A est fermé : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ converge vers $x \in U$ on a $f(x_n) = f(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, comme f est continue, $f(x) = f(x_0)$.

Conclusion : A est ouvert et fermé dans U connexe donc $A = \emptyset$ ou U. Comme $A \neq \emptyset$, $A = U$.

Exo 10 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{4}x^3$

Points critiques : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y + \frac{3}{4}x^2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y$

$$\begin{cases} 2x + y + \frac{3}{4}x^2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -4y + y + \frac{3}{4}\times 4y^2 = 0 \\ x = -2y \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 - y = 0 \\ x = -2y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 2 pts critiques $(0,0)$ et $(-2, 1)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{3}{2}x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$

$$\Rightarrow \text{Hess} f_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3x}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{Hess} f_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det = 4 - 1 > 0$ et $2 > 0 \Rightarrow$ définie positive $\Rightarrow$ minimum

$\text{Hess} f_{(-2,1)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \det = -2 - 1 < 0 \Rightarrow$ pas d'extremum.

Rappel : Si $\text{Hess} f_{(a,b)} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ $\quad rt - s^2 > 0$ $\quad r > 0 \Rightarrow$ déf pos. $\quad r < 0 \Rightarrow$ déf neg.

$rt - s^2 < 0$ pas d'extremum.

On a ici un minimum local en $(0,0)$. On a $f(0,0)=0$. C'est-ce un minimum global ?

$$f(x,0) = x^2 + \frac{1}{4}x^3 \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$ donc 0 n'est pas un min global.

Exo 9 : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable U convexe.

1°) Si f est convexe : Soient x et y dans U, on a $[x;y] \subset U$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a par convexité de f

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t f(y)$$

donc $$f(x + t(y-x)) - f(x) \leq -t f(x) + t f(y)$$

i.e. (pour $t \in]0,1]$) $$\frac{1}{t}\left[f(x+t(y-x)) - f(x)\right] \leq f(y) - f(x)$$

On fait tendre t vers 0^+ :

La fonction $g : t \mapsto f(x + t(y-x))$ est dérivable au voisinage de 0 et on a $g'(t) = df_{x+t(y-x)}(y-x)$

donc $$g'(0) = df_x(y-x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(x+t(y-x)) - f(x)\right]$$

On obtient donc $df_x(y-x) \leq f(y) - f(x)$.

Réciproque : Soient x et y dans U. Pour tout $t \in [0,1]$ on note $z_t = (1-t)x + ty$. On a par hypothèse

$$\left.\begin{array}{l} f(x) - f(z_t) \geq df_{z_t}(x - z_t) \\ f(y) - f(z_t) \geq df_{z_t}(y - z_t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x) \geq f(z_t) + df_{z_t}(x-z_t) \\ f(y) \geq f(z_t) + df_{z_t}(y-z_t) \end{array}\right.$$

donc $$(1-t)f(x) + tf(y) \geq (1-t)f(z_t) + t f(z_t) + (1-t)\,df_{z_t}(x-z_t) + t\, df_{z_t}(y-z_t)$$

c'est-à-dire

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f(z_t) + df_{z_t}\big(\underbrace{(1-t)(x-z_t) + t(y-z_t)}_{\substack{\parallel \\ (1-t)x+ty\ -\ z_t\ =\ 0 \text{ par définition}}}\big)$$

$$z_t = (1-t)x + ty$$

Conclusion : $(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty)$

2°/ Si $df_a = 0$ alors, pour tout $y \in U$, on a

$$f(y) - f(a) \geq df_a(y-a) = 0$$

donc $f(y) \geq f(a)$.

3°/ $\varphi_{xy} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_{xy}(t) = f((1-t)x + ty)$.

Si f est convexe : on fixe $x, y \in U$. Pour $t, \tau \in [0,1]$ et tout $\alpha \in [0,1]$, on a

$$\varphi_{xy}((1-\alpha)t + \alpha\tau) = f\big((1-(1-\alpha)t - \alpha\tau)x + ((1-\alpha)t + \alpha\tau)y\big)$$

$$= f\big((1-\alpha+\alpha-(1-\alpha)t-\alpha\tau)x + ((1-\alpha)t+\alpha\tau)y\big)$$

$$= f\big((1-\alpha)(x-tx) + \alpha(x-\tau x) + (1-\alpha)ty + \alpha\tau y\big)$$

$$= f\big((1-\alpha)((1-t)x+ty) + \alpha((1-\tau)x+\tau y)\big)$$

$$\leq (1-\alpha)f((1-t)x+ty) + \alpha f((1-\tau)x+\tau y)$$

$$= (1-\alpha)\varphi_{xy}(t) + \alpha\varphi_{xy}(\tau)$$

Réciproque : Si tous les φ_{xy} sont convexes.

