CT Janvier 2018

Exo 1 : 1°/ $u_n = \ln(1+2^{-n}) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^n}$ car $\lim_{n \to \infty} 2^{-n} = 0$ et $\ln(1+X) \underset{0}{\sim} X$

la série géométrique $\sum \frac{1}{2^n}$ converge car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

donc $\sum u_n$ converge.

2°/ $a_n = \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n}+1)}$ On a une série alternée $\sum (-1)^n a_n$

Il suffit de montrer (c'est facile) que $a_n \geq 0$, $a_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3°/ $v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On utilise le critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-1}$$

(cf partiel). Comme $0 \leq e^{-1} < 1$, la série converge.

Exo 2 $f_n(t) = \dfrac{n}{n+e^t}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1°/ On fixe $t \in \mathbb{R}$, on a alors $\lim_{n \to \infty} f_n(t) = 1$ donc, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2°/ Si $t \in]-\infty; a]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left|f_n(t) - f(t)\right| = \left|\frac{n}{n+e^t} - 1\right| = \left|\frac{n-n-e^t}{n+e^t}\right| = \frac{e^t}{n+e^t}$$

on écrit d'abord que $n + e^t \geq n$ car $e^t \geq 0$ donc $\frac{1}{n+e^t} \leq \frac{1}{n}$

De plus, si $t \in]-\infty, a]$ alors $e^t \leq e^a$. On en déduit que

$|f_n(t) - f(t)| \leq \dfrac{e^a}{n}$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{t \in]-\infty; a]} |f_n(t) - f(t)| \right) = 0$.

On en déduit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $]-\infty; a]$.

3°/ On a $\lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t) = 0$

Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ alors, on aurait $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{t\to+\infty} f_n(t)\right)$

c'est-à-dire $1 = 0$...

Exo 3

1°/ d'Alembert $u_n = \dfrac{(n+1)^3}{n!}$ $\qquad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+2)^3}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{(n+1)^3} = \dfrac{1}{n+1} \times \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^3$

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$ donc $R = +\infty$.

2°/ Si $|x| < 1$ alors $|\sin(n)\, x^n| \leq |x|^n$ et comme $\sum |x|^n$ converge, $\sum |\sin(n)\, x^n|$ converge aussi donc $\sum \sin(n)\, x^n$ converge absolument. On en déduit que $R \geq |x|$ et ceci est vrai pour tout $x \in]-1; 1[$ donc $R \geq 1$.

Maintenant, si $x = 1$ alors $\sin(n)\, 1^n = \sin(n)$ et on sait que $\sin(n)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ donc $\sum \sin(n)\, 1^n$ diverge grossièrement. Par conséquent, $R \leq 1$.

On obtient $R = 1$.

Rappel : Comment montrer que $\sin(n)$ ne tend pas vers 0 ?

On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n) = 0$ alors on a

$$\underset{\substack{\downarrow n\to\infty\\ 0}}{\sin(n+1)} = \underset{\substack{\downarrow n\to\infty\\ 0}}{\sin(n)}\cos 1 + \cos(n)\sin 1$$

Comme $\sin 1 \neq 0$, on doit alors avoir $\lim_{n\to\infty} \cos(n) = 0$

Maintenant, on écrit $\cos^2(n) + \sin^2(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc, en passant à la limite, on obtient $0+0=1$...

<u>Exo 4</u> $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g_n(t) = \frac{1}{n^2} \operatorname{Arctan}(nt)$

1°/ On sait que $(\forall y \in \mathbb{R})\ -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(y) < \frac{\pi}{2}$

c'est-à-dire $|\operatorname{Arctan}(y)| < \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent, $|g_n(t)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.

2°/ La série réelle $\sum_{n\geq 1} \frac{\pi}{2n^2}$ converge (série de Riemann) donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On en déduit la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

3°/ $\left.\begin{array}{l} (\forall n \geq 1)\ g_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \sum_{n\geq 1} g_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4°/ $(\forall n \geq 1)$ g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g_n'(t) = \frac{1}{n^2} \frac{n}{1+(nt)^2}$

$(\forall n \geq 1)(\forall t \in [\varepsilon; +\infty[)$ on a $|g_n'(t)| = \frac{1}{n(1+n^2t^2)} \leq \frac{1}{n+n^2\varepsilon^2} \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}$

Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2\varepsilon^2}$ converge, la série $\sum_{n\geq 1} g_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\varepsilon; +\infty[$.

En résumé : $\left\{\begin{array}{l} (\forall n \geq 1)\ g_n \text{ est } C^1 \text{ sur } [\varepsilon; +\infty[\\ \sum_{n\geq 1} g_n \text{ converge simplement sur } [\varepsilon; +\infty[\\ \sum_{n\geq 1} g_n' \text{ converge sur } [\varepsilon; +\infty[\end{array}\right.$

par conséquent, g est C^1 sur $[\varepsilon; +\infty[$ (avec $g' = \sum g_n'$) et ce, pour tout $\varepsilon > 0$ donc g est C^1 sur $]0; +\infty[$.

De même, on peut montrer que g est C^1 sur $]-\infty; 0[$.