Université Paul Sabatier | Année 2019–2020
L2 Parcours Spéciaux, Intégration | Semestre 3

Corrigé du Contrôle Terminal - 17 décembre 2019

Exercice 1 : 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1} x^n$

solution On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = 1$. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence $R = 1$;

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{n+1} x^n$

solution On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence $R = 1/2$;

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} x^{2n}$

solution On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} y^n$. Pour cette série, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^n)(n+1)!}{(n+1)^{n+1} n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{n\ln(1+1/n)}}$. Par l'équivalence $\ln(1+x) \sim x$ en 0, on obtient $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{1}{e}$. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de cette série entière $R = 1/e$. Par conséquent, la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} y^n$ est absolument convergent si $|y| < 1/e$ et divergente si $|y| > 1/e$. Donc la série numérique $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} x^{2n}$ est absolument convergent si $|x| < \sqrt{1/e}$ et divergente si$|x| > \sqrt{1/e}$. D'où, le rayon de convergence de la série entière initiale $R = \sqrt{1/e}$;

2. Montrer que pour tout $|x| < 1$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{n^2+1}$ est absolument convergente et que pour tout $|x| > 1$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{n^2+1}$ diverge. En déduire le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{n^2+1}$.

solution Si $|x| < 1$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |x|^{n^2+1} \leq \sum_{n\geq 0} |x|^n = \frac{1}{1-|x|}$. Par le principe de comparaison, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{n^2+1}$ est absolument convergente. D'autre part, si $|x| > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} |x|^{n^2+1} = +\infty$. En conséquence, a série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^{n^2+1}$ diverge. Finalement, le rayon de convergence $R = 1$.

Exercice 2 : Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n!} x^n$.

solution On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(2^n + (-1)^n)}{n!(2^{n+1} + (-1)^{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(1 + (-1/2)^n)}{2 - (-1/2)^n} = +\infty$.

Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence $R = +\infty$;
D'autre part

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{n!} x^n - 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - 2 = e^{2x} + e^{-x} - 2$$

Exercice 3 : On considère la fonction $f :]0; +\infty[\times [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,t) = \left(\sin^2 t\right) e^{-xt}$.

1. Montrer que la fonction $\varphi :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)dt$, est bien définie.

   solution On a $0 \leq f(x,t) \leq e^{-xt}$ et $\int_0^\infty e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ si $x > 0$. Par comparaison, $\varphi(x)$ est bien définie ;
2. Montrer que φ est continue sur $]0; +\infty[$.

   solution Fixe $\varepsilon > 0$ et on a $\forall (x,t) \in [\varepsilon; +\infty[\times [0; +\infty[$, $0 \leq f(x,t) \leq e^{-\varepsilon t}$. $\int_0^\infty e^{-\varepsilon t} dt$ converge et f est continue sur $[\varepsilon; +\infty[\times [0; +\infty[$. Donc φ est continue sur $[\varepsilon; +\infty[$, et d'ù φ est continue sur $]0; +\infty[$ car $\varepsilon > 0$ est quelconque.

Exercice 4 : Si $q \in [0, 1[$, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \ln(1 + q^n x)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur l'intervalle $[-1, 1]$. On note f la somme de cette série.

   solution On a $\ln(1 + x) \sim x$ en 0 et donc $f_n(x) \sim q^n x$ car $q^n \to 0$. La série géométrique $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ converge car $q \in [0, 1[$. De plus $f_n(x)$ garde le signe. Par l'équivalence, la série numérique $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge et donc la série de fonctions converge simplement sur l'intervalle $[-1, 1]$.

2. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ on a $\ln(1 - q^n) \leq f_n(x) \leq \ln(1 + q^n)$.

   En déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que $u_n \sim q^n$ lorsque n tend vers l'infini, et pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $|f_n(x)| \leq u_n$.

   solution On sait que la fonction $\ln(\cdot)$ est croissante sur $]0; +\infty[$. Donc $-q^n \leq q^n x \leq q^n, \forall x \in [-1, 1]$ implique $\ln(1 - q^n) \leq f_n(x) \leq \ln(1 + q^n)$. En posant $u_n = \max\{-\ln(1 - q^n), \ln(1 + q^n)\} = -\ln(1 - q^n)$, on trouve le résultat car $-\ln(1 - q^n) \sim q^n$.

3. Montrer que la fonction f est continue sur $[-1, 1]$.

   solution Par les résultat au-dessus, on sait $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ et que $u_n \sim q^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ converge. Par l'équivalence et comparaison, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$ converge. Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge normalement et alors converge uniformément. D'autre part, f_n est continue sur $[-1, 1]$. D'où le résultat.

4. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

   solution On a $f'_n(x) = \frac{q^n}{1+q^n x}$. Alors $\forall x \in [-1, 1], n \geq 1$, on a $|f'_n(x)| \leq \frac{q^n}{1-q^n} \leq \frac{q^n}{1-q}$, c'est-à-dire, $\sup_{x \in [-1,1]} |f'_n(x)| \leq \frac{q^n}{1-q}$. On note $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^n}{1-q}$. Par comparaison, $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge normalement et donc converge simplement.

5. Montrer que f est de classe C^1 sur $[-1,1]$.
solution On note que f'_n est continue sur l'intervalle $[-1,1]$. Par convergence normale (uniforme), f est de classe C^1 sur $[-1,1]$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x)$.

6. Soit $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définies par $g_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+q^k x)$. Montrer que cette suite converge simplement vers une fonction g sur l'intervalle $[-1,1]$ (on pourra utiliser les fonctions ln ou exponentielle).
solution On note $g_n(x) = e^{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)}$ et donc $\lim_n g_n(x) = e^{\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)} = e^{f(x)}$ car exponentielle est une fonction continue.

7. (facultatif) Montrer que la convergence de la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est uniforme. Montrer que g est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

solution On note $M := \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$. Donc $\forall x \in [-1,1], n \geq 1$, $|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq M$. Par le théorème d'accroissements finis, $\forall x \in [-1,1], m > n \geq 1$, on a

$$|g_m(x) - g_n(x)| \leq e^M |\sum_{k=n}^{m} f_k(x)|$$

Donc $\|g_m - g_n\|_\infty \leq e^M \sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_\infty$. Par la critère de Cauchy, $\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=n}^{m} \|f_k\|_\infty = 0$. Par la critère de gendarme, $\lim_{n,m\to\infty} \|g_m - g_n\|_\infty = 0$. Encore une fois par la critère de Cauchy, la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément et donc g est de classe C^0 sur $[-1,1]$ car g_n est de classe C^0 sur $[-1,1]$. On note $N := \sum_{n=1}^{+\infty} \|f'_n\|_\infty$ et remarque $g'_n(x) = g_n(x)\sum_{k=1}^{n} f'_k(x)$. Donc $\lim_{n\to\infty} g'_n(x) = g(x)\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x) = g(x)f'(x)$. Par conséquent, $\|g'_n - g\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n\|_\infty \leq \|g_n - gf'\|f'_k\|_\infty + \|g_n\|_\infty \|\sum_{k=1}^{n} f'_k - f'\|_\infty \leq N\|g_n - g\|_\infty + e^M \|\sum_{k=1}^{n} f'_k - f'\|_\infty$ car $|g'_n(x) - g(x)\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x))| \leq |g_n(x)\sum_{k=1}^{n} f'_k(x) - g(x)\sum_{k=1}^{n} f'_k(x)| + |g(x)(\sum_{k=1}^{n} f'_k(x) - f'(x))|$. Alors g'_n est continue sur $[-1,1]$ et converge uniformément vers gf'. Donc g est de classe C^1 sur $[-1,1]$ et $g'(x) = g(x)f'(x)$.
Une autre solution pour que g soit de classe C^1 : $g(x) = e^{f(x)}$ où f, exp sont de classe C^1, donc g est de classe C^1.
8. (facultatif) Montrer que $g(x) = (1+qx)g(qx)$ $\forall |x| \leq 1$.

$$\textit{solution } g(x) = \lim_n g_n(x) = \lim_n \prod_{k=1}^{n}(1+q^k x) = (1+qx)\lim_n \prod_{k=1}^{n-1}(1+q^k(qx)) = (1+qx)g(qx)$$

9. (facultatif) On admet que g est analytique au voisinage de 0, c'est-à-dire, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que $a_n = \frac{q^n}{1-q^n}a_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ et $a_0 = 1$. En déduire le terme a_n et déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

solution On a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = g(x) = (1+qx)g(qx) = (1+qx)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (qx)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{n+1} x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + a_{n-1})q^n x^n$. En comparant des coefficients, on trouve $a_n = \frac{q^n}{1-q^n}a_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ et puis $1 = g(0) = a_0$. D'où $a_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1-q^k}$. On a $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} =$

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-q^{n+1}}{q^{n+1}} = +\infty$. Par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence $R = +\infty$.