Calcul différentiel
16/10/2021

Exo 1 $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = \langle x, f(x) \rangle$ avec $f \in \mathcal{L}(E)$

~~On note~~ Si $a \in E$ et $h \in E$ on écrit

$$\varphi(a+h) = \langle a+h, f(a+h) \rangle = \langle a+h, f(a)+f(h) \rangle$$
$$= \langle a, f(a) \rangle + \langle a, f(h) \rangle + \langle h, f(a) \rangle + \langle h, f(h) \rangle$$
$$= \varphi(a) + \left(\langle a, f(h) \rangle + \langle h, f(a) \rangle \right) + \langle h, f(h) \rangle$$

L'application $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $h \longmapsto \langle a, f(h) \rangle + \langle h, f(a) \rangle$

est linéaire.

On montre que $\langle h, f(h) \rangle = o(\|h\|)$

on a $|\langle h, f(h) \rangle| \leq \|h\| \, \|f(h)\|$ par Cauchy-Schwarz

$$\leq \|h\| \times \underbrace{|||f||| \times \|h\|}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 0}}$$

Conclusion : φ est bien différentiable avec, pour tout $a \in E$,

$$d\varphi_a : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d\varphi_a(h) = \langle a, f(h) \rangle + \langle h, f(a) \rangle.$$

Rappel : $\nabla \varphi(a)$ est le vecteur de E qui vérifie

$$\langle \nabla \varphi(a), h \rangle = d\varphi_a(h) \qquad \text{(cf algèbre linéaire)}$$
$$d\varphi_a \in E^*$$

Ici, $d\varphi_a(h) = \langle a, f(h) \rangle + \langle h, f(a) \rangle$

$$= \langle {}^t f(a), h \rangle + \langle h, f(a) \rangle$$
$$= \langle {}^t f(a) + f(a), h \rangle \quad \text{car } \forall h \in E$$

donc $\nabla \varphi(a) = {}^t f(a) + f(a)$.

Exo 2 : Si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ $\det A$ est un polynôme en les a_{ij} c'est donc bien différentiable.

On peut écrire : $\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ en identifiant une matrice avec ses n colonnes.

det est n-linéaire donc c'est différentiable et si $(A_1, \dots, A_n) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ et $(H_1, \dots, H_n) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ alors

$$d \det_{(A_1,\dots,A_n)} (H_1, \dots, H_n) = \det(H_1, A_2, \dots, A_n) + \det(A_1, H_2, A_3, \dots, A_n) + \dots + \det(A_1, \dots, A_{n-1}, H_n)$$

Ainsi, on voit que, si $H = (h_{ij})_{1 \le i,j \le n}$,

$$d \det_I (H) = \det \begin{pmatrix} h_{11} & 0 & & 0 \\ \vdots & 1 & & \\ & & \ddots & \\ h_{n1} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & h_{12} & & 0 \\ 0 & h_{22} & & \\ & \vdots & 1 & \\ 0 & h_{n2} & 0 & 1 \end{pmatrix} + \dots$$

$$+ \det \begin{pmatrix} 1 & & h_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & 1 & h_{nn} \end{pmatrix} = h_{11} + h_{22} + \dots + h_{nn}$$
$$= \operatorname{Tr}(H).$$

Si A est inversible, on écrit pour tout H

$$\det(A + H) = \det(A(I + A^{-1}H)) = (\det A) \times (\det(I + A^{-1}H))$$

Or, par la différentiabilité en I, on a

$$\det(I + A^{-1}H) = \det I + d \det_I (A^{-1}H) + \|A^{-1}H\| \, \varepsilon(A^{-1}H)$$

avec $\varepsilon \underset{0}{\longrightarrow} 0$

donc $\det(I + A^{-1}H) = 1 + \operatorname{Tr}(A^{-1}H) + \|A^{-1}H\| \, \varepsilon(A^{-1}H)$

donc $\det(A+H) = \det A + \underbrace{\det A \times \operatorname{Tr}(A^{-1}H)}_{\text{linéaire en } H} + \underbrace{\det A \|A^{-1}H\| \varepsilon(A^{-1}H)}_{o(\|H\|)\,?}$

on prend une norme qui vérifie $\|MN\| \le \|M\| \|N\|$. On a alors

$$\frac{\det A \; \|A^{-1}H\| \, \varepsilon(A^{-1}H)}{\|H\|} \le \frac{\det A \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|H\| \cdot \varepsilon(A^{-1}H)}{\|H\|} = (\det A) \|A^{-1}\| \, \varepsilon(A^{-1}H).$$

