Université Paul Sabatier — Année 2017–2018
L2 Parcours Spéciaux, Intégration — Semestre 3

Contrôle Terminal - 10 janvier 2018

Aucun document n'est autorisé pour cet examen. De même, les machines à calculer, téléphones portables, ordinateurs et tablettes sont interdits. Cette épreuve dure 2 heures.

Toute réponse devra être **justifiée** et **rédigée**.

Exercice 1 : Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries numériques suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln\left(1+e^{-n}\right)$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\ln\left(\sqrt{n}+1\right)}$ 3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(t) = \dfrac{n}{n+e^t}$.

On s'intéresse alors à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonction. Donner sa limite f.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout intervalle de la forme $]-\infty\,; a]$, pour $a \in \mathbb{R}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f_n(t)$. Est-ce que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^3}{n!}x^n$ 2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \sin(n)x^n$

Exercice 4 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $g_n(t) = \dfrac{1}{n^2}\mathrm{Arctan}(nt)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On notera g la somme éventuelle de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|g_n(t)| \leq \frac{\pi}{2n^2}$
2. Etudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} g_n$.
3. Est-ce que la somme g est continue sur $\mathbb{R}$?
4. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer g est de classe C^1 sur $[\varepsilon\,; +\infty[$ et $]-\infty\,; -\varepsilon]$. En déduire que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.