

Intégration - Contrôle Partiel - 14 octobre 2019

Les documents, machines à calculer, téléphones portables, ordinateurs et tablettes sont interdits. Cette épreuve dure **1h30**. Toute réponse devra être **justifiée** et **rédigée** correctement.

Question de cours : rappeler pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 1 : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \cos(2t) dt \quad 2. \int_1^{+\infty} t(e^{1/t^2} - 1) dt \quad 3. \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{1-t+t^3} dt$$

Exercice 2 : Déterminer la nature des séries numériques suivantes :

$$1. \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2} \quad 2. \sum_{n \geq 0} n \sin\left(\frac{\pi}{n^3 + 2n + 1}\right) \quad 3. \sum_{n \geq 1} \frac{(\sin n)(\ln n)}{n}$$

Exercice 3 : 1. Montrer que si $\alpha \in \mathbf{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\alpha n} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$ [indication : on pourra utiliser un développement limité].

2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On définit $u_n = e^{\alpha n^2} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^3}$. Donner la nature de la série $\sum u_n$ en fonction de α .

Exercice 4 : Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de suite suivante de fonctions définies sur $[0, 1]$:

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2},$$

et déterminer la fonction limite si elle existe.

Exercice 5 : Facultatif

On considère une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ strictement positive tels que, au voisinage de $+\infty$, on ait

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de terme général $a_n = n^\alpha$ est de ce type.

2. On suppose $\alpha > -1$. Etant donné $\beta \in]-1, \alpha[$, montrer que $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}.$$

En déduire à l'aide de principe de comparaison que la série $\sum a_n$ diverge.

3. On suppose $\alpha < -1$. Etant donné $\beta \in]\alpha, -1[$, montrer que $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}.$$

En déduire à l'aide de principe de comparaison que la série $\sum a_n$ converge.

4. Application : étudier la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n+2)}.$$

Correction

Question de cours : La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 1 : 1. Pour tout $X > 0$, on a $\int_0^X \cos(2t) dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^X = \frac{\sin(2X)}{2}$. On sait que $\sin(2X)$ n'a pas de limite lorsque X tend vers $+\infty$ donc, l'intégrale diverge.

2. On remarque d'abord que $t(e^{1/t^2} - 1)$ est positif pour tout $t \geq 1$. Maintenant, on sait que pour u proche de 0, on a l'équivalent $e^u - 1 \sim u$ donc, on peut écrire que $e^{1/t^2} - 1 \sim 1/t^2$ lorsque t tend vers l'infini, ce qui donne au final l'équivalent $t(e^{1/t^2} - 1) \sim 1/t$.

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} t(e^{1/t^2} - 1) dt$ diverge également.

3. On peut utiliser la règle d'Abel. Pour tout $X > 1$, on a

$$\left| \int_1^X \sin t dt \right| = |-\cos X + \cos 1| \leq |\cos X| + |\cos 1| \leq 2.$$

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1-t+t^3}$ est décroissante sur $[1; +\infty[$ (il suffit de calculer sa dérivée) et tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. La règle d'Abel nous assure alors que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{1-t+t^3} dt$ converge.

Une autre solution serait de montrer que cette intégrale est absolument convergente. En effet, on a

$$\left| \frac{\sin t}{1-t+t^3} \right| \leq \frac{1}{|1-t+t^3|} \sim \frac{1}{t^3}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt$ converge, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{1-t+t^3} \right| dt$ converge et donc, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{1-t+t^3} dt$ converge aussi.

Exercice 2 : 1. Remarquons d'abord qu'il s'agit d'une série dont le terme général est positif. On va utiliser la règle de Cauchy. En notant $u_n = \left(\frac{n}{n+2} \right)^{n^2}$, on a alors

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n}{n+2} \right)^n = \left(1 - \frac{2}{n+2} \right)^n$$

donc, par la méthode habituelle (rappelée ci-dessous...), on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-2} < 1$. Par conséquent, la règle de Cauchy donne la convergence de la série.

Rappelons la technique : on écrit $\left(1 - \frac{2}{n+2} \right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{2}{n+2})}$. Or en $+\infty$, on a l'équivalent $n \ln \left(1 - \frac{2}{n+2} \right) \sim n \times \left(-\frac{2}{n+2} \right) \sim -2$. On obtient donc bien la limite e^{-2} .

2. On note $v_n = n \sin \left(\frac{\pi}{n^3 + 2n + 1} \right)$. Pour n suffisamment grand, les v_n sont positifs. De plus, un équivalent donne

$$v_n \sim n \times \frac{\pi}{n^3 + 2n + 1} \sim \frac{\pi}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge également.

