Particules dans un potentiel de surface

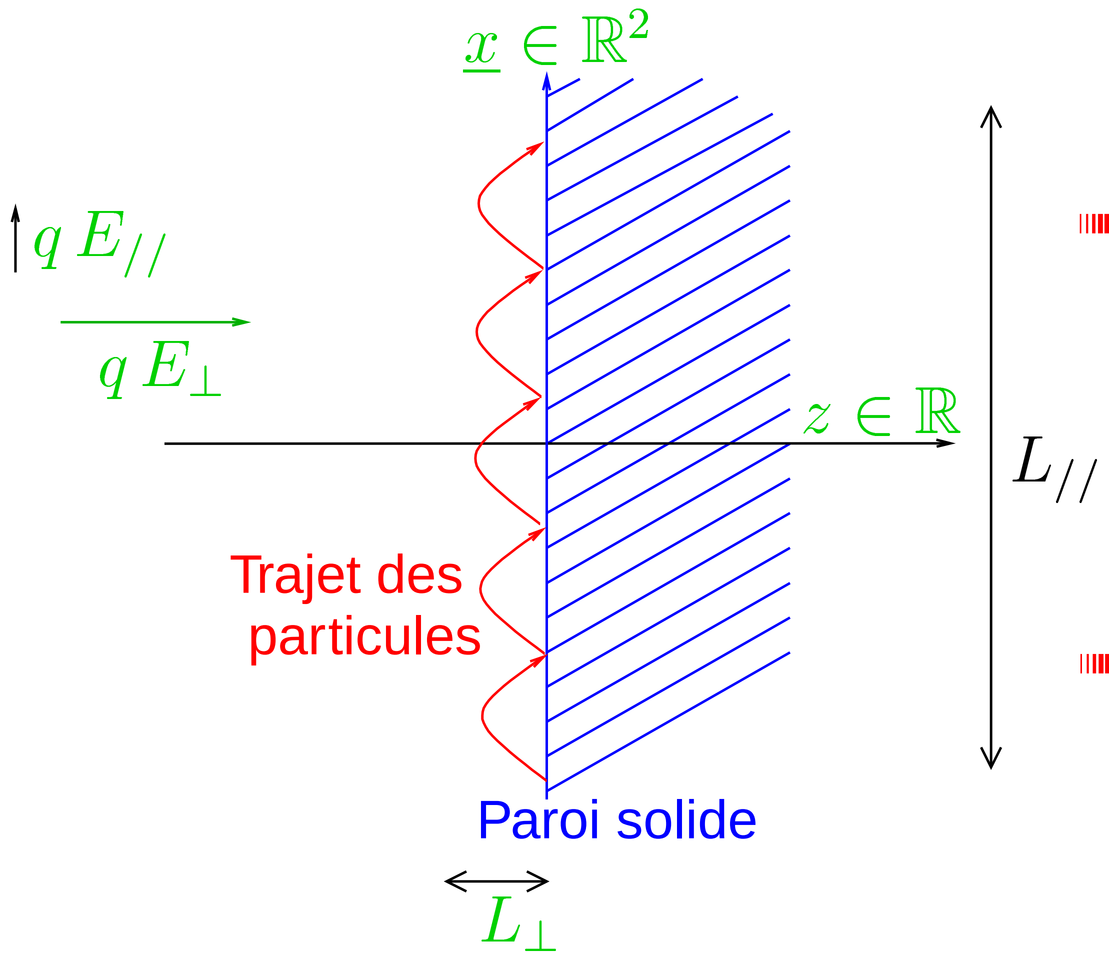
Une limite asymptotique du modèle de Vlasov-Poisson

P. Degond, C. Parzani, M. H. Vignal

Laboratoire MIP, Toulouse, France

{degond,parzani,mhvignal}@mip.ups-tlse.fr

Problématique (1)



➠Potentiel confinant

$$\frac{L_\perp}{L_{//}} = \alpha << 1$$

➠Bcp de collisions

But Modèle mathématique le moins coûteux possible

[P. Degond], [N. Ben Abdallah, F. Mehats, O. Pinaud]

Problématique (2)