Si $H \to 0$ alors $A^{-1}H \to 0$ et donc $\varepsilon(A^{-1}H) \to 0$ OK.

Exo 3 : $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On note $\varphi_k : E \times \cdots \times E \longrightarrow E$
$(A_1, \ldots, A_k) \longmapsto A_1 \ldots A_k$

φ_k est k-linéaire donc elle est différentiable avec

$$d\varphi_{k\,(A_1,\ldots,A_k)}(H_1,\ldots,H_k) = H_1 A_2 \ldots A_k + A_1 H_2 \ldots A_k + \cdots + A_1 \ldots A_{k-1} H_k$$

On peut décomposer θ_k de la façon suivante :

$$E \xrightarrow{J_k} E \times \cdots \times E \xrightarrow{\varphi_k} E$$

$$A \longmapsto (A, \ldots, A) \longmapsto A \ldots A = A^k$$

J_k est différentiable car chacune de ses composantes l'est. On a

$$dJ_{k\,A}(H) = (H, H, \ldots, H)$$

donc $\theta_k = \varphi_k \circ J_k$ est différentiable avec

$$d\theta_{k\,A}(H) = d\varphi_{k\,J_k(A)}\left(dJ_{k\,A}(H)\right)$$

$$= d\varphi_{k\,(A,\ldots,A)}(H, \ldots, H)$$

$$= HA^{k-1} + AHA^{k-2} + A^2HA^{k-3} + \cdots + A^{k-1}H.$$

Exo 4 $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f(A) = \det A \times \operatorname{Tr}\left(A^3 (A^2)^t\right)$

On note $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad B(M,N) = \operatorname{Tr}(M\,{}^tN)$

c'est bilinéaire donc différentiable avec

$$dB_{(M,N)}(H,K) = B(M,K) + B(H,N)$$

$\varphi : E \longrightarrow E \times E$ $\quad \varphi(A) = (A^3, A^2) = (\theta_3(A), \theta_2(A))$

φ est diff. car θ_3 et θ_2 le sont et

$$d\varphi_A(H) = \left(d\theta_{3\,A}(H), d\theta_{2\,A}(H)\right)$$

Par conséquent, $B\circ\varphi$ est diff. avec

$$d(B\circ\varphi)_A(H) = dB_{\varphi(A)}\left(d\varphi_A(H)\right) = dB_{(A^3, A^2)}\left(HA^2+AHA+A^2H,\ HA+AH\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(A^3\ (HA+AH)^t\right) + \mathrm{Tr}\left((HA^2+AHA+A^2H)\ A^{2^t}\right)$$

Pour finir, on pose $F : E \to \mathbb{R}$ $\quad F(A) = \det A$

$G : E \to \mathbb{R}$ $\quad G = B\circ\varphi$

F et G sont diff donc $f = F\times G$ l'est aussi avec

$$df_A(H) = F(A)\, dG_A(H) + G(A)\, dF_A(H)$$

$$= (\det A)\left[\mathrm{Tr}\left(A^3(HA+AH)^t\right) + \mathrm{Tr}\left((HA^2+AHA+A^2H)\, A^{2t}\right)\right]$$

$$+ \mathrm{Tr}\left(A^3 (A^2)^t\right) \times \left(\mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Cof}(A) H\right)\right)$$

Retour sur l'exo 2

Si $A \in Gl_n(\mathbb{R})$ $\quad dF_A(H) = \det A\ \mathrm{Tr}(A^{-1}H) = \mathrm{Tr}\left((\det A) A^{-1} H\right)$

or $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^t\mathrm{Cof}(A)$ donc $dF_A(H) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Cof}(A)\, H\right)$

On sait que $Gl_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A = \lim_{h\to+\infty} A_h$ avec $A_h \in Gl_n(\mathbb{R})$.