3. On peut utiliser la règle d'Abel. La suite $\left(\frac{\ln n}{n} \right)_{n \geq 1}$ est positive, décroissante à partir de $n \geq 3$ et tend vers 0. Pour vérifier qu'elle est décroissante, le mieux est d'étudier les variations de la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ en calculant sa dérivée.

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a,

$$\sum_{k=1}^n \sin k = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(e^{ki}) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n e^{ki}\right) = \operatorname{Im}\left(e^i \frac{1 - e^{ni}}{1 - e^i}\right).$$

Donc,

$$\left|\sum_{k=1}^n \sin k\right| \leq \left|e^i \frac{1 - e^{ni}}{1 - e^i}\right| \leq \frac{|1| + |e^{ni}|}{|1 - e^i|} \leq \frac{2}{|1 - e^i|}.$$

La règle d'Abel nous donne alors la convergence de la série.

Exercice 3 : 1. On commence par remarquer que pour n suffisamment grand (en fait $n > \alpha$), on a $1 - \frac{\alpha}{n} > 0$. Par conséquent, si n est assez grand, alors on écrit

$$e^{\alpha n} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2} = e^{\alpha n} \times e^{n^2 \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)} = e^{\alpha n + n^2 \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)}.$$

Maintenant, on rappelle que pour x proche de 0, on a le développement limité à l'ordre 2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x),$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

On obtient donc les calculs suivants, pour n proche de l'infini.

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) &= -\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha^2}{2n^2} + \frac{\alpha^2}{n^2} \varepsilon\left(-\frac{\alpha}{n}\right) \\ n^2 \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) &= -n\alpha - \frac{\alpha^2}{2} + \alpha^2 \varepsilon\left(-\frac{\alpha}{n}\right) \\ \alpha n + n^2 \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) &= -\frac{\alpha^2}{2} + \alpha^2 \varepsilon\left(-\frac{\alpha}{n}\right) \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini dans la dernière équation, on obtient le résultat demandé.

2. On va utiliser la règle de Cauchy. On fixe $\alpha \in \mathbf{R}$. Pour $n > \alpha$, on a $u_n > 0$ et

$$\sqrt[n]{u_n} = u_n^{\frac{1}{n}} = e^{\alpha n} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}.$$

D'après la question précédente, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$. Si $\alpha \neq 0$ alors $e^{-\frac{\alpha^2}{2}} < 1$ et donc la série de terme général u_n converge (règle de Cauchy).

Maintenant, si $\alpha = 0$ alors $u_n = 1$ pour tout n et donc la série diverge.

Exercice 4 : On commence par la convergence simple. Si on fixe $x \in [0, 1]$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} = 0.$$

Par conséquent, la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0, 1]$.

Maintenant, pour la convergence uniforme, on va déterminer $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0|$. Pour $n \in \mathbf{N}$ la fonction f_n est dérivable et

$$f'_n(x) = \frac{1 + n^2 x^2 - x(2n^2 x)}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}.$$

Par conséquent, f_n est croissante sur $[0; \frac{1}{n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n}; 1]$.

On en déduit que $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$, ce qui donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = 0.$$

On a donc bien la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 5 : 1. Si $a_n = n^\alpha$ alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha$. On utilise maintenant le développement limité suivant : pour x proche de 0, on a $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$. Par conséquent, pour n proche de $+\infty$, on a bien

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. On a vu que $\frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} = 1 + \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc, on peut écrire

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta} = \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left[(\alpha - \beta) + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \right]$$

où $\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Comme $\alpha - \beta > 0$ il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $(\alpha - \beta) + \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0$. On obtient donc bien $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}$ pour tout $n \geq n_0$.

Maintenant, il suffit d'écrire (pour $n \geq n_0$)

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \dots \times \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \geq \frac{n^\beta}{(n-1)^\beta} \times \dots \times \frac{(n_0+1)^\beta}{n_0^\beta} = \frac{n^\beta}{n_0^\beta}$$

ce qui donne $a_n \geq a_{n_0} \frac{n^\beta}{n_0^\beta}$ pour $n \geq n_0$. Comme $\beta > -1$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} n^\beta$ diverge et donc la série de terme général a_n diverge.

3. Par la même méthode, on montre que si $\beta < \alpha$ alors il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{(n+1)^\beta}{n^\beta}$ ce qui donne $a_n \leq a_{n_0} \frac{n^\beta}{n_0^\beta}$ pour $n \geq n_0$. Comme $\beta < -1$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} n^\beta$ converge et donc la série de terme général a_n converge.

4. On note $a_n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n+2)}$.

On a alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+4} = \frac{2n+4-3}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n} \times \frac{1}{1+2/n}$$

Maintenant, on peut écrire pour n proche de l'infini, $\frac{1}{1+2/n} = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui donne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{3}{2n} \left(1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = 1 - \frac{3}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme $-\frac{3}{2} < -1$ la série de terme général a_n converge.