Prenons x et y dans U. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) = \varphi_{xy}(t) = \varphi_{xy}(1 \times t + (1-t) \times 0)$$

$$\leq t\varphi_{xy}(1) + (1-t)\varphi_{xy}(0)$$

$$= t f(y) + (1-t) f(x)$$

4°/ f de classe C^2 donc pour tout x et y, φ_{xy} est également C^2.

f est convexe $\Leftrightarrow$ φ_{xy} convexe pour tout x, y

$\Leftrightarrow$ φ'_{xy} croissante

$\Leftrightarrow$ $\varphi''_{xy} \geq 0$ pour tout x, y

Si x et $y \in U$, on a

$$\varphi_{xy}(t) = f((1-t)x + ty)$$

$$\varphi'_{xy}(t) = df_{(1-t)x+ty}(y-x)$$

$$\varphi''_{xy}(t) = \frac{d}{dt}\left[df_{(1-t)x+ty}(y-x)\right]$$

$$= \left[\frac{d}{dt} df_{(1-t)x+ty}\right](y-x)$$

$$df : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n ; \mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dt} df_{(1-t)x+ty} = d(df)_{(1-t)x+ty}\left(\frac{d}{dt}((1-t)x+ty)\right)$$

$$= d(df)_{(1-t)x+ty}(y-x)$$

donc $\varphi''_{xy}(t) = d^2f_{(1-t)x+ty}(y-x)(y-x)$

C'est-à-dire $\varphi''_{xy}(t) = d^2f_{(1-t)x+ty}(y-x, y-x) = d^2f_{x+t(y-x)}(y-x, y-x)$

On a montré que f convexe $\Leftrightarrow (\forall x,y \in U)\ (\forall t \in [0,1])$

$$d^2f_{x+t(y-x)}(y-x, y-x) \geq 0$$

Ceci implique en prenant $a = x$, $t = 0$ et $h = y-x$ que

$$d^2f_a(h,h) \geq 0 \quad \text{pour tout } a \in U \text{ et tout } h \in \mathbb{R}^n.$$

Réciproquement, si $d^2f_a(h,h) \geq 0$ pour tout $a \in U$ et tout $h \in \mathbb{R}^n$

alors pour tout $x, y \in U$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$d^2f_{x+t(y-x)}(y-x, y-x) \geq 0.$$

<u>Exo 11</u> : $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \langle Ax \mid x\rangle - \langle u \mid x\rangle$ $\quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sym déf posit. $x \in \mathbb{R}^n$.

1/ $x \mapsto \langle u \mid x\rangle$ est C^∞ car linéaire
$x \mapsto (Ax, x)$ —
$\langle\, ,\, \rangle$ est C^∞ car bilinéaire
$\Big\} \Rightarrow \varphi\ C^\infty$

~~[illegible]~~

Pour calculer $d\varphi$, on peut utiliser la formule de différentiation composée ou bien faire directement :

$$\begin{aligned}
\varphi(a+h) &= \langle A(a+h) \mid a+h\rangle - \langle u \mid a+h\rangle \\
&= \langle Aa + Ah \mid a+h\rangle - \langle u \mid a+h\rangle \\
&= \langle Aa \mid a\rangle + \langle Ah \mid a\rangle + \langle Aa \mid h\rangle \\
&\quad + \langle Ah \mid h\rangle - \langle u \mid a\rangle - \langle u \mid h\rangle \\
&= \varphi(a) + \left[\langle Ah \mid a\rangle + \langle Aa \mid h\rangle - \langle u \mid h\rangle\right] \\
&\quad + \langle Ah \mid h\rangle.
\end{aligned}$$

$h \mapsto \langle Ah \mid a\rangle + \langle Aa \mid h\rangle - \langle u \mid h\rangle$ est linéaire

et $|\langle Ah \mid h\rangle| \leq \|Ah\|\,\|h\|$ avec $\lim_{h\to 0} \|Ah\| = 0$

donc $\langle Ah \mid h\rangle = o(\|h\|)$.

On a donc $d\varphi_a(h) = \langle Aa + {}^tAa - u \mid h \rangle$

2°/ A est symétrique définie positive donc elle est diagonalisable dans une base orthonormée et a des valeurs propes strictement positives.