Comme F est C^1 (C^∞) $\quad dF$ est continue donc

$$dF_A(H) = \lim_{h\to\infty} dF_{A_h}(H) \quad \text{pour tout } H$$

$$= \lim_{h\to\infty} \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Cof}(A_h)\, H\right)$$

$\Omega \mapsto {}^t\mathrm{Cof}(\Omega)$ est C^0 car les coeff sont polynômiaux

donc $dF_A(H) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{Cof}(A)\, H\right)$.

Exo 5

1°/ $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$ $f(0,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-y}{y} = -1$$

On regarde $\varepsilon(x,y) = \dfrac{1}{\|(x,y)\|}\left[f(x,y) - f(0,0) - x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} - x + y\right] = \frac{x^3 - y^3 - x^3 - xy^2 + x^2y + y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-xy^2 + x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \longrightarrow \frac{\deg 3}{\deg 3} \dots$$

$$|\varepsilon(x,-x)| = \left|\frac{-x^3 - x^3}{(2x^2)^{3/2}}\right| = \frac{2}{2^{3/2}} = 1/\sqrt{2} \quad \cancel{\xrightarrow[x \to 0]{}} 0$$

=> f n'est pas diff. en $(0,0)$.

2°/ $f(x,y) = \dfrac{xy^3 - x^3y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $f(0,0) = 0$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$\varepsilon(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|}\left[f(x,y) - f(0,0) - x \times 0 - y \times 0\right] = \frac{xy^3 - x^3y}{x^2+y^2}$$

$$|\varepsilon(x,y)| \leq \frac{|xy^3| + |x^3y|}{x^2+y^2} = \frac{|xy|\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |xy| \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$

donc f est diff en $(0,0)$.

Exo 6

f est diff en $(0,0)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

$$|\varepsilon(x,y)| = \left|\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}\right| \leq |xy| \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On sait que $2|xy| \leq x^2+y^2$ donc $|\varepsilon(x,y)| \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(0,0)]{} 0$

f est C^1 si $(x,y) \neq (0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3) \times 2x}{(x^2+y^2)^2}$

$$= \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

Est-ce que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$?

On pose $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

on obtient $\dfrac{r^5\cos^4\theta\sin\theta + 4r^5\cos^2\theta\sin^3\theta - r^5\sin^5\theta}{r^4} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

De même, on montre que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

donc f est C^1.

<u>f n'est pas C^2</u> : si c'était vrai, on aurait (Schwarz)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

On a $f(y,x) = -f(x,y)$

donc $\frac{\partial}{\partial x}\left(f(y,x)\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y)\right)$

i.e. $\frac{\partial f}{\partial y}(y,x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

donc $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(y,x)\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)$

i.e. $\dfrac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}(y,x) = -\dfrac{\partial\frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x,y)$

i.e. $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(y,x) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ d'où $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$

Or, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -\frac{y^5}{y^4} = -y$ donc $\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \frac{-y}{y} = -1$

donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = -1$.

Pourquoi $\frac{\partial}{\partial x}\left[f(y,x)\right] = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$

$(x,y) \overset{p}{\mapsto} (y,x) \xrightarrow{f} f(y,x) \qquad \tilde{f} = f\circ p \qquad \tilde{f}(x,y) = f(y,x)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(y,x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{f}(x,y)\right] = d\tilde{f}_{(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}x, \frac{\partial}{\partial x}y\right) = d\tilde{f}_{(x,y)}(1,0)$$
$$= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x,y)\times 1.$$

$$d\tilde{f}_{(x,y)}(1,0) = d(f\circ\varphi)_{(x,y)}(1,0) = df_{\varphi(x,y)}\left(d\varphi_{(x,y)}(1,0)\right)$$

$$= df_{(y,x)}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(y,x)$$

Exo 7 On travaille avec une norme qui vérifie $\|MN\| \leq \|M\|\,\|N\|$.

Φ bien définie : Pour tout $p \geq 0$, $\|a_p M^p\| \leq |a_p|\,\|M\|^p$

Le rayon de convergence de $\sum_{p\geq 0} a_p z^p$ est $R>0$ donc, pour tout $r \in]0;R[$ la série $\sum_{p\geq 0} a_p r^p$ converge absolument.

Ainsi, si $\|M\| < R$ la série $\sum_{p\geq 0} |a_p|\,\|M\|^p$ converge donc $\sum_{p\geq 0} a_p M^p$ converge.

Φ est donc bien définie sur $B(0;R)$.

Φ différentiable : On a une série d'application $\Phi = \sum_{p\geq 0} f_p$

où $f_p : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \longmapsto a_p M^p$ $\qquad f_p$ est diff.

Rappel : Si $\sum_p f_p$ C.S. sur U

Si $\sum_p df_p$ C.U. sur U

Alors $f = \sum df_p$ est diff sur U avec $df = \sum_{p\geq 0}^{+\infty} df_p$.

$\sum df_p$ C.U ? $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)$

$$|||\, df_a - \sum_{p=0}^{n} (df_p)_a \,||| < \varepsilon \quad \text{pour tout } a \in U$$

Plutôt convergence normale : il existe une suite réelle $(\alpha_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que
- $\sum_p \alpha_p$ converge
- $|||(df_p)_a||| \leq \alpha_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $a \in U$.

~~[illegible]~~

$$df_{p_A}(H) = HA^{p-1} + AHA^{p-2} + \cdots + A^{p-1}H$$

donc $\dfrac{\|df_{p_A}(H)\|}{\|H\|} = \dfrac{|a_p|\,\|HA^{p-1} + AHA^{p-2} + \cdots + A^{p-1}H\|}{\|H\|}$

$$\leq p\frac{\|H\|\,\|A\|^{p-1}}{\|H\|}|a_p| = p\,\|A\|^{p-1}|a_p|$$

donc $|||df_{p_A}||| = \sup_{H\neq 0} \dfrac{\|(df_p)_A(H)\|}{\|H\|} \leq p\|A\|^{p-1}|a_p|$

Le rayon de convergence de $\sum_p a_p z^p$ est R donc $\sum_p p a_p z^{p-1}$ a le même rayon de convergence.

Donc pour tout z tel $|z|<R$, la série $\sum p a_p z^{p-1}$ converge absolument.

Si $\|A\|<r<R$ alors $|||df_{p_A}||| \leq p|a_p| r^{p-1}$

Comme $\sum_p p|a_p|r^{p-1}$ cvge, la série $\sum_p df_p$ converge normalement sur $B(0;r)$. On en déduit que f est différentiable sur $B(0;r)$. Ceci est vrai pour tout $r\in]0;R[$ donc f est diff sur $B(0;R)$.

<u>Exo 8</u> : $f: U \to \mathbb{R}^m$ diff, U ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. $df_x = 0$ $\forall x\in U$.

$A = \{x\in U \mid f(x) = f(x_0)\}$.

<u>A ouvert</u> : Soit $x\in A$. ~~[illegible] On applique [illegible]~~

U ouvert $\Rightarrow (\exists \varepsilon>0)$ $B(x;\varepsilon)\subset U$.

Si $y\in B(x,\varepsilon)$ alors en appliquant le T.A.F. (car $[x,y]\subset U$)

on a $\|f(x)-f(y)\| \leq \|x-y\| \sup_{z\in[x,y]} |||df_z||| = 0$ donc

$f(y) = f(x) = f(x_0)$.

On a donc $y\in A$ pour tout $y\in B(x;\varepsilon)$ donc $B(x,\varepsilon)\subset A$

d'où A ouvert.