in A$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n(y_\varepsilon) = \lambda_1 T_n(a_1) + \dots + \lambda_p T_n(a_p).$$

Par hypothèse, les suites $(T_n(a_1))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (T_n(a_p))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent dans E donc la suite $(T_n(y_\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également.

2°/ Soit $\varepsilon > 0$. On considère alors $y_\varepsilon \in H$ comme dans 1°)

Si n et m sont dans $\mathbb{N}$, on écrit

$$T_n(x) - T_m(x) = T_n(x) - T_n(y_\varepsilon) + T_n(y_\varepsilon) - T_m(y_\varepsilon) + T_m(y_\varepsilon) - T_m(x)$$

donc
$$\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n(x) - T_n(y_\varepsilon)\| + \|T_n(y_\varepsilon) - T_m(y_\varepsilon)\| + \|T_m(y_\varepsilon) - T_m(x)\|$$

On a
$$\|T_n(x) - T_n(y_\varepsilon)\| = \|T_n(x - y_\varepsilon)\| \leq \|T_n\| \times \|x - y_\varepsilon\| \leq M\|x - y_\varepsilon\| < M\varepsilon$$

et de même $\|T_m(x) - T_m(y_\varepsilon)\| \leq M\|x - y_\varepsilon\| < M\varepsilon$

Par ailleurs, la suite $(T_n(y_\varepsilon))_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc elle est de Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n et m supérieurs à N, on a $\|T_n(y_\varepsilon) - T_m(y_\varepsilon)\| < \varepsilon$.

En résumé, pour tout $n, m \geq N$, on a

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| < (2M+1)\,\varepsilon.$$

Exo 4

1°/ Prenons $t > 0$. On a par hypothèse $\|f(x+th) - f(x)\| \leq k \|th\| = kt\|h\|$

De plus, comme f est différentiable, on peut écrire

$$f(x+th) - f(x) = df_x(th) + \|th\| \, \varepsilon(th) \quad \text{avec } \lim_0 \varepsilon = 0$$
$$= t\, df_x(h) + t\|h\| \, \varepsilon(th)$$

On obtient alors $\|t\,df_x(h) + t\|h\|\varepsilon(th)\| \leq kt\|h\|$

donc $\|df_x(h) + \|h\|\varepsilon(th)\| \leq k\|h\|$

Ceci est vrai pour tout $t > 0$ donc on peut faire tendre t vers 0^+

pour obtenir $\|df_x(h) + 0\| \leq k\|h\|$.

On a montré que $\|df_x(h)\| \leq k\|h\|$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$

donc $|||df_x||| = \sup_{h \neq 0} \dfrac{\|df_x(h)\|}{\|h\|} \leq k < 1$.

Par définition, on a $dF_x = Id + df_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Comme $|||df_x||| < 1$, l'application linéaire dF_x est un isomorphisme (son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n df_x^n$).

2°/ $g_y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g_y(x) = y - f(x)$.

Si x et x' sont dans $\mathbb{R}^n$, on écrit $\|g_y(x) - g_y(x')\| = \|-f(x) + f(x')\|$
$\leq k\|x - x'\|$ avec $k \in]0,1[$

Le théorème du point fixe de Picard nous dit alors que g_y admet un unique point fixe.

Il est facile ~~de~~ de voir que :

x est un point fixe de $g_y \iff g_y(x) = x \iff y - f(x) = x \iff y = x + f(x)$
$\iff y = F(x)$

Comme g_y admet un unique point fixe, on peut dire que y admet un unique antécédent par F. Ainsi, F est bijective.

3°/ F bijective et dF_x inversible pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ donc F est
F C^1
un C^1-difféo.

Exo 5

1°/ $d(x;C) = \inf_{y \in C} \|x-y\|$. On peut alors écrire que :

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists y_\varepsilon \in C)\quad d(x;C) \leq \|x - y_\varepsilon\| < d(x;C) + \varepsilon$

En prenant successivement $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ou $\frac{1}{2^n}$ on obtient alors une suite

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = d(x;\varepsilon)$.

2°/ Identité du parallélogramme : $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$

On montre que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

$a = x - y_n \qquad b = x - y_m$

$\|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2$

donc $4\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2$

Comme C est convexe, $\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}y_m \in C$ et donc $\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_m)\|^2 \geq d(x;C)$

donc $4\,d(x;C) + \|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2$

On a $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \lim_{m\to\infty} \|x - y_m\| = d(x;C)$

et $0 \leq \|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\,d(x;C)$

dom, si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n, m \geq N$

$\|y_n - y_m\|^2 < \varepsilon$.

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans C qui est complet donc elle converge vers $y \in C$. On a bien $\|x - y\| = d(x;C)$.

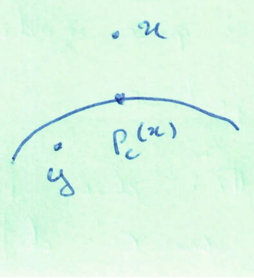
3°/ S'il existe $y' \in C$ tel que $\|x - y'\| = d(x;C)$. L'identité du parallélogramme avec $a = x - y$ et $b = x - y'$ donne

$\|y - y'\|^2 + \|2x - (y + y')\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2$

donc $\|y - y'\|^2 = 4\,d(x;C) - 4\underbrace{\|x - \frac{1}{2}(y + y')\|^2}_{\geq d(x;C)^2}$

donc $\|y - y'\|^2 \leq 0$. On obtient $y = y'$.

4°/



Pour $t \in [0,1]$, $(1-t)p_c(x) + ty \in C$ par convexité.

donc $\|x - [(1-t)p_c(x) + ty]\| \geq d(x;C) = \|x - p_c(x)\|$