Départ : modèle Vlasov-Poisson

- Description cinétique

$$f(x, v, t)$$

position dans $\mathbb{R}^3$

vitesse dans $\mathbb{R}^3$

temps dans $\mathbb{R}^+$

dimension 7

- Limite asymptotique ($\alpha = L_\perp / L_{//} \to 0$) lorsque

1. Potentiel confinant ($\Rightarrow$ 2-D en espace)
2. Collisions spéculaires dominantes

Modèle cinétique en variables physiques (1)

Variables :

- Position $x = (\underline{x}, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^- = \Omega$
- Vitesse $v = (\underline{v}, v_z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$
- Temps $t \in I\!R^+$

Inconnues :

- Fonction de distribution des particules : $f(x, v, t)$
- Potentiel auto-consistant : $\phi_a(x, t)$

Données :

- potentiel confinant : $\phi(x, t)$
- Donnée initiale : $f_0(x, v)$

Modèle cinétique en variables physiques (2)

Vlasov :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \frac{q}{m} \nabla_x (\phi + \phi_a) \cdot \nabla_v f = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^3 \times I\!R^+$$

Poisson :

$$-\Delta \phi_a = \frac{q}{\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} f \, dv \quad \text{dans} \quad \Omega \times I\!R^+$$

CI : $f(t=0) = f_0$

CL pour Poisson $\lim\limits_{|x| \to 0} \phi_a(x, \cdot) = 0, \quad \partial_z \phi_a(z=0) = 0$

Modèle cinétique en variables physiques (3)

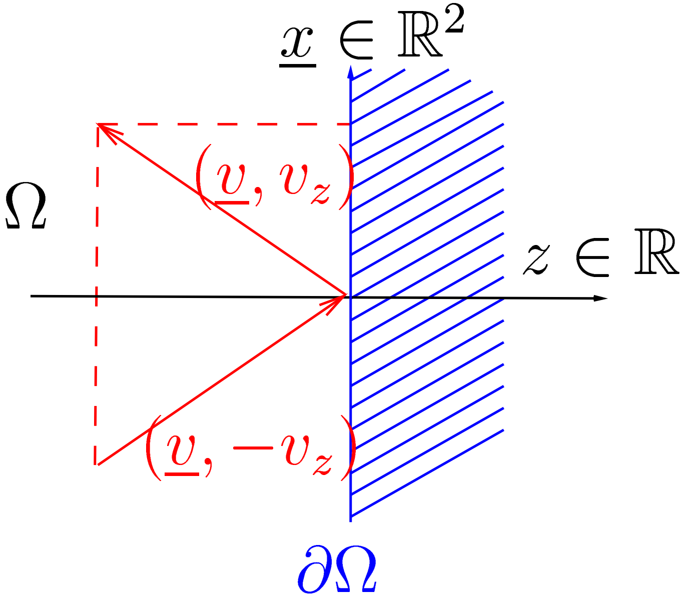
Condition aux limites sur $\partial\Omega$

Pour Vlasov

$$\gamma^-(f)(v_z) = \beta\,\gamma^+(f)(-v_z) + (1-\beta)\,\mathcal{K}(\gamma^+(f))(v_z) \quad \text{pour } v_z < 0$$

collisions spéculaires

collisions non spéculaires



Trace entrante

$$\gamma^+(f)(-v_z) = f(z=0, -v_z) \quad \text{pour } v_z <$$

Trace sortante

$$\gamma^-(f)(v_z) = f(z=0, v_z) \quad \text{pour } v_z < 0$$

Adimensionnement

Var. adimensionnées $\bar{x} = (\underline{\bar{x}}, \bar{z})$, $\bar{v} = (\underline{\bar{v}}, \bar{v}_z)$, $\bar{t}$ en $O(1)$

➠ $z = L_\perp \, \bar{z} = \alpha \, L_{//} \bar{z} \quad \Rightarrow \quad z = O(\alpha)$

➠ $\underline{x}$, $\underline{v}$, v_z, t en $O(1)$

Donnée adimensionnée

$$\phi(\underline{x}, z, t) = \phi_c \, \bar{\phi}(\underline{\bar{x}}, \bar{z}, \bar{t})$$

Inconnues adimensionnées

$$f(x, v, t) = \frac{f_c}{\alpha} \, f^\alpha(\bar{x}, \bar{v}, \bar{t}), \qquad \phi_a(x, t) = \phi_c \, \phi_a^\alpha(\underline{\bar{x}}, \alpha \, \bar{z}, \bar{t})$$