Il existe une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_n\}$, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ strictement positifs tels que $Ae_k = \lambda_k e_k$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

On a $Ax = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k e_k$ et donc

$$\langle Ax \mid x \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \lambda \|x\|^2$$

où λ est la plus petite des valeurs propres.

Maintenant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\langle u, x \rangle \leq \|u\| \, \|x\|$$

donc $$-\langle u, x \rangle \geq -\|u\| \, \|x\|$$

On obtient donc $\varphi(x) = \langle Ax \mid x \rangle - \langle u \mid x \rangle \geq \lambda \|x\|^2 - \|u\|\|x\|$.

3°/ Points critiques de φ : $d\varphi_a = 0 \iff Aa + {}^tAa = u$

$\iff 2Aa = u$ car ${}^tA = A$

$\iff a = \frac{1}{2} A^{-1} u$

On n'a qu'un seul point critique donc un seul extremum potentiel.

φ est continue et $\lim_{\|x\| \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$ donc φ admet un minimum global (résultat classique de topologie). On en déduit que ce minimum est en $a = \frac{1}{2} A^{-1} u$. Il n'y a pas d'autre extremum.

$$\varphi(a) = \langle Aa \mid a \rangle - \langle u \mid a \rangle = \langle \tfrac{1}{2} u \mid a \rangle - \langle u \mid a \rangle = -\tfrac{1}{2} \langle u \mid a \rangle$$

si $u = \sum u_k e_k$ alors $\varphi(a) = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k^2}{\lambda_k}$. car $a = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{\lambda_k} e_k$

Exo 12 $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2.

1°) On a $z=(z_1,\dots,z_n)$. Pour tout $k\in\{1,\dots,n\}$ on note

$\phi_k : I_k \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(z_1,\dots,z_{k-1},t,z_{k+1},\dots,z_n)$ où I_k est un intervalle ouvert autour de z_k.

ϕ_k est de classe C^2. ϕ_k admet un maximum en z_k donc $\phi_k'(z_k)=0$ et $\phi_k''(z_k) \le 0$.

On a $\phi_k'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(z_1,\dots,z_{k-1},t,z_{k+1},\dots,z_n)$

$\phi_k''(t) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(z_1,\dots,z_{k-1},t,z_{k+1},\dots,z_n)$

donc $\phi_k''(z_k) \le 0 \iff \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(z) \le 0$

On a donc $\Delta f(z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(z) \le 0$.

2°) $f : \bar{U} \to \mathbb{R}$ C^2 sur U et C^0 sur $\bar{U}$ $\Delta f = 0$ sur U.

. f est C^0 sur $\bar{U}$ fermé borné donc compact $\Rightarrow (\exists a \in \bar{U})\ f(a) = \sup_{x\in\bar{U}} f(x)$.

. $M = \sup_{Fr(U)} f$. On suppose que $f(a) > M$.

$f_\varepsilon : \bar{U} \to \mathbb{R}$ $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2$ pour $\varepsilon > 0$

a/ $\bar{U}$ borné donc $(\exists R>0)$ $\bar{U} \subset \bar{B}(0;R)$

On a donc $\sup_{Fr(U)} f_\varepsilon = \sup_{x\in Fr(U)} \left(f(x) + \varepsilon\|x\|^2\right) \le \sup_{Fr(U)} f + \varepsilon R^2 = M + \varepsilon R^2$

b/ Pour tout $x \in \bar{U}$, $f_\varepsilon(x) \ge f(x)$ donc $f_\varepsilon(a) \ge f(a)$

On a $\sup_{Fr(U)} f_\varepsilon \le M + \varepsilon R^2$ pour tout $\varepsilon > 0$

Comme $M < f(a)$ il existe $\alpha > 0$ petit tel que $M < M + \varepsilon R^2 < f(a) \le f(a) + \varepsilon\|a\|^2$ pour tout $\varepsilon \in]0;\alpha[$.

On a donc $\sup_{Fr(U)} f_\varepsilon \le M + \varepsilon R^2 < f_\varepsilon(a)$ pour $\varepsilon \in]0;\alpha[$.

c) En résumé on a $f_\varepsilon(a) > \sup_{Fr(U)} f_\varepsilon$ donc $\sup_{\overline{U}} f_\varepsilon$ n'est pas atteint sur la frontière $Fr(U)$ donc est atteint dans U.

Il existe $c \in U$ tel que $f_\varepsilon(c) = \sup_{\overline{U}} f_\varepsilon$

D'après la question 1) on doit avoir $\Delta f_\varepsilon(a) \leq 0$

Or, $\Delta f_\varepsilon(a) = \Delta f(a) + \varepsilon . 2n = \varepsilon . 2n > 0$