Université Paul Sabatier
L2 Parcours Spéciaux, Intégration

Année 2018–2019
Semestre 3

Contrôle Terminal - 17 décembre 2018

Aucun document n'est autorisé pour cet examen. De même, les machines à calculer, téléphones portables, ordinateurs et tablettes sont interdits. Cette épreuve dure 2 heures.

Toute réponse devra être **justifiée** et **rédigée**.

Exercice 1 : 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)}{n^4} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)}{3^n} x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} x^{3n+1}$

2. Montrer que $\cos(n)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{n} x^n$.

Exercice 2 : Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$.

Exercice 3 : On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. Déterminer le domaine $\mathcal{D}$ (dans $\mathbb{R}$) sur lequel la série de fonctions converge simplement. On notera f sa somme.

2. Si on note, pour tout $n \geq 1$, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$, expliquer pourquoi on a $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\ln(nx)|}$.

3. Etudier la continuité de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

4. Déterminer, en justifiant, les limites de f en 1 et $+\infty$.

5. Montrer que f est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

Exercice 4 : Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \leq n \\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

Dans cet exercice, on admettra que si $u \in]-1; 1[$ alors $-u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1-u) \leq -u$.

1. Déterminer la limite simple, f, de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$.

2. Soit $a > 0$. Montrer que pour tout n suffisamment grand, on a $e^{-x-\frac{x^2}{2n}} \leq f_n(x) \leq e^{-x}$ pour tout $x \in [0; a]$.

En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0; a]$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [a; +\infty[$ et tout $n \geq 1$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0; +\infty[$.