Modèle cinétique adimensionné

Vlasov :

$$\partial_t f^\alpha(z) + \underline{v} \cdot \quad {}_{\underline{x}} f^\alpha(z)$$
$$- \quad {}_{\underline{x}}(\phi(z) + \phi_a^\alpha(\alpha\, z)) \cdot \quad {}_{\underline{v}} f^\alpha(z) - \partial_z \phi_a^\alpha(\alpha\, z)\partial_{v_z} f^\alpha(z)$$
$$+\frac{1}{\alpha}\Big(v_z \partial_z f^\alpha(z) - \partial_z \phi(z)\partial_{v_z} f^\alpha(z)\Big) = 0$$

Poisson :

$$- \quad {}_{\underline{x},z} \phi_a^\alpha(\alpha z) = \frac{1}{\alpha} \quad {}_{\mathbb{R}^3} \quad f^\alpha(z)\, d\underline{v}\, dv_z$$

Conditions aux Limites :

$$\lim_{|x|\to 0} \phi_a^\alpha(x,\cdot) = 0 \qquad \partial_z \phi_a^\alpha(z=0) = 0$$

$$\gamma^-(f^\alpha)(v_z) = (1-\alpha)\gamma^+(f^\alpha)(-v_z) + \alpha\mathcal{K}(\gamma^+(f^\alpha))(v_z)$$

pour tout $v_z < 0$

collisions spéculaires dominent

Potentiel confinant

$$\phi(x,t) = \phi(\underline{x},0,t) + \psi(\underline{x},z,t)$$

composante parallèle composante transverse

Hypothèses (potentiel attractif)

- $z \in \mathbb{R}^- \mapsto \psi(\underline{x},z,t) \in \mathbb{R}$ est strict décroissante
- $\lim\limits_{z \to -\infty} \psi(\underline{x},z,t) = +\infty$

$$\Downarrow$$

$$\psi(z=0)=0, \quad \psi \geq 0 \quad \text{et} \quad z \mapsto \psi(z) \text{ bijective}$$

Energie totale transverse (1)

$$\varepsilon_z = \frac{|v_z|^2}{2} + \quad (\underline{x}, z, t) = \varepsilon_z(z, v_z)$$

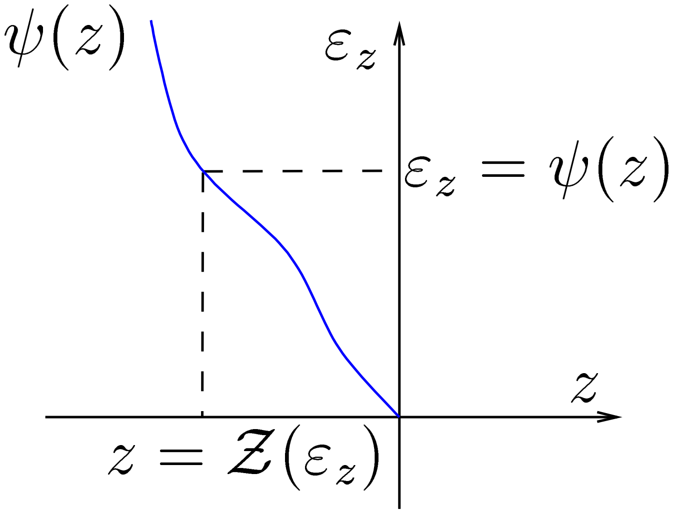
Pour toute fonction g

$$I_g = \underset{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-}{\quad} g(\varepsilon_z(z, v_z))\,\delta(\varepsilon_z - \varepsilon_z')dz\,dv_z = 2 \underset{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^-}{\quad} \cdots dz\,dv$$

Chgt de var : $v_z \mapsto \varepsilon_z$

$$I_g = 2 \underset{\mathbb{R}^-}{\quad} \overset{+\infty}{\underset{\psi(z)}{\quad}} g(\varepsilon_z)\,\frac{\delta(\varepsilon_z - \varepsilon_z')}{v_z(z, \varepsilon_z)}\,d\varepsilon_z\,dz$$

Energie totale transverse (2)

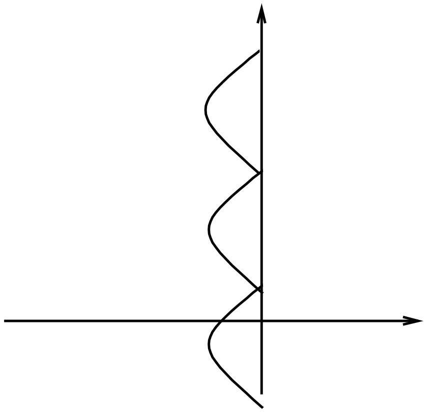


Fubini

$$I_g = \int_0^{+\infty}\int_{\mathcal{Z}(\varepsilon_z)}^0 g(\varepsilon_z)\frac{\delta(\varepsilon_z - \varepsilon'_z)}{v_z(z,\varepsilon_z)}dz d\varepsilon_z$$

$$= g(\varepsilon'_z)\underbrace{\int_{\mathcal{Z}(\varepsilon'_z)}^0 \frac{1}{v_z(z,\varepsilon'_z)}dz}$$

$N_z(\varepsilon'_z) =$ Densité d'état



Temps moyen entre deux collisions

Modèle asymptotique (1)

Théorème : (Formel)

Si $\lim_{\alpha \to 0} f^{\alpha} = f$ et $\lim_{\alpha \to 0} \phi_a^{\alpha} = \phi_a$ alors

$$f(x, v, t) = F(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t)$$

avec $\varepsilon_z = \dfrac{|v_z|^2}{2} + \quad (\underline{x}, z, t)$

Modèle asymptotique (2)

Boltzmann pour $(\underline{x}, \underline{v}, \varepsilon_z, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$:

$$\partial_t + \underline{v}\cdot \quad {}_{\underline{x}} - (\quad {}_{\underline{x}}\phi_a(z=0) + < \quad {}_{\underline{x}}\phi >) \cdot \quad {}_{\underline{v}} \quad (N_z F)$$

$$+\partial_{\varepsilon_z}\Big[< \partial_t \quad > + \underline{v}\cdot < \quad {}_{\underline{x}} \quad > \quad (N_z F)\Big]$$

$$= \mathcal{K}(F) - F$$

Poisson :

dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$

$$\begin{cases} - \quad {}_{\underline{x},z}\phi_a(\underline{x}, z, t) = 0 \\ \partial_z\phi_a(\underline{x}, 0, t) = \underset{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+}{\quad} N_z\, F\, d\varepsilon_z\, d\underline{v} = \rho(\underline{x}, t) \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} \phi_a(\underline{x}, z) = 0 \end{cases}$$

Modèle asymptotique (3)

Remarques :

- Cas linéaire + collisions spéculaires seul^t ($\phi_a \equiv 0$, $\mathcal{K} \equiv 0$) preuve rigoureuse.

- Existence d'une solution de Poisson

$$\left.\begin{array}{l} - \quad {}_{\underline{x},z} V = 2\,\delta(z)\,\rho(\underline{x},t) \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} V(x,t) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow V = \frac{1}{4\,\pi\,|x|}\star 2\,\delta(z)\,\rho(\underline{x},t)$$

$$\phi_a = V_{|\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-}$$

Passage à la limite (1)

$$\partial_t f^\alpha(z) + \underline{v} \cdot \quad {}_{\underline{x}} f^\alpha(z)$$

$$- \quad {}_{\underline{x}}(\phi(z) + \phi_a^\alpha(\alpha\, z)) \cdot \quad {}_{\underline{v}} f^\alpha(z) - \partial_z \phi_a^\alpha(\alpha\, z) \partial_{v_z} f^\alpha(z)$$

$$+ \frac{1}{\alpha} \; v_z \partial_z f^\alpha(z) - \partial_z \quad (z) \partial_{v_z} f^\alpha(z) \; = 0$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha \times \Downarrow$$

$$v_z \partial_z f(z) - \partial_z \quad (z) \partial_{v_z} f(z) = 0$$

Passage à la limite (2)

Changement de variables :

- $(z, v_z) \mapsto (z, u_z) : \begin{cases} \dfrac{|u_z|^2}{2} = \dfrac{|v_z|^2}{2} + \quad (z) \\ \text{sign}(u_z) = \text{sign}(v_z) \end{cases}$
- $f(z, v_z) = \bar{f}(z, u_z)$

$$\Downarrow$$

$$\partial_z \bar{f} = 0 \qquad \bar{f}(z, u_z) = \bar{f}(0, u_z) = \gamma^{\pm}(\bar{f})(u_z)$$

Passage à la limite : (3)

Condition aux Limites

$$\gamma^-(f^\alpha)(v_z) = (1-\alpha)\gamma^+(f^\alpha)(-v_z) + \alpha\,\mathcal{K}(\gamma^+(f))(v_z)$$

pour tout $v_z < 0$

$$\alpha \to 0 \Downarrow$$

$$\gamma^-(\bar{f})(u_z) = \gamma^-(f)(v_z) = \gamma^+(f)(-v_z) = \gamma^+(\bar{f})(-u_z)$$

$$\Downarrow$$

$$f(z, v_z) = \bar{f}(u_z) = \bar{f}(-u_z) = F(|u_z|^2/2) = F(\varepsilon_z)$$

Passage à la limite : Vlasov

$$\lim_{\alpha\to 0} \quad {}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-} \delta(\varepsilon_z - \varepsilon_z') \times \text{Vlasov}\, dz\, dv_z \Downarrow$$

$$\partial_t + \underline{v}\cdot \quad {}_{\underline{x}} - (\quad {}_{\underline{x}}\phi_a(z=0) + < \quad {}_{\underline{x}}\phi >)\cdot \quad {}_{\underline{v}} \ (\quad {}_z F)$$

$$+\partial_{\varepsilon_z}\Big[\ < \partial_t \quad > + \underline{v}\cdot < \quad {}_{\underline{x}} \quad > \quad (\quad {}_z F)\Big]$$

$$= \mathcal{K}(F) - F$$

Passage à la limite : Poisson (1)

Formulation faible

$${}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-} {}_{\underline{x}}\phi_a^{\alpha}(\alpha z)\cdot \; {}_{\underline{x}}\varphi\, d\underline{x}\, dz+\frac{1}{\alpha} {}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-} \partial_z\phi_a^{\alpha}(\alpha z)\cdot\partial_z\varphi\, d\underline{x}\, dz$$

$$= \frac{1}{\alpha} {}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-} \; {}_{\mathbb{R}^3} f^{\alpha}(z)\, d\underline{v}\, dv_z\, \varphi\, dz\, d\underline{x}$$

Délocalisation : $\varphi(\underline{x}, z) = \bar{\varphi}(\underline{x}, \alpha\, z)$ + Chgt de var $\bar{z} = \alpha z$

$${}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-} {}_{(\underline{x},z)}\phi_a^{\alpha}(\underline{x}, \bar{z}) \cdot \; {}_{(\underline{x},z)}\bar{\varphi}(\underline{x}, \bar{z})\, d\underline{x}\, d\bar{z}$$

$$= {}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-} \; {}_{\mathbb{R}^3} f^{\alpha}(z)\, d\underline{v}\, dv_z\, \bar{\varphi}(\underline{x}, \alpha z)\, dz\, d\underline{x}$$

Passage à la limite : Poisson (1)

$$\alpha \to 0 \Rightarrow$$

$$ {}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-} \quad {}_{(\underline{x},z)}\phi_a(\underline{x},\bar{z}) \cdot \quad {}_{(\underline{x},z)}\bar{\varphi}(\underline{x},\bar{z})\, d\underline{x}\, d\bar{z} $$

$$ = \quad {}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^-} \quad {}_{\mathbb{R}^3} f(z)\, d\underline{v}\, dv_z\, \bar{\varphi}(\underline{x},0)\, dz\, d\underline{x} $$

$$ \left\{ \begin{array}{l} - \quad {}_{\underline{x},z}\phi_a(\underline{x},z,t) = 0 \\ \partial_z \phi_a(\underline{x},0,t) = \quad {}_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^+} \quad {}_z F\, d\varepsilon_z\, d\underline{v} \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} \phi_a(\underline{x},z) = 0 \end{array} \right. $$

Perspectives et travaux en cours

- Simulations numériques

- Limite rigoureuse cas non linéaire (Vlasov+Poisson)

- Etude liens avec SHE

$$\begin{tikzcd}
\text{Vlasov-Poisson} \arrow[r, "\alpha \to 0"] \arrow[rr, bend right, "\text{P. Degond}"'] & \text{Boltzmann-Poisson} \arrow[r] & \text{SHE-Poisson}
\end{tikzcd